北京市西城区 2022—2023 学年度第一学期期末试卷

高三数学

2023.1

本试卷共 6 页， 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1） 已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$，集合 $A=\{x\in \mathbf{Z} \mid x^2\leqslant 2\}$，则 $\complement_U A=$

（A） $\{-1,0,1\}$　　（B） $\{-2,2,3\}$

（C） $\{-2,-1,2\}$　　（D） $\{-2,0,3\}$

（2） 设复数 $z=3-\mathrm{i}$，则复数 $\mathrm{i}\cdot z$ 在复平面内对应的点的坐标是

（A） $(1,3)$　　（B） $(-1,3)$

（C） $(3,1)$　　（D） $(3,-1)$

（3） 已知函数 $f(x)=\lg|x|$，则 $f(x)$

（A）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

（B）是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

（C）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

（D）是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

（4） 已知双曲线 $C:3x^2-y^2=3$，则 C 的焦点到其渐近线的距离为

（A） $\sqrt{2}$　　（B） $\sqrt{3}$

（C） 2　　（D） 3

（5）设 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $0<x<y<1$，则

（A）$x^2>y^2$　　（B）$\tan x>\tan y$

（C）$4^x>2^y$　　（D）$x+\dfrac{1}{x}>y(2-y)$

（6）在 $\triangle ABC$ 中，若 $c=4$，$b-a=1$，$\cos C=-\dfrac{1}{4}$，则 $\triangle ABC$ 的面积是

（A）1　　（B）$\dfrac{3}{4}$

（C）$\sqrt{15}$　　（D）$\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

（7）“空气质量指数（AQI）”是定量描述空气质量状况的无量纲指数．当AQI大于200时，表示空气重度污染，不宜开展户外活动．某地某天 $0\sim24$ 时的空气质量指数 y 随时间 t 变化的趋势由函数 $y=\begin{cases}-10t+290, & 0\leqslant t\leqslant 12,\\ 56\sqrt{t}-24, & 12<t\leqslant 24\end{cases}$ 描述，则该天适宜开展户外活动的时长至多为

（A）5小时　　（B）6小时

（C）7小时　　（D）8小时

（8）设 α,β 均为锐角，则“$\alpha>2\beta$”是“$\sin(\alpha-\beta)>\sin\beta$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

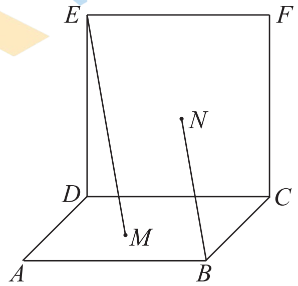
（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）在 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC=1$，$\angle C=90^\circ$．P 为 AB 边上的动点，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的取值范围是

（A）$[-\dfrac{1}{4},1]$　　（B）$[-\dfrac{1}{8},1]$

（C）$[-\dfrac{1}{4},2]$　　（D）$[-\dfrac{1}{8},2]$

（10）如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CDEF$ 所在的平面互相垂直．Ω_1 是正方形 $ABCD$ 及其内部的点构成的集合，Ω_2 是正方形 $CDEF$ 及其内部的点构成的集合．设 $AB=1$，给出下列三个结论：



① $\exists M\in\Omega_1,\exists N\in\Omega_2$，使 $MN=2$；

② $\exists M\in\Omega_1,\exists N\in\Omega_2$，使 $EM\perp BN$；

③ $\exists M\in\Omega_1,\exists N\in\Omega_2$，使 EM 与 BN 所成的角为 60°．

其中所有正确结论的个数是

（A）0　　　　（B）1

（C）2　　　　（D）3

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

（11）$(x^3-\frac{1}{x})^4$ 的展开式中常数项为_______．（用数字作答）

（12）已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l．则以点 F 为圆心，且与直线 l 相切的圆的方程是_______．

（13）已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_1=5$，且 a_2+2，a_3+4，a_4+6 成等比数列，则 $a_6=$_______；$\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$_______．

（14）设函数 $f(x)=\begin{cases}-x+a, & x\leqslant 1,\\ -a(x-2)^2+1, & x>1.\end{cases}$ 若 $a=2$，则 $f(x)$ 的单调递增区间是_______；若 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,+\infty)$，则 a 的取值范围是________．

（15）人口问题是关系民族发展的大事．历史上在研究受资源约束的人口增长问题中，有学者提出了“Logistic model”：$f(t)=\dfrac{Kx_0}{x_0-(x_0-K)\mathrm{e}^{-\frac{r_0}{K}t}}\ (t\geqslant 0)$，其中 K,r_0,x_0 均为正常数，且 $K>x_0$，该模型描述了人口随时间 t 的变化规律．给出下列三个结论：

① $f(0)=x_0$；

② $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数；

③ $\forall t\in[0,+\infty)$，$f(t)<K$．

其中所有正确结论的序号是_______．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin x(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})-\sqrt{3}\cos 2x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）若 $x\in(0,\pi)$，且 $f(x)>-1$，求 x 的取值范围.

