

数 学

一、选择题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 已知向量 $\vec{a} = (2, 8)$, $\vec{b} = (-4, 2)$. 若 $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$, 则向量 $\vec{c} =$ ()

- A. (0, 18) B. (8, 14) C. (12, 12) D. (-4, 20)

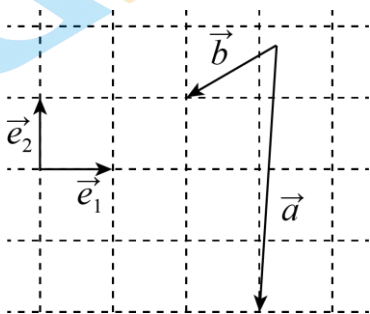
2. 函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 则 ω 可以为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 1

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $A = 105^\circ$, $B = 45^\circ$, $b = \sqrt{2}$, 则 $c =$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{6}$

4. 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 在正方形网格中的位置如图所示, 若 $\vec{a} - \vec{b} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ ($\lambda, \mu \in R$), 则 $\frac{\lambda}{\mu} =$ ()



- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. $-\frac{1}{3}$

5. 已知向量 $\vec{a} = (0, 1)$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3})$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为 ()

- A. $\sqrt{3}\vec{a}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{b}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{a}$ D. $\sqrt{3}\vec{b}$

6. 将函数 $f(x)$ 的图像上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 再把图像上各点的横坐标扩大到原来的 2 倍 (纵

坐标不变), 得到函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像, 则 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a^2 + b^2 - c^2 = kab$, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-2, 2)$ B. $(-1, 1)$ C. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ D. 0, 1

8. 设向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \beta)$, 则 “ $|\vec{a}|=1$ ” 是 “ $\alpha = \beta + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸, 是中国古老的传统民间艺术. 图 1 是一张由卷曲纹和回纹构成的正六边形窗花. 图 2 中正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 4, 圆 O 的圆心为该正六边形的中心, 圆 O 的半径为 2, 圆 O 的直径 $MN \parallel CD$, 点 P 在正六边形的边上运动, 则 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最小值为 ()

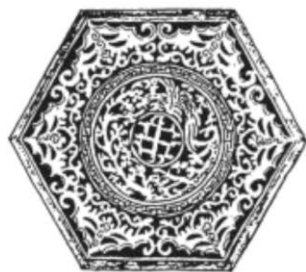


图 1

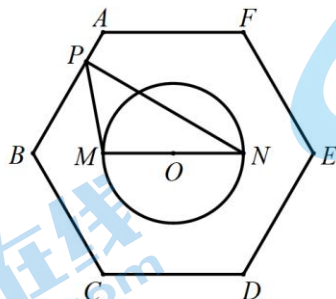
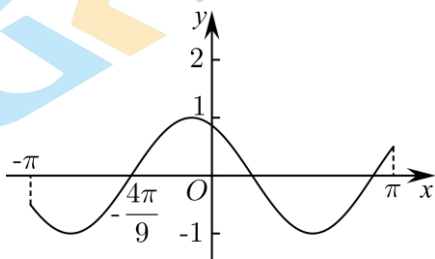


图 2

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

10. 设函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致如图所示, 则 $\omega =$ ()

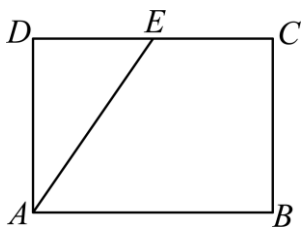


- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{9}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{9}{10}$

二、填空题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 已知 $A(-1,1), B(1,3)$, 满足 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ 的点 C 的坐标是_____.

12. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2, BC = \sqrt{3}$, E 是 CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} =$ _____.



13. 已知两灯塔 A 和 B 与海洋观测站 C 的距离都为 100km, 灯塔 A 在观测站 C 的北偏东 20° 方向上, 灯塔 B 在观测站 C 的南偏东 40° 方向上, 则灯塔 A 与灯塔 B 的距离为_____ km.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 4, b = 5, c = 6$, 则 $\frac{\sin 2A}{\sin C} =$ _____.

15. $\triangle ABC$ 为等边三角形, 且边长为 2, 则 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角大小为 120° , 若 $|\overrightarrow{BD}| = 1, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA}$, 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为_____.

三、解答题（每小题 15 分，共 60 分）

16. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (x, 4)$, $\vec{c} = (4, -x)$, 且向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线.

