

2023 北京一六一中高 二 3 月月考

数 学

2023.3

本试卷共 2 页，共 120 分.考试时长 90 分钟.考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效.

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{2n+1}{n} (n \in N^*)$ ，则数列 $\{a_n\}$ 为 ()

- A. 递增数列 B. 递减数列 C. 常数列 D. 无法确定数列的增减性

2. 在 5 道试题中有 2 道代数题和 3 道几何题，每次从中抽出 1 道题，抽出的题不再放回，则在第 1 次抽到代数题的条件下，第 2 次抽到几何题的概率为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ， $\frac{a_6}{a_5}=2$ ，则公差 d 的值为

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{4}$

4. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_n - S_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$ ，且 $S_2 = 3$ ，则 a_1 的值为 ()

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 5

5. 从某地区的儿童中挑选体操学员，已知儿童体型合格的概率为 $\frac{1}{5}$ ，身体关节构造合格的概率为 $\frac{1}{4}$ ，从中任挑一儿童，这两项至少有一项合格的概率是 (假定体型与身体关节构造合格与否相互之间没有影响) ()

- A. $\frac{13}{20}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

6. 已知离散型随机变量 X 服从二项分布 $X \sim B(6, p)$ ，且 $E(X) = 1$ ，则 $D(X) =$

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

7. 下列说法中错误的是 ()

A. 残差的平方和可用来判断模型拟合的效果

B. 设有一个回归方程 $y = 3 - 5x$ ，自变量 x 增加 1 个单位时，因变量 y 平均增加 5 个单位

C. 线性回归直线 $y = \hat{b}x + a$ 必过点 $(\bar{x}, \bar{y})$

D. 在一个 2×2 列联表中，由计算得 $K^2 = 13.079$ (其中 $P(K^2 \geq 10.828) = 0.001$)，则有 99% 的把握确认

这两个变量间有关系

8. 随机变量 ξ 的分布列是

ξ	2	3	4
p	a	$\frac{1}{4}$	b

若 $E(\xi) = \frac{11}{4}$ ，则随机变量 2ξ 的方差 $D(2\xi)$ 的值为 ()

- A. $\frac{11}{16}$ B. $\frac{11}{8}$ C. $\frac{11}{4}$ D. $\frac{11}{2}$

9. 1766 年，德国有一位名叫提丢斯的中学数学老师，把数列 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 经过一定的规律变化，得到新数列：0.4, 0.7, 1, 1.6, 2.8, 5.2, 10,，科学家发现，新数列的各项恰好为太阳系行星与太阳的平均距离，并据此发现了“天王星”、“谷神星”等行星，这个新数列就是著名的“提丢斯-波得定则”。根据规律，新数列的第 8 项为 ()

- A. 14.8 B. 19.2 C. 19.6 D. 20.4

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则“ $\{a_n\}$ 是等差数列”是“ $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

二、填空题：本大题共 5 小题，共 25 分。把答案填在答题纸中相应的横线上。

11. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$ ， $P(\xi \leq 4) = 0.8$ ，则 $P(\xi \leq -2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 投篮测试中，每人投篮 3 次，已知某同学每次投篮投中的概率为 0.6，且各次投篮是否投中相互独立，则该同学恰好投中 2 次的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $a_1 = 2$ ， $S_4 = 26$ ，则 $a_4 + a_5 + a_6$ 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 甲、乙两个箱子里各装有 5 个大小形状都相同的球，其中甲箱中有 3 个红球和 2 个白球，乙箱中有 2 个红球和 3 个白球。先从甲箱中随机取出一球放入乙箱中，再从乙箱中随机取出一球，则取出的球是红球的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

15. 函数 $f(x)$ 的部分对应值如下表所示，对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，点 (a_n, a_{n+1}) 都在函数 $f(x)$ 的图像上。已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 1$ ，则 a_2 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ， a_{2021} 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	1	2	4

三、解答题：本大题共 4 小题，共 55 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。请在答

题纸中相应的位置上作答.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_{10} = 16$, $a_8 = 10$.

(1) 判断 2024 是否是数列 $\{a_n\}$ 中的项, 并说明理由;

(2) 求 S_n 的最值.

17. 甲、乙两人进行射击比赛, 各射击 4 局, 每局射击 10 次, 射击命中目标得 1 分, 未命中目标得 0 分, 两人 4 局的得分情况如下:

甲	6	6	9	9
乙	7	9	x	y

(1) 若从甲的 4 局比赛中, 随机选取 2 局, 求这 2 局的得分恰好相等的概率.