（17）（本小题 14 分）

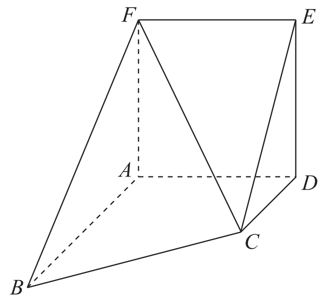
如图，四边形 $ABCD$ 为梯形，$AB//CD$，四边形 $ADEF$ 为平行四边形.

（Ⅰ）求证：$CE//$ 平面 ABF；

（Ⅱ）若 $AB\perp$ 平面 $ADEF$，$AF\perp AD$，$AF=AD=CD=1$，$AB=2$，求：

（ⅰ）直线 AB 与平面 BCF 所成角的正弦值；

（ⅱ）点 D 到平面 BCF 的距离.



（18）（本小题 13 分）

近年来，新能源汽车受到越来越多消费者的青睐．据统计，2021 年 12 月至 2022 年 5 月全国新能源市场三种车型月度零售销量数据如下（单位：万辆）：

	12 月	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月
轿车	28.4	21.3	15.4	26.0	16.7	21.0
MPV	0.8	0.2	0.2	0.3	0.4	0.4
SUV	18.1	13.7	11.7	18.1	11.3	14.5

（Ⅰ）从 2021 年 12 月至 2022 年 5 月中任选 1 个月份，求该月 MPV 零售销量超过这 6 个月该车型月度零售销量平均值的概率；

（Ⅱ）从 2022 年 1 月至 2022 年 5 月中任选 3 个月份，将其中 SUV 的月度零售销量相比上个月份增加的月份个数记为 X，求 X 的分布列和数学期望 EX；

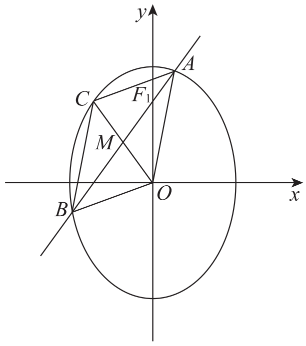
（Ⅲ）记 2021 年 12 月至 2022 年 5 月轿车月度零售销量数据的方差为 s_1^2，同期各月轿车与对应的 MPV 月度零售销量分别相加得到 6 个数据的方差为 s_2^2，写出 s_1^2 与 s_2^2 的大小关系.（结论不要求证明）

（19）（本小题 15 分）

如图，已知椭圆 $E:\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的一个焦点为 $F_1(0,1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）过点 F_1 作斜率为 k 的直线交椭圆 E 于两点 A,B，AB 的中点为 M．设 O 为原点，射线 OM 交椭圆 E 于点 C．当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABO$ 的面积相等时，求 k 的值.



（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x+x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\ f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）当 $a>0$ 时，判断 $f(x)$ 的零点个数，并加以证明；

（Ⅲ）当 $a<0$ 时，证明：存在实数 m，使 $f(x)\geqslant m$ 恒成立.

（21）（本小题 15 分）

已知 $A_n:a_1,a_2,\cdots,a_n\ (n\geqslant 4)$ 为有穷数列．若对任意的 $i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，都有 $|a_{i+1}-a_i|\leqslant 1$（规定 $a_0=a_n$），则称 A_n 具有性质 P .

设 $T_n=\{(i,j)\,|\,|a_i-a_j|\leqslant 1,\ 2\leqslant j-i\leqslant n-2\ (i,j=1,2,\cdots,n)\}$.

（Ⅰ）判断数列 $A_4:1,0.1,-1.2,-0.5$，$A_5:1,2,2.5,1.5,2$ 是否具有性质 P？若具有性质 P，写出对应的集合 T_n；

（Ⅱ）若 A_4 具有性质 P，证明：$T_4\neq\varnothing$；

（Ⅲ）给定正整数 n，对所有具有性质 P 的数列 A_n，求 T_n 中元素个数的最小值.