- (1) 证明: $\vec{a} \perp \vec{c}$;
- (2) 求 $\vec{a}$ 与 $\vec{c} - \vec{b}$ 夹角的余弦值;
- (3) 若 $|\vec{a} + t\vec{c}| = \sqrt{10}$, 求 t 的值.

17. 已知函数 $f(x) = \sin 2x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3}$.

- (1) 若点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 在角 α 的终边上, 求 $\tan 2\alpha$ 和 $f(\alpha)$ 的值;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
- (3) 若 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 求函数 $f(x)$ 的最小值.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = 5$, $\cos B = \frac{9}{16}$ 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个为已知.

- (1) 求 $\sin A$.
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $\cos C = \frac{1}{8}$, 条件②: $a = 4$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

19. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{b}{c} = \frac{\cos B}{2 - \cos C}$.

- (1) 求 $\frac{a}{b}$;
- (2) 若 $\cos C = \frac{1}{4}$, AB 边上的中线 $CD = \sqrt{6}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

参考答案

一、选择题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 【答案】B

【解析】

【分析】直接根据平面向量的坐标的线性运算即可得解.

【详解】因为向量 $\vec{a} = (2, 8), \vec{b} = (-4, 2)$,

所以 $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b} = 2(2, 8) - (-4, 2) = (8, 14)$.

故选: B.

2. 【答案】C

【解析】

【分析】 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$ 的对称轴为 $\omega x - \frac{\pi}{3} = k\pi$, 化简得到 $\omega = 2k + \frac{2}{3} (\omega > 0)$ 得到答案.

【详解】 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{3}) (\omega > 0)$

对称轴为: $\omega x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} \omega - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow \omega = 2k + \frac{2}{3} (\omega > 0) (k \in \mathbb{Z})$

当 $k = 0$ 时, ω 取值为 $\frac{2}{3}$.

故选: C.

3. 【答案】A

【解析】

【分析】由题意可得 C , 再由正弦定理即可得到结果.

【详解】因为 $A = 105^\circ, B = 45^\circ$, 所以 $C = 30^\circ$,

由正弦定理可得 $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.

故选: A.

4. 【答案】D

【解析】

【分析】利用向量减求得 $\vec{a} - \vec{b} = (1, -3)$, 利用向量的坐标运算性质, 向量相等即可得出.

【详解】解: 根据向量的减法得 $\vec{a} - \vec{b} = (1, -3)$,

$\therefore \vec{a} - \vec{b} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2 = \lambda(1, 0) + \mu(0, 1) = (\lambda, \mu)$,

$\therefore \lambda = 1$ 且 $\mu = -3$,

因此, 则 $\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{1}{3}$

故选: D.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】利用投影向量的定义即可得出答案.

【详解】设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ,

则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为: $|\vec{a}| \cos \theta \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{4} \vec{b}$.

故选: B.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】根据题意反推出如何由函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像变化得到 $f(x)$ 的图像, 再根据函数图像的变化规律进行求解即可,

【详解】由题意可知, 将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 再把图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度即可得到 $f(x)$,

又将函数 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变得到 $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$,

再把函数 $y = \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 单位长度, 得到

$$f(x) = \sin\left[4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(4 \times \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选: D.

7. 【答案】A

【解析】

【分析】由余弦定理及已知条件可得 $\frac{k}{2} \in (-1, 1)$, 即可求 k 的取值范围.

【详解】由 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{k}{2} \in (-1, 1)$, 故 $k \in (-2, 2)$.

故选: A

8. 【答案】B

【解析】

【分析】根据同角三角函数的平方关系，以及平面向量的模长公式，分别验证充分性以及必要性，即可得到结果.

【详解】因为向量 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \beta)$ ，由 $|\vec{a}| = 1$ 可得 $\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ ，

则 $\sin \beta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ ，而 $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ ，

所以 $\sin \beta = \pm \sin \alpha$ ，

当 $\sin \alpha = \sin \beta$ 时，则 $\alpha = \beta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，或 $\alpha + \beta = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

当 $\sin \alpha = -\sin \beta$ 时，则 $\alpha = -\beta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，或 $\alpha = \beta + \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

故充分性不满足；

当 $\alpha = \beta + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，则 $\sin \alpha = \pm \sin \beta$ ，所以 $\vec{a} = (\cos \alpha, \sin \beta) = (\cos \alpha, \pm \sin \alpha)$ ，

即 $|\vec{a}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + (\pm \sin \alpha)^2} = 1$ ，故必要性满足；

即 “ $|\vec{a}| = 1$ ” 是 “ $\alpha = \beta + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ” 必要不充分条件.