(2) 如果 $x = y = 7$, 从甲、乙两人的 4 局比赛中随机各选取 1 局, 记这 2 局的得分和为 X , 求 X 的分布列和数学期望.

(3) 在 4 局比赛中, 若甲、乙两人的平均得分相同, 且乙的发挥更稳定, 写出 x 的所有可能取值. (结论不要求证明)

18. 在考察疫情防控工作中, 某区卫生防控中心提出了“要坚持开展爱国卫生运动, 从人居环境改善、饮食习惯、社会心理健康、公共卫生设施等多个方面开展, 特别是要坚决杜绝食用野生动物的陋习, 提倡文明健康、绿色环保的生活方式”的要求. 某小组通过问卷调查, 随机收集了该区居民六类日常生活习惯的有关数据. 六类习惯是: (1) 卫生习惯状况类; (2) 垃圾处理状况类; (3) 体育锻炼状况类; (4) 心理健康状况类; (5) 膳食合理状况类; (6) 作息规律状况类. 经过数据整理, 得到下表:

	卫生习惯状况类	垃圾处理状况类	体育锻炼状况类	心理健康状况类	膳食合理状况类	作息规律状况类
有效答卷份数	380	550	330	410	400	430
习惯良好频率	0.6	0.9	0.8	0.7	0.65	0.6

假设每份调查问卷只调查上述六类状况之一, 各类调查是否达到良好标准相互独立.

(1) 从小组收集的有效答卷中随机选取 1 份, 求这份试卷的调查结果是在膳食合理状况类中习惯良好者的概率;

(2) 从该区任选一位居民, 试估计他在“卫生习惯状况类、体育锻炼状况类、膳食合理状况类”三类习惯方面, 至少具备两类良好习惯的概率;

(3) 利用上述六类习惯调查的排序, 用“ $\xi_k = 1$ ”表示任选一位第 k 类受访者是习惯良好者, “ $\xi_k = 0$ ”表示任选一位第 k 类受访者不是习惯良好者 ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). 写出方差 $D\xi_1$, $D\xi_2$, $D\xi_3$, $D\xi_4$, $D\xi_5$,

$D\xi_6$ 的大小关系.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的无穷数列, 该数列前 n 项的最大值记为 A_n , 第 n 项之后各项 $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ 的最小值记为 B_n , $d_n = A_n - B_n$.

(1) 若 $\{a_n\}$ 为 2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3..., 是一个周期为 4 的数列(即对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+4} = a_n$), 写出 d_1, d_2, d_3, d_4 的值;

(2) 设 d 为非负整数, 证明: $d_n = -d (n=1, 2, 3, \dots)$ 的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 为公差为 d 的等差数列;

(3) 证明: 若 $a_1 = 2$, $d_n = 1 (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 $\{a_n\}$ 的项只能是 1 或 2, 且有无穷多项为 1.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，

1. 【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，化简 $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} < 0$ ，得到 $a_n < a_{n-1}$ ，即可求解.

【详解】由题意，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{2n+1}{n} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，

可得 $a_n - a_{n-1} = 2 + \frac{1}{n} - 2 - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} < 0 (n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n \geq 2)$ ，

所以 $a_n < a_{n-1}$ ，即数列 $\{a_n\}$ 为递减数列.

故选：B.

2. 【答案】D

【解析】

【分析】设事件 A ：第 1 次抽到代数题，事件 B ：第 2 次抽到几何题，分别求得 $P(A)$ ， $P(AB)$ ，代入条件概率公式，即可得答案.

【详解】设事件 A ：第 1 次抽到代数题，事件 B ：第 2 次抽到几何题，

则 $P(A) = \frac{2}{5}$ ， $P(AB) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ ，

所以 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4}$.

故选：D

3. 【答案】A

【解析】

【分析】直接利用等差数列的通项公式代入可列出关于公差 d 的方程，求解即可.

【详解】 $\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ， $\frac{a_6}{a_5} = 2$ ，

$\therefore a_6 = 2a_5$ ， $\therefore 1 + 5d = 2(1 + 4d)$

$\therefore d = -\frac{1}{3}$ ，故选 A.

【点睛】本题主要考查了等差数列的通项公式的简单应用是，属于基础试题.