北京市西城区 2022—2023 学年度第一学期期末试卷

高三数学答案及评分参考

2023.1

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B （2）A （3）C （4）B （5）D

（6）D （7）C （8）C （9）B （10）C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）-4 （12）$(x-1)^2+y^2=4$

（13）-5 $-n^2+6n$ （14）$[1,2]$ $(0,2]$

（15）①②③（选①②③得 5 分；只选出其中 1 个得 2 分；只选出其中 2 个得 3 分）

注：（13）（14）题第一空 3 分，第二空 2 分；其中（14）题第一空答 $(1,2)$ 也正确。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=2\sin x(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})-\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x$ ………2 分

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$ ………4 分

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$. ………6 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π. ………7 分

（Ⅱ）因为 $0<x<\pi$，所以 $-\frac{\pi}{3}<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$. ………8 分

因为 $f(x)>-1$，所以 $\sin(2x-\frac{\pi}{3})>-\frac{1}{2}$. ………9 分

所以 $-\frac{\pi}{6}<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}$. ………11 分

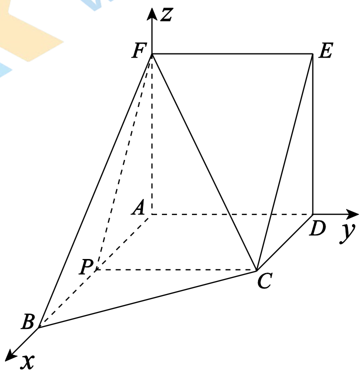
解得 $\frac{\pi}{12}<x<\frac{3\pi}{4}$，所以 x 的取值范围是 $(\frac{\pi}{12},\frac{3\pi}{4})$. ………13 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）如图，在射线 AB 上取点 P，使 $AP = DC$． ………1 分

由题设，得 $AP // DC$，所以四边形 $APCD$ 为平行四边形．

所以 $PC // AD$ 且 $PC = AD$． ………2 分



又四边形 $ADEF$ 为平行四边形，

所以 $AD // EF$ 且 $AD = EF$．

所以 $PC // EF$ 且 $PC = EF$． ………3 分

所以四边形 $PCEF$ 为平行四边形，

所以 $PF // CE$． ………4 分

因为 $CE \not\subset$ 平面 ABF， $PF \subset$ 平面 ABF，

所以 $CE //$ 平面 ABF． ………5 分

（Ⅱ）（ⅰ）因为 $AB \perp$ 平面 $ADEF$，所以 $AB \perp AD$, $AB \perp AF$．

又 $AD \perp AF$，所以 AB, AD, AF 两两相互垂直． ………6 分

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$， $B(2,0,0)$， $C(1,1,0)$， $F(0,0,1)$．

所以 $\overrightarrow{BC} = (-1,1,0)$， $\overrightarrow{BF} = (-2,0,1)$， $\overrightarrow{AB} = (2,0,0)$． ………7 分

设平面 BCF 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x, y, z)$，则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + y = 0, \\ -2x + z = 0. \end{cases}$

令 $x = 1$，则 $y = 1$， $z = 2$．于是 $\boldsymbol{m} = (1,1,2)$． ………9 分

设直线 AB 与平面 BCF 所成角为 α，则

$$\sin\alpha = |\cos\langle \boldsymbol{m}, \overrightarrow{AB} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AB}|} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$ ………11 分

所以直线 AB 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$．

（ⅱ）因为 $AB // CD$，

所以直线 CD 与平面 BCF 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$． ………12 分

所以点 D 到平面 BCF 的距离为 $d = CD \cdot \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$． ………14 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）这 6 个月 MPV 车型月度零售销量平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{6}(0.8+0.2+0.2+0.3+0.4+0.4)\approx 0.38.$$

故 MPV 月度零售销量超过 $\bar{x}$ 的月份为 12 月，4 月，5 月. ………2 分

所以从 2021 年 12 月至 2022 年 5 月中任选 1 个月份，该月 MPV 零售销量超过 $\bar{x}$ 的

概率为 $\frac{3}{6}=0.5$. ………4 分

（Ⅱ）从 2022 年 1 月至 2022 年 5 月， SUV 的月度零售销量相比上个月份增加的月份有

2 个：3 月和 5 月.

所以 X 的所有可能取值为 $0,1,2$. ………5 分

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$. ……8 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

故 X 的数学期望 $EX=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{6}{10}=\frac{6}{5}$. ………10 分

（Ⅲ）$s_1^2<s_2^2$. ………13 分

（19）（共 15 分）

解：（Ⅰ）由题设，$\begin{cases} c=1, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ ………3 分

解得 $a=\sqrt{2}, b=1$． ………4 分

所以椭圆 E 的方程为 $\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$． ………5 分

（Ⅱ）直线 AB 的方程为 $y=kx+1$．

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ 2x^2+y^2=2 \end{cases}$ 得 $(k^2+2)x^2+2kx-1=0$． ………7 分

设 $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{-2k}{k^2+2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2=\dfrac{4}{k^2+2}$． ………9 分

因为△ABC 与△ABO 的面积相等，所以点 C 和点 O 到直线 AB 的距离相等.