故选:B

9. 【答案】D

【解析】

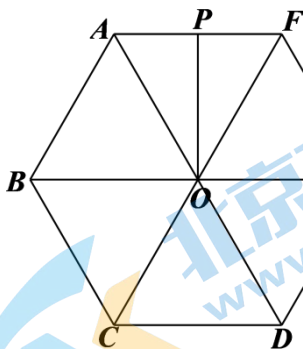
【分析】计算得出 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = |\overrightarrow{PO}|^2 - 4$ ，求出 $|\overrightarrow{PO}|$ 的取值范围，由此可求得 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围，从而可得最小值.

【详解】如下图所示，由正六边形的几何性质可知， $\triangle OAB$ 、 $\triangle OBC$ 、 $\triangle OCD$ 、 $\triangle ODE$ 、 $\triangle OEF$ 、 $\triangle OFA$ 均为边长为 4 的等边三角形，

当点 P 位于正六边形 $ABCDEF$ 的顶点时， $|\overrightarrow{PO}|$ 取最大值 4，

当点 P 为正六边形各边的中点时， $|\overrightarrow{PO}|$ 取最小值，即 $|\overrightarrow{PO}|_{\min} = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$ ，

所以， $|\overrightarrow{PO}| \in [2\sqrt{3}, 4]$.



所以， $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{PO}^2 - 4 \in [8, 12]$.

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的最小值为 8.

故选: D.

【点睛】方法点睛: 求两个向量的数量积有三种方法:

- (1) 利用定义;
- (2) 利用向量的坐标运算;
- (3) 利用数量积的几何意义.

具体应用时可根据已知条件的特征来选择, 同时要注意数量积运算律的应用.

10. 【答案】A

【解析】

【分析】由图可知 T 的范围, 从而得到 ω 的范围, 再由 $f\left(-\frac{4\pi}{9}\right) = 0$ 即可得到结果.

【详解】由图可知: $\pi < T < \pi - \left(-\frac{4}{9}\pi\right)$, 即 $\pi < T < \frac{13}{9}\pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} \in \left(\frac{18}{13}, 2\right)$ ①②

结合图像可知 $f\left(-\frac{4\pi}{9}\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6}\right) = 0$,

则 $-\frac{4\pi}{9}\omega + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

结合①可知, 当 $k = 0$ 时, $\omega = \frac{3}{2}$ 符合题意.

故选: A

二、填空题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11. 【答案】(0, 2)

【解析】

【分析】根据题意设 $C(x, y)$, 由平面向量的坐标运算, 直接代入计算即可得到结果.

【详解】设 $C(x, y)$, 因为 $A(-1, 1), B(1, 3)$, 则 $\overrightarrow{AB} = (2, 2), \overrightarrow{AC} = (x+1, y-1)$,

且 $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$, 则 $\begin{cases} 2 = 2x + 2 \\ 2 = 2y - 2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$, 所以 $C(0, 2)$

故答案为: (0, 2)

12. 【答案】2

【解析】

【分析】把 $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{DC}$ 都用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 表示, 再根据数量积的运算律即可得解.

【详解】 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

故答案为：2.

13. 【答案】 $100\sqrt{3}$

【解析】

【分析】易得角 C ，再利用余弦定理即可得解.

【详解】如图，由题意得 $C = 120^\circ$, $AC = BC = 100$,

$$\text{则 } AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C = 10000 + 10000 + 10000 = 30000,$$

$$\text{所以 } AB = 100\sqrt{3},$$

即灯塔 A 与灯塔 B 的距离为 $100\sqrt{3}\text{km}$.



故答案为： $100\sqrt{3}$.

14. 【答案】 1

【解析】

$$\text{【详解】试题分析： } \frac{\sin 2A}{\sin C} = \frac{2 \sin A \cos A}{\sin C} = \frac{2a \cos A}{c} = \frac{4}{3} \cos A = \frac{4}{3} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 1$$

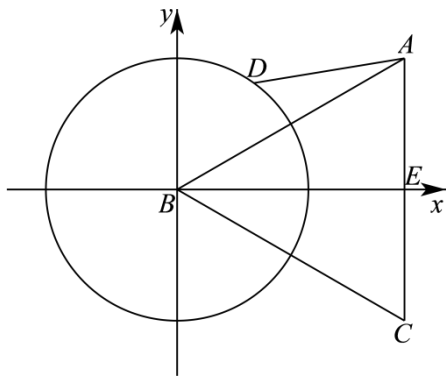
考点：正余弦定理解三角形

15. 【答案】 $-3 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】以点 B 为坐标原点， $\overrightarrow{BE}$ 、 $\overrightarrow{EA}$ 分别为 x 、 y 轴的正方向建立平面直角坐标系，设点 $D(\cos \theta, \sin \theta)$ ，利用平面向量数量积的坐标运算以及余弦函数的有界性可求得 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值.

