数学 · 答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. D　　2. B　　3. D　　4. C　　5. A

6. D　　7. C　　8. B

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. AC　　10. ABD　　11. ABC　　12. BCD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $-\dfrac{1}{2}$　　14. $\dfrac{1}{3}$

15. $\dfrac{16}{7}$　　16. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **解析**　（Ⅰ）因为 a_2, a_3+3, a_4 成等差数列，所以 $2(a_3+3)=a_2+a_4$，…………（2 分）

得 $2a_3+6=\dfrac{a_3}{q}+a_3q$，即 $2a_3+6=\dfrac{a_3}{2}+2a_3$，解得 $a_3=12$，…………（4 分）

所以 $a_n=a_3q^{n-3}=12\times2^{n-3}=3\times2^{n-1}$. …………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a_1=3\times2^{1-1}=3$，…………（6 分）

所以 $S_n=\dfrac{3\times(1-2^n)}{1-2}=3\times2^n-3$，…………（8 分）

则 $T_n=\dfrac{6\times(1-2^n)}{1-2}-3n=3\times2^{n+1}-6-3n$. …………（10 分）

18. **解析**　（Ⅰ）如图，设 A_1C_1 的中点为 F，连接 AF, EF.

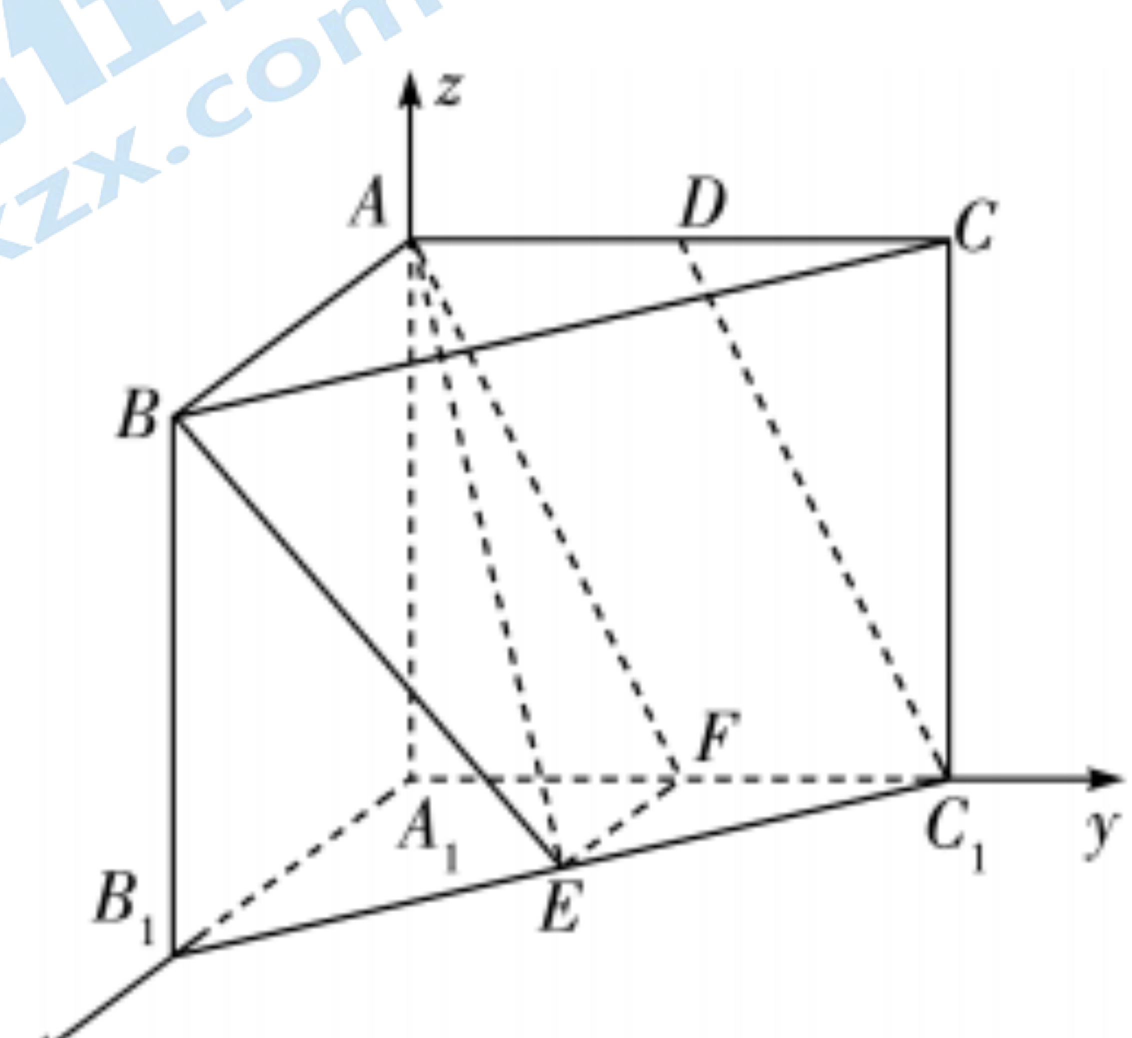
因为 E, F 分别为 B_1C_1, A_1C_1 的中点，所以 $EF/\!/A_1B_1$，