4. 【答案】A

【解析】

【分析】先由 $S_n - S_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$ 求出 $a_2 = 3$ ，再将 a_2 代入 $S_2 = 3$ 求 a_1 。

【详解】 $S_n - S_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$ ，则 $a_n = 2n - 1 (n \geq 2) \therefore a_2 = 3$ 。

$S_2 = a_1 + a_2 = 3, \therefore a_1 = 0$ 。选 A。

【点睛】注意递推关系中 $n \geq 2$ 这个条件，避免由 $a_n = 2n - 1$ 求 a_1 导致失误。

5. 【答案】B

【解析】

【分析】

先写出事件“从中任挑一儿童，这两项至少有一项合格”的对立事件，然后再根据相互独立事件同时发生的概率公式求出其概率，最后根据对立事件的概率公式即可算出。

【详解】设事件 A：“从中任挑一儿童，这两项至少有一项合格”，则其对立事件 B：“从中任挑一儿童，这两项都不合格”，由题可知，儿童体型不合格的概率为 $\frac{4}{5}$ ，身体关节构造不合格的概率为 $\frac{3}{4}$ ，所以

$$P(B) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}, \text{ 故 } P(A) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

故选：B。

【点睛】本题主要考查对立事件的概率公式和相互独立事件同时发生的概率公式的应用，属于基础题。

6. 【答案】D

【解析】

【分析】利用二项分布期望公式 $E(X) = 6p$ 求出 p ，再由方差公式 $D(X) = 6p(1-p)$ 可计算出答案。

【详解】由于离散型随机变量 X 服从二项分布 $X \sim B(6, p)$ ，则 $E(X) = 6p = 1$ ，所以， $p = \frac{1}{6}$ ，

因此， $D(X) = 6p(1-p) = 6 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$ ，故选 D。

【点睛】本题考查二项分布期望与方差公式的应用，灵活运用二项分布的期望和方差公式是解本题的关键，意在考查学生对这些知识的理解和掌握情况，属于中等题。

7. 【答案】B

【解析】

【分析】利用残差平方和与模型拟合效果的关系可判断 A 选项；利用回归直线方程的概念可判断 BC 选项；利用独立性检验的基本思想可判断 D 选项。

【详解】对于 A 选项，残差的平方和可用来判断模型拟合的效果，残差越小，模型的拟合效果越好，A 对；

对于 B 选项，设有一个回归方程 $y = 3 - 5x$ ，自变量 x 增加 1 个单位时，因变量 y 平均减少 5 个单位，B 错；

对于 C 选项，线性回归直线 $y = \hat{b}x + a$ 必过点 $(\bar{x}, \bar{y})$ ，C 对；

对于 D 选项, 在一个 2×2 列联表中, 由计算得 $K^2 = 13.079$ (其中 $P(K^2 \geq 10.828) = 0.001$),

则有 99% 的把握确认这两个变量间有关系, D 对.

故选: B.

8. 【答案】C

【解析】

【分析】由分布列可得 $a+b=\frac{3}{4}$, 由 $E(\xi)=\frac{11}{4}$, 可得 $a+2b=1$, 可解得 a, b , 然后由方差的计算公式求出 $D(\xi)$. 再根据公式求 $D(2\xi)$.

【详解】由概率之和为 1, 有 $a+b=\frac{3}{4}$,

又 $E(\xi)=2a+\frac{3}{4}+4b=\frac{11}{4}$, 即 $a+2b=1$, 可得 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$

所以 $D(\xi)=\left(\frac{11}{4}-2\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{11}{4}-3\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{11}{4}-4\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{16}$

所以 $D(2\xi)=2^2 D(\xi)=4 \times \frac{11}{16} = \frac{11}{4}$

故选: C

【点睛】本题考查随机变量的分布列和期望求相应的概率值和求方差, 属于中档题.

9. 【答案】C

【解析】

【分析】

0, 3, 6, 12, 24, 48, 96 的规律是从第三项起, 每一项是前一项的两倍, 故该数列的第 8 项是 192,

0.4, 0.7, 1, 1.6, 2.8, 5.2, 10, 的规律是原数列的每一项加 4, 再除以 10, 计算即可.

【详解】规律是将原数列的每一项加 4, 再除以 10, 故第 8 项为 19.6,

故选: C.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】根据等差数列的定义证明求解.