【详解】因为 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，且 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA}$ ，则 E 为 AC 的中点，故 $BE \perp AC$ ，以点 B 为坐标原点， $\overrightarrow{BE}$ 、 $\overrightarrow{EA}$ 分别为 x 、 y 轴的正方向建立如下图所示的平面直角坐标系，



则 $A(\sqrt{3}, 1)$ 、 $E(\sqrt{3}, 0)$ 、 $B(0, 0)$ ，设点 $D(\cos \theta, \sin \theta)$ ，

$$\overrightarrow{BE} = (\sqrt{3}, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (\cos \theta - \sqrt{3}, \sin \theta - 1),$$

所以， $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \sqrt{3}(\cos \theta - \sqrt{3}) \geq -\sqrt{3} - 3$ ，当且仅当 $\cos \theta = -1$ 时，等号成立，

因此， $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE}$ 的最小值为 $-\sqrt{3} - 3$ 。

故答案为： $-\sqrt{3} - 3$ 。

三、解答题（每小题 15 分，共 60 分）

16. 【答案】（1）证明见解析

$$(2) -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(3) t = \pm \frac{1}{2}$$

【解析】

【分析】（1）根据向量共线得 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ ，列方程组解出 x ，再利用向量垂直的坐标表示证明即可；

（2）利用 $\cos \langle \vec{a}, \vec{c} - \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{c} - \vec{b}|}$ 及向量数量积和模长的坐标表示求解即可；

（3）利用向量数量积的运算律求解即可。

【小问 1 详解】

因为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，所以 $\vec{a} = \lambda \vec{b} (\lambda \neq 0)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} 1 = \lambda x \\ 2 = 4\lambda \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases},$$

所以 $\vec{b} = (2, 4)$ ， $\vec{c} = (4, -2)$ ，

因为 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \times 4 + 2 \times (-2) = 0$ ，

所以 $\vec{a} \perp \vec{c}$ 。

【小问 2 详解】

由 (1) 得 $\vec{c}-\vec{b}=(2,-6)$,

$$\text{所以 } \cos \langle \vec{a}, \vec{c}-\vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{c}-\vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{c}-\vec{b}|} = \frac{1 \times 2 + 2 \times (-6)}{\sqrt{1^2 + 2^2} \times \sqrt{2^2 + (-6)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}-\vec{b}$ 夹角的余弦值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【小问 3 详解】

因为 $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 1^2 + 2^2 = 5$, $\vec{c}^2 = |\vec{c}|^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$,

所以 $|\vec{a} + t\vec{c}|^2 = \vec{a}^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{c} + t^2\vec{c}^2 = 5 + 20t^2 = 10$, 解得 $t = \pm \frac{1}{2}$.

17. 【答案】(1) $\tan 2\alpha = -\sqrt{3}$, $f(\alpha) = 0$

(2) π

(3) $-\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 先根据三角函数的定义分别求得 $\sin \alpha$ 、 $\cos \alpha$ 和 $\tan \alpha$, 再代入二倍角公式分别计算 $\tan 2\alpha$ 和 $f(\alpha)$ 的值即可;

(2) 先利用半角公式和辅助角公式将 $f(x)$ 化简, 判断其 ω 的值, 从而求得最小正周期;

(3) 先由 x 的范围求得 $2x + \frac{\pi}{3}$ 的范围, 再根据正弦函数的图像判断值域即可.

【小问 1 详解】

因为点 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 在角 α 的终边上,

$$\text{所以 } \sin \alpha = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = -\frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan \alpha = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{则 } \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = -\sqrt{3},$$

$$f(\alpha) = \sin 2\alpha - 2\sqrt{3} \sin^2 \alpha + \sqrt{3}$$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha - 2\sqrt{3} \sin^2 \alpha + \sqrt{3} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{3} = 0$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin 2x - 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sqrt{3} \\
 &= \sin 2x + \sqrt{3}(1 - 2\sin^2 x) \\
 &= \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \\
 &= 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) \\
 &= 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)
 \end{aligned}$$

所以 $\omega = 2$,

则函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

【小问 3 详解】

因为 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

所以 $2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$,

所以 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$,

所以 $f(x) \in [-\sqrt{3}, 2]$,

即函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{3}$.