又 $AB/\!/A_1B_1$，所以 $EF/\!/AB$，所以 AF 在平面 ABE 内. …………（2 分）

因为 $AD=\dfrac{1}{2}AC, C_1F=\dfrac{1}{2}A_1C_1, AC \perp\!\!\!\!= A_1C_1$，所以 $AD \perp\!\!\!\!= C_1F$，…………（3 分）

所以四边形 ADC_1F 是平行四边形，$AF/\!/C_1D$，…………（4 分）

又 $C_1D\not\subset$ 平面 ABE，所以 $C_1D/\!/$ 平面 ABE. …………（5 分）



（Ⅱ）以 A_1 为坐标原点，分别以 A_1B_1, A_1C_1, A_1A 所在的直线为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，…………（6分）

设 $AB=AC=AA_1=2$，则点 $B(2,0,2), C(0,2,2), A(0,0,2), E(1,1,0)$，

$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0), \overrightarrow{AB}=(2,0,0), \overrightarrow{AE}=(1,1,-2)$. …………（8分）

设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(x,y,z)\cdot(2,0,0)=2x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=(x,y,z)\cdot(1,1,-2)=x+y-2z=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\ y=2z,\end{cases}$

不妨令 $z=1$，得平面 ABE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$. …………（10分）

设直线 BC 与平面 ABE 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{BC}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{|(0,2,1)\cdot(-2,2,0)|}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. …………（12分）

19. **解析**　（Ⅰ）由条件及正弦定理可得 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，…………（1分）

所以 $\sin 2A=\sin 2B$. …………（2分）

因为 $A,B\in(0,\pi)$，且 $A+B\in(0,\pi)$，所以 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，

即 $A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$. …………（3分）

因为 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，所以 $A+B\neq\dfrac{\pi}{2}$，…………（4分）

所以 $A=B$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形. …………（5分）

（Ⅱ）由题意及（Ⅰ）得 $A=B$，从而 $a=b$.