所以 M 为线段 OC 的中点，即四边形 $OACB$ 为平行四边形. ………11 分

设 $C(x_0,y_0)$，则 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$． ………12 分

所以 $x_0=x_1+x_2=\dfrac{-2k}{k^2+2}$，$y_0=y_1+y_2=\dfrac{4}{k^2+2}$．

将上述两式代入 $2x_0^2+y_0^2=2$，

得 $\dfrac{8k^2}{(k^2+2)^2}+\dfrac{16}{(k^2+2)^2}=2$． ………14 分

解得 $k=\pm\sqrt{2}$． ………15 分

（20）（共 15 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=xe^x-e$，

所以 $f'(x)=(1+x)e^x$． ………2 分

所以 $f(1)=0$，$f'(1)=2e$．

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=2ex-2e$． ………4 分

（Ⅱ）$f(x)$ 有且只有一个零点，证明如下： ………5 分

$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=(1+x)e^x+\frac{a}{x}$． ………6 分

因为 $a>0$，所以 $f'(x)=(1+x)e^x+\frac{a}{x}>0$．

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………8 分

因为 $f(1)=0$，

所以 $f(x)$ 有且只有一个零点 $x=1$． ………9 分

（Ⅲ）当 $a<0$ 时，$f'(x)=(1+x)e^x+\frac{a}{x}=\frac{x(1+x)e^x+a}{x}$．

设 $g(x)=x(1+x)e^x+a$，则 $g'(x)=(x^2+3x+1)e^x>0$．

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………10 分

因为 $g(0)=a<0$，$g(-a)=a[1-(1-a)e^{-a}]>0$，

所以存在 $x_0\in(0,-a)$，使得 $g(x_0)=0$． ………12 分

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的情况如下：

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0,+\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)\geqslant f(x_0)$． ………14 分

取 $m\leqslant f(x_0)$，则对于任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\geqslant m$ 成立. ………15 分

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ）数列 A_4 不具有性质 P，数列 A_5 具有性质 P . ………2 分

$T_5=\{(1,4),(2,4),(2,5),(3,5)\}$. ………4 分

（Ⅱ）“$T_4\neq\varnothing$”等价于“证明 $(1,3)$ 与 $(2,4)$ 两元素中至少有一个在 T_4 中”.

假设 $(1,3)$ 与 $(2,4)$ 两元素都不在 T_4 中，

则有 $|a_3-a_1|>1$，且 $|a_4-a_2|>1$. ………5 分

不妨设 $a_1\leqslant a_2$.

若 $a_2>a_3$，则由 $a_3-a_1=(a_3-a_2)+(a_2-a_1)$，得 $-1\leqslant a_3-a_1<1$，

这与 $|a_3-a_1|>1$ 矛盾. 从而有 $a_2\leqslant a_3$. ………7 分

同理 $a_3\leqslant a_4$，从而有 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4$.

所以 $|a_0-a_1|=|a_4-a_1|=(a_4-a_2)+(a_2-a_1)\geqslant a_4-a_2>1$.

这与 A_4 具有性质 P 矛盾.

所以假设不成立，即 $T_4\neq\varnothing$. ………9 分

（Ⅲ）设 $a_k=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ $(2\leqslant k\leqslant n-1)$，规定 $k=1$ 时，$a_{k-1}=a_n$；$k=n$ 时，$a_{k+1}=a_1$.

则 $a_{k-1},a_{k+1}\in[a_k,a_k+1]$，所以 $|a_{k+1}-a_{k-1}|\leqslant 1$.

考虑数列 $B_3:a_{k-1},a_k,a_{k+1}$ 和 $C_{n-1}:a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_{k+1},\cdots,a_n$，

由题设知，他们均具有性质 P . ………11 分

设 T_n 中元素个数的最小值为 d_n，所以 $d_n\geqslant d_{n-1}+1$.

所以 $d_n\geqslant d_{n-1}+1\geqslant d_{n-2}+2\geqslant\cdots\geqslant d_4+n-4$.

由（Ⅱ）知 $d_4\geqslant 1$，从而 $d_n\geqslant n-3$. ………13 分

当 $n=2m+1$ 时，令 $a_i=i\,(i=1,2,\cdots,m)$，$a_{m+i}=m+\dfrac{3}{2}-i$ $(i=1,2,\cdots,m+1)$；

当 $n=2m$ 时，令 $a_i=i\,(i=1,2,\cdots,m)$，$a_{m+i}=m+\dfrac{1}{2}-i$ $(i=1,2,\cdots,m)$，

此时均有 $d_n=n-3$.

所以 T_n 中元素个数的最小值为 $n-3$. ………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。