18. 【答案】(1) $\frac{\sqrt{7}}{4}$; (2) $\frac{15\sqrt{7}}{4}$

【解析】

【分析】

选择条件①,

(1) 根据同角三角函数关系求出 $\sin B, \sin C$, 再由 $\sin A = \sin(B+C)$ 根据和的正弦公式即可求出;

(2) 由正弦定理求出 a , 即可由面积公式求出;

选择条件②,

(1) 根据同角三角函数关系求出 $\sin B$, 由正弦定理即可求出 $\sin A$;

(2) 由余弦定理求出 c , 即可由面积公式求出.

【详解】选择条件①,

$$(1) \because \cos B = \frac{9}{16}, \therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{16},$$

$$\because \cos C = \frac{1}{8}, \therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{3\sqrt{7}}{8},$$

$$\therefore \sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = \frac{5\sqrt{7}}{16} \times \frac{1}{8} + \frac{9}{16} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4};$$

(2) 由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

$$\therefore a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{5 \times \frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{5\sqrt{7}}{16}} = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4};$$

选择条件②,

(1) $\because \cos B = \frac{9}{16}, \therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{16},$

由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B},$

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{4 \times \frac{5\sqrt{7}}{16}}{5} = \frac{\sqrt{7}}{4};$$

(2) 由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$

即 $25 = 16 + c^2 - 2 \times 4c \times \frac{9}{16},$ 解得 $c = -\frac{3}{2}$ (舍去) 或 $c = 6,$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

【点睛】本题考查正余弦定理和面积公式的应用, 解题的关键是正确应用正余弦定理, 正确计算.

19. 【答案】(1) 2; (2) $\sqrt{15}.$

【解析】

【分析】(1) 利用三角恒等变换的公式和正弦定理化简已知即得解;

(2) 利用向量知识得到 $b = 2, a = 4,$ 再求出 $\sin C$ 的值即得解.

【小问 1 详解】

解: 由 $\frac{b}{c} = \frac{\cos B}{2 - \cos C}$ 得 $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\cos B}{2 - \cos C},$ 故 $\sin(B+C) = 2 \sin B,$

所以 $\sin(\pi - A) = 2 \sin B, \therefore \sin A = 2 \sin B,$

所以 $\frac{\sin A}{\sin B} = 2,$ 由正弦定理得 $\frac{a}{b} = 2.$

【小问 2 详解】

解: 因为 CD 为 AB 边上的中线, 所以 $2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB},$

$$\text{所以 } 4\overrightarrow{CD}^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB},$$

$$\text{所以 } 4CD^2 = b^2 + a^2 + 2b \cdot a \cdot \cos \angle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} >,$$

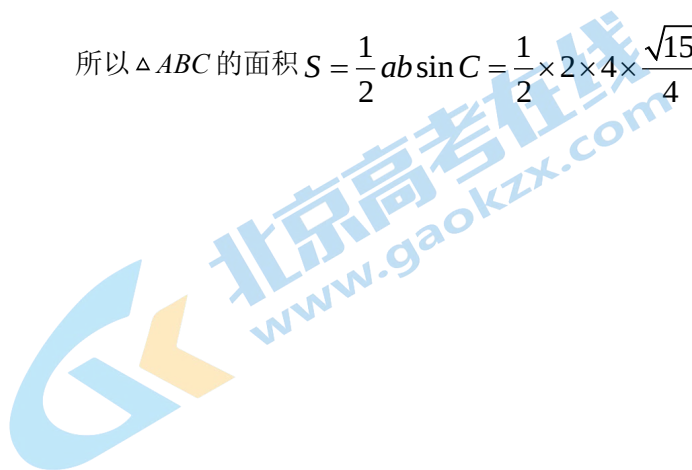
$$\text{所以 } 24 = b^2 + a^2 + 2ab \cos C,$$

$$\text{即 } 24 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \frac{1}{4},$$

$$\text{因为 } a = 2b, \text{ 解得 } b = 2, \quad a = 4,$$

$$\text{又 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}.$$



关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