由正弦定理得 $c\sin A=a\sin C=1$，

所以 $c=\dfrac{1}{\sin A}$，且 $a=\dfrac{1}{\sin C}=\dfrac{1}{\sin(A+B)}=\dfrac{1}{\sin 2A}$，…………（7分）

由 $c^2=2\sqrt{3}b=2\sqrt{3}a$，可得 $\dfrac{1}{\sin^2 A}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 2A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin A\cos A}$，

整理得 $\tan A=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$. …………（9分）

所以 $C=\pi-A-B=\dfrac{2\pi}{3}$，…………（10分）

由 $a\sin C=1$，得 $b=a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. …………（12分）

20. **解析**　（Ⅰ）令 $n=1$，得 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{a_1+\lambda}{a_1}$，即 $\dfrac{1+a_2}{1}=\dfrac{1+\lambda}{1}$，所以 $a_2=\lambda$，…………（1分）

令 $n=2$，得 $\dfrac{S_3}{S_2}=\dfrac{a_2+\lambda}{a_2}$，即 $\dfrac{1+\lambda+a_3}{1+\lambda}=\dfrac{\lambda+\lambda}{\lambda}=2$，所以 $a_3=1+\lambda$. …………（2分）

因为 a_1,a_2,a_3 构成等比数列，所以 $a_1a_3=a_2^2$，…………（3分）

即 $1+\lambda=\lambda^2$，解得 $\lambda=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\lambda=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0\text{，舍去}\right)$. …………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由已知得 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{a_n+3}{a_n}$，所以 $a_n(S_{n+1}-S_n)=3S_n$，即 $a_na_{n+1}=3S_n$①， …………………（6 分）

所以 $a_{n+1}a_{n+2}=3S_{n+1}$②，由②－①得 $a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3a_{n+1}$， …………………………（7 分）

又 $a_{n+1}>0$，所以 $a_{n+2}-a_n=3$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项分别构成公差为 3 的等差数列.

由（Ⅰ）可知 $a_2=\lambda=3$， …………………………………………………………（8 分）

设 $\dfrac{1}{a_1a_3}+\dfrac{1}{a_2a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_na_{n+2}}=T_n$，

因为 $\dfrac{1}{a_na_{n+2}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+2}}\right)$，

所以 $T_n=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_4}+\cdots+\dfrac{1}{a_{n-1}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+2}}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_{n+2}}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_{n+2}}\right)=\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{a_{n+2}}\right)$， …………（10 分）

当 $n\to+\infty$ 时，$a_n\to+\infty$，$\dfrac{1}{a_n}\to0$，所以 $T_n<\dfrac{4}{9}$ 且 $T_n\to\dfrac{4}{9}$，

故 M 的最小值为 $\dfrac{4}{9}$. ……………………………………………………（12 分）

21. **解析**　（Ⅰ）因为 D,E 分别是线段 QC,AC 的中点，

所以 $DE\parallel PA$，且 $DE=\dfrac{1}{2}QA=\dfrac{1}{4}PA=1$.