【详解】首先证“充分条件”: 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

所以 $\frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d$,

所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \left(a_1 + \frac{n}{2}d\right) - \left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right) = \frac{d}{2} = \text{常数},$

所以 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列.

证“必要条件”因为 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 是等差数列，所以设数列 $\{\frac{S_n}{n}\}$ 的公差为 t ，

则 $\frac{S_n}{n} = a_1 + (n-1)t$ ，所以 $S_n = na_1 + n(n-1)t$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = na_1 + n(n-1)t - (n-1)a_1 - (n-1)(n-2)t$ ，

所以 $a_n = a_1 + 2(n-1)t$ ，当 $n=1$ 时满足。

所以 $a_{n+1} - a_n = a_1 + 2nt - a_1 - 2(n-1)t = 2t = \text{常数}$ ，

所以 $\{a_n\}$ 是等差数列。

故选 C。

【点睛】本题考查等差数列的证明和充要条件的判断，属于中档题。

二、填空题：本大题共 5 小题，共 25 分。把答案填在答题纸中相应的横线上。

11. 【答案】0.2 或 $\frac{1}{5}$

【解析】

【分析】求出 $P(\xi \geq 4)$ 的值，利用正态密度曲线的对称性可求得 $P(\xi \leq -2)$ 的值。

【详解】因为知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$ ， $P(\xi \leq 4) = 0.8$ ，则

$$P(\xi \geq 4) = 1 - P(\xi \leq 4) = 0.2,$$

$$\text{因此, } P(\xi \leq -2) = P(\xi \geq 4) = 0.2.$$

故答案为：0.2。

12. 【答案】0.432

【解析】

【分析】根据题意，直接代入计算即可得到结果。

【详解】由题意可得，该同学恰好投中 2 次的概率为 $P = C_3^2 0.6^2 \times (1-0.6) = 0.432$ 。

故答案为：0.432

13. 【答案】42

【解析】

【分析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，根据已知条件求出 d 的值，可计算出 a_5 的值，再利用等差中项的性质可求得 $a_4 + a_5 + a_6$ 的值。

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则 $S_4 = 4a_1 + \frac{4 \times 3d}{2} = 8 + 6d = 26$ ，解得 $d = 3$ ，

$$\text{所以, } a_5 = a_1 + 4d = 2 + 4 \times 3 = 14,$$

由等差中项的性质可得 $a_4 + a_5 + a_6 = 3a_5 = 42$ 。

故答案为：42.

14. 【答案】 $\frac{13}{30}$

【解析】

【分析】根据全概率公式求解即可.

【详解】设事件 A 表示从甲箱中随机取出一红球放入乙箱中，事件 B 表示从甲箱中随机取出一白球放入乙箱中，设事件 C 表示从甲箱中随机取出一球放入乙箱中，再从乙箱中随机取出一球，则取出的球是红球，

$$\text{则有 } P(A) = \frac{3}{5}, P(C|A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2}{5}, P(C|B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|B) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{13}{30},$$

故答案为： $\frac{13}{30}$

15. 【答案】 ①. 3 ②. 3

【解析】

【分析】根据对应值表求出数列前若干项，然后由周期性可解.

【详解】由题意知 $a_{n+1} = f(a_n)$ ，又 $a_1 = 1$ ， $\therefore a_2 = f(a_1) = f(1) = 3$ ， $a_3 = f(a_2) = f(3) = 2$ ，

$a_4 = f(a_3) = f(2) = 1$ ， $\therefore \{a_n\}$ 是周期数列，周期为 3， $\therefore a_{2021} = a_{2019+2} = a_2 = 3$.

故答案为：3, 3

三、解答题：本大题共 4 小题，共 55 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 请在答题纸中相应的位置上作答.

16. 【答案】 (1) 不是，理由见解析

(2) S_n 的最小值为 -26，无最大值.

【解析】

【分析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，求出 d 的值，可得出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，然后解方程 $a_n = 2024$ ，可得出结论；

(2) 求出 S_n 的表达式，利用二次函数的基本性质可求得 S_n 的最小值.

【小问 1 详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则 $d = \frac{a_{10} - a_8}{10 - 8} = \frac{16 - 10}{2} = 3$ ，

所以， $a_n = a_8 + (n - 8)d = 10 + 3(n - 8) = 3n - 14$.