因为 $PA\perp AC$，所以 $DE\perp AC$. ……………………………………………（1 分）

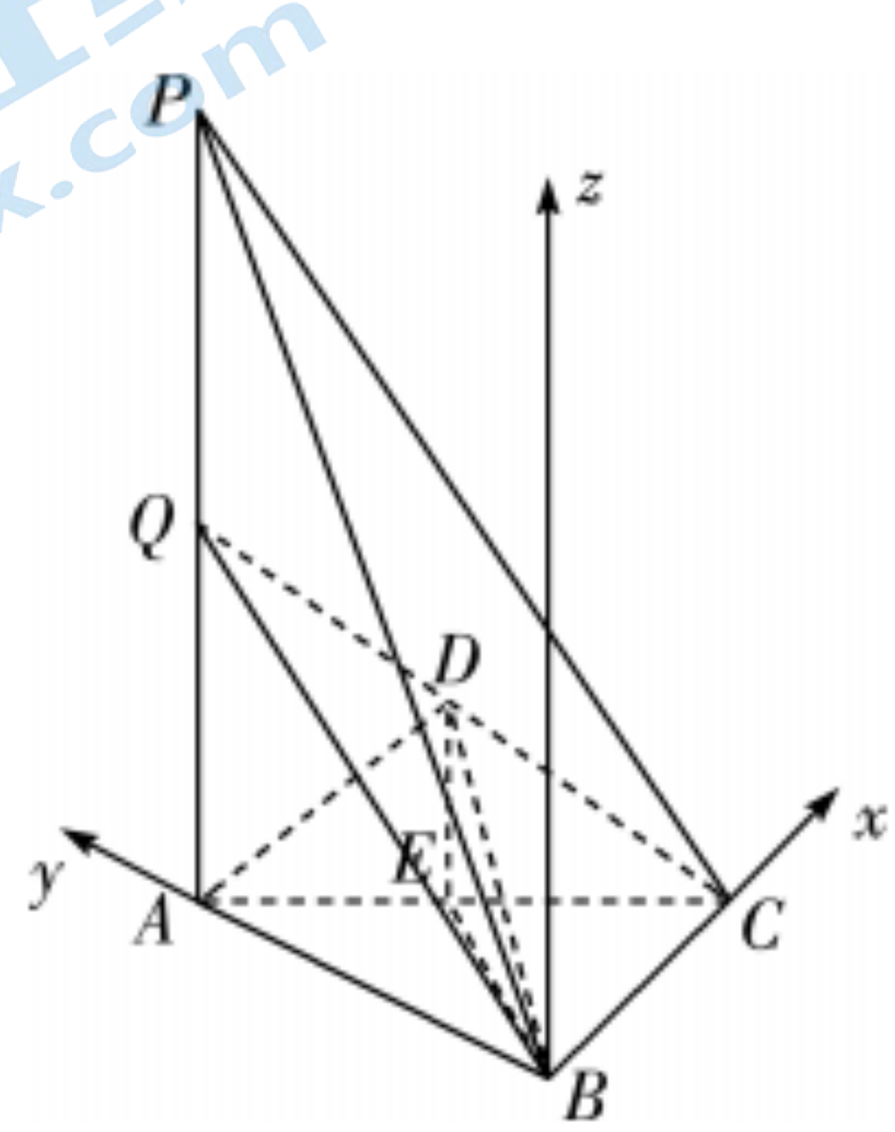
因为 $BD=\sqrt{2}$，$BE=1$，所以 $DE^2+BE^2=BD^2$，所以 $DE\perp BE$. ……………………（2 分）

又因为 $AC,BE\subset$ 平面 ABC，且 $AC\cap BE=E$， …………………………………（3 分）

所以 $DE\perp$ 平面 ABC. ………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）因为 E 是线段 AC 的中点，且有 $AC=2BE=2$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形，其中 $AB\perp BC$.

由（Ⅰ）可知 $DE\perp$ 平面 ABC，所以可以 B 为坐标原点，BC,BA 所在直线为 x,y 轴，过点 B 且与 ED 平行的直线为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系. ……………………………………（5 分）



因为 $AB\perp BC$,$AC=2$,设 $\angle ACB=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$,

则 $AB=AC\sin\theta=2\sin\theta$,$BC=AC\cos\theta=2\cos\theta$. ……………………………………………………(6 分)

则 $B(0,0,0)$,$A(0,2\sin\theta,0)$,$C(2\cos\theta,0,0)$,$Q(0,2\sin\theta,2)$,$D(\cos\theta,\sin\theta,1)$,

所以 $\overrightarrow{DB}=(-\cos\theta,-\sin\theta,-1)$,$\overrightarrow{DQ}=(-\cos\theta,\sin\theta,1)$,$\overrightarrow{DA}=(-\cos\theta,\sin\theta,-1)$. ………………(7 分)

不妨设平面 QBD 与平面 ABD 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,$\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DA}=0,\end{cases}$

即有 $\begin{cases}-x_1\cos\theta-y_1\sin\theta-z_1=0,\\ -x_1\cos\theta+y_1\sin\theta+z_1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}-x_2\cos\theta-y_2\sin\theta-z_2=0,\\ -x_2\cos\theta+y_2\sin\theta-z_2=0.\end{cases}$

分别令 $z_1=\sin\theta$,$z_2=\cos\theta$,此时有 $\boldsymbol{n}_1=(0,-1,\sin\theta)$,$\boldsymbol{n}_2=(-1,0,\cos\theta)$. ……………………………(10 分)

则 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}\right|=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}\cdot\sqrt{1+\cos^2\theta}}=\frac{1}{3}$, ……………………………(11 分)

整理得 $\sin^2 2\theta=1$.

因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$,所以 $\sin 2\theta=1$,$2\theta=\frac{\pi}{2}$,即 $\theta=\frac{\pi}{4}$,

所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{4}$. ………………………………………………………………………………………(12 分)

22. **解析** (Ⅰ)$f(x)\geqslant 0$ 恒成立,等价于 $m\geqslant\frac{x}{e^x}$恒成立,即 $m\geqslant\left(\frac{x}{e^x}\right)_{max}$. ……………………………(1 分)

设 $\varphi(x)=\frac{x}{e^x}$,则 $\varphi'(x)=\frac{1-x}{e^x}$, ……………………………………………………………………(2 分)

当 $x<1$ 时,$\varphi'(x)>0$,$\varphi(x)$单调递增,当 $x>1$ 时,$\varphi'(x)<0$,$\varphi(x)$单调递减,

所以 $\varphi(x)_{max}=\varphi(1)=\frac{1}{e}$, ……………………………………………………………………………(3 分)

故 m 的取值范围是$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$. ……………………………………………………………………(4 分)

(Ⅱ)$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f(x_i)}{e^{x_i}}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(m-\frac{x_i}{e^{x_i}}\right)=nm-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{e^{x_i}}$,故待证不等式等价于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{e^{x_i}}\leqslant 2e^{-\frac{2}{n}}$. ………………(5 分)

在曲线 $y=\varphi(x)$上任取一点$(a,\varphi(a))(0<a<2)$,由(Ⅰ)知 $\varphi'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,且 $\varphi(a)=\frac{a}{e^a}$,

故曲线 $y=\varphi(x)$在点$(a,\varphi(a))$处的切线方程为 $y=\frac{1-a}{e^a}x+\frac{a^2}{e^a}$.

下面先证明:当 $0<x<2$ 且 $0<a<2$ 时,$\frac{x}{e^x}\leqslant\frac{1-a}{e^a}x+\frac{a^2}{e^a}$.(*)

设 $g(x)=\frac{1-a}{e^a}x+\frac{a^2}{e^a}-\frac{x}{e^x}$,则 $g'(x)=\frac{1-a}{e^a}-\frac{1-x}{e^x}$, ………………………………………(7 分)

设 $h(x)=g'(x)$,当 $0<x<2$ 时,$h'(x)=\frac{2-x}{e^x}>0$,所以 $h(x)$在$(0,2)$上单调递增,

又 $h(a)=0$,所以当 $0<x<a$ 时,$h(x)<0$,当 $a<x<2$ 时,$h(x)>0$,

即 $g(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减,在 $(a,2)$ 上单调递增,所以 $g(x)\geqslant g(a)=0$,

即(*)成立. ……………………………………………………………………………………………………(9 分)

因为正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=2$,所以 $0<x_i<2$,

所以当 $0<a<2$ 时,$\dfrac{x_i}{e^{x_i}}\leqslant\dfrac{1-a}{e^a}x_i+\dfrac{a^2}{e^a}$,

则 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{e^{x_i}}\leqslant\dfrac{1-a}{e^a}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\dfrac{na^2}{e^a}=\dfrac{2(1-a)}{e^a}+\dfrac{na^2}{e^a}$, ……………………………………(11 分)

取 $a=\dfrac{2}{n}$,得 $\dfrac{2(1-a)}{e^a}+\dfrac{na^2}{e^a}=2e^{-\frac{2}{n}}$,

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{e^{x_i}}\leqslant 2e^{-\frac{2}{n}}$,即原命题得证. ……………………………………………………………(12 分)