令 $a_n = 3n - 14 = 2024$ ，解得 $n = \frac{2038}{3} \notin \mathbf{N}^*$ ，

因此，2024 不是数列 $\{a_n\}$ 中的项.

【小问 2 详解】

由题意可得 $a_1 = 3 - 14 = -11$, $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(-11 + 3n - 14)n}{2} = \frac{3n^2 - 25n}{2}$,

当 $n = 4$ 时, S_n 取得最小值, 且最小值为 $S_4 = \frac{3 \times 4^2 - 25 \times 4}{2} = -26$, S_n 无最大值.

17. 【答案】(1) $\frac{1}{3}$;

(2) 见解析; (3) x 的可能值为 6, 7, 8.

【解析】

【分析】(1) 从甲的 4 局比赛中, 随机选取 2 局的情况有 $C_4^2 = 6$ 种情况, 然后分析得分情况相同的情况, 即可求出其概率;

(2) 分析出 X 的所有可能取值, 然后分别求出其概率即可求出分布列和数学期望;

(3) 由甲、乙两人的平均得分相同, 且乙的发挥更稳定, 能写出 x 的所有可能.

【小问 1 详解】

由已知可得从甲的 4 局的比赛中, 随机选取 2 局的情况有 $C_4^2 = 6$ 种,

得分恰好相等的有 2 种, 所以这 2 局的得分恰好相等的概率为 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

【小问 2 详解】

当 $x = y = 7$ 时, X 的可能取值有 13, 15, 16, 18,

所以 $P(X = 13) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_4^1 C_4^1} = \frac{3}{8}$, $P(X = 15) = \frac{C_2^1}{C_4^1 C_4^1} = \frac{1}{8}$,

$P(X = 16) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_4^1 C_4^1} = \frac{3}{8}$, $P(X = 18) = \frac{C_2^1}{C_4^1 C_4^1} = \frac{1}{8}$,

所以 X 的分布列为:

X	13	15	16	18
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X) = 13 \times \frac{3}{8} + 15 \times \frac{1}{8} + 16 \times \frac{3}{8} + 18 \times \frac{1}{8} = 15$.

【小问 3 详解】

x 的可能值为 6, 7, 8.

【点睛】求解离散型随机变量的数学期望的一般步骤为:

第一步是“判断取值”, 即判断随机变量的所有可能取值, 以及取每个值所表示的意义;

第二步是“探求概率”, 即利用排列组合, 枚举法, 概率公式 (常见的有古典概型公式、几何概率公式、

互斥事件的概率和公式、独立事件的概率积，以及对立事件的概率公式等），求出随机变量取每个值时的概率；

第三步是“写分布列”，即按规范形式写出分布列，并注意用分布列的性质检验所求的分布列或某事件的概率是否正确；

第四步是“求期望值”，一般利用离散型随机变量的数学期望的定义求期望的值.

18. 【答案】(1) 0.104 (2) 0.766 (3) $D\xi_6 = D\xi_1 > D\xi_5 > D\xi_4 > D\xi_3 > D\xi_2$

【解析】

【分析】

(1) 设“选取的试卷的调查结果是在膳食合理状况类中习惯良好者”的事件为 A ，根据古典概型求出即可；

(2) 设该区“卫生习惯状况良好者”，“体育锻炼状况良好者”，“膳食合理状况良好者”事件分别为 A ， B ， C ，设事件 E 为“该居民在“卫生习惯状况类、体育锻炼状况类、膳食合理状况类”三类习惯方面，至少具备两类良好习惯”，则 $P(E) = P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{B}C) + P(ABC)$ ，求出即可；

(3) 根据题意，写出即可.

【详解】(1) 设“选取的试卷的调查结果是在膳食合理状况类中习惯良好者”的事件为 A ，有效问卷共有 $380 + 550 + 330 + 410 + 400 + 430 = 2500$ (份)，其中受访者中膳食合理习惯良好的人数是 $400 \times 0.65 = 260$ 人，

$$\text{故 } P(A) = \frac{260}{2500} = 0.104;$$

(2) 设该区“卫生习惯状况良好者”，“体育锻炼状况良好者”，“膳食合理状况良好者”事件分别为 A ， B ， C ，

根据题意，可知 $P(A) = 0.6$ ， $P(B) = 0.8$ ， $P(C) = 0.65$ ，

设事件 E 为“该居民在“卫生习惯状况类、体育锻炼状况类、膳食合理状况类”三类习惯方面，至少具备两类良好习惯”

$$\text{则 } P(E) = P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{B}C) + P(ABC)$$

$$= P(A)P(B)P(\bar{C}) + P(A)P(\bar{B})P(C) + P(\bar{A})P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C)$$

$$= 0.6 \times 0.8 \times 0.35 + 0.6 \times 0.2 \times 0.65 + 0.4 \times 0.8 \times 0.65 + 0.6 \times 0.8 \times 0.65$$

$$= 0.168 + 0.078 + 0.208 + 0.312$$

$$= 0.766.$$

所以该居民在“卫生习惯状况类、体育锻炼状况类、膳食合理状况类”三类习惯至少具备 2 个良好习惯的概率为 0.766.

$$(3) D\xi_6 = D\xi_1 > D\xi_5 > D\xi_4 > D\xi_3 > D\xi_2.$$

【点睛】本题考查了古典概型求概率，独立性事件，互斥性事件求概率等，考查运算能力和事件应用能力，中档题.

19. 【答案】(1) $d_1 = d_2 = 1$ ， $d_3 = d_4 = 3$ ；

(2) 证明见解析; (3) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据给定的数列, 结合给定的定义计算作答.

(2) 利用充要条件的定义, 结合等差数列定义和已知推理判断作答.

(3) 根据给定的定义, 利用反证法推导 $\{a_n\}$ 中的项不能超过 2, 并且 1 不可能为有限个作答.

【小问 1 详解】

依题意, $A_1=2, B_1=1$, 则 $d_1=1$, $A_2=2, B_2=1$, 则 $d_2=1$, $A_3=4, B_3=1$, 则 $d_3=3$,
 $A_4=4, B_4=1$, 则 $d_4=3$,
所以 $d_1=d_2=1$, $d_3=d_4=3$.

【小问 2 详解】

充分性: 因为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 且 $d \geq 0$, 则 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$,

因此 $A_n = a_n, B_n = a_{n+1}$, $d_n = a_n - a_{n+1} = -d (n=1, 2, 3, \dots)$,

必要性: 因为 $d_n = -d \leq 0 (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 $A_n = B_n + d_n \leq B_n$, 又因为 $a_n \leq A_n, a_{n+1} \geq B_n$, 所以
 $a_n \leq a_{n+1}$,

于是 $A_n = a_n, B_n = a_{n+1}$,

因此, $a_{n+1} - a_n = B_n - A_n = -d_n = d$, 即 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列,

所以 $d_n = -d (n=1, 2, 3, \dots)$ 的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 为公差为 d 的等差数列.

【小问 3 详解】

因为 $a_1=2$, $d_n=1 (n=1, 2, 3, \dots)$, 则 $A_1=a_1=2$, $B_1=A_1-d_1=1$, 即对任意 $n \geq 1$, $a_n \geq B_1=1$,

假设 $\{a_n\} (n \geq 2)$ 中存在大于 2 的项,

设 m 为满足 $a_m > 2$ 的最小正整数, 则 $m \geq 2$, 并且对任意 $1 \leq k < m, a_k \leq 2$,

又因为 $a_1=2$, 则有 $A_{m-1}=2$, 且 $A_m=a_m > 2$,

于是 $B_m=A_m-d_m > 2-1=1, B_{m-1}=\min\{a_m, B_m\} \geq 2$,

因此 $d_{m-1}=A_{m-1}-B_{m-1} \leq 2-2=0$, 与 $d_{m-1}=1$ 矛盾,

从而对于任意 $n \geq 1$, 都有 $a_n \leq 2$, 即非负整数数列 $\{a_n\}$ 的各项只能为 1 或 2,

因为对任意 $n \geq 1$, $a_n \leq 2=a_1$, 于是 $A_n=2$, $B_n=A_n-d_n=2-1=1$,

假定 a_p 是无穷数列 $\{a_n\}$ 中最后一个 1, 则 $B_p=2$, 而 $A_p=2$, 于是 $d_p=A_p-B_p=0$, 矛盾,

所以数列 $\{a_n\}$ 有无穷多项为 1.

【点睛】关键点睛: 涉及数列新定义问题, 关键是正确理解给出的定义, 由给定的数列结合新定义探求数列的相关性质, 并进行合理的计算、分析、推理等方法综合解决.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