中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 3 月测试

理科数学试卷（一卷）

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知抛物线 $C: y^2 = 2x$，则抛物线 C 的焦点到准线的距离为

A．$\dfrac{1}{4}$　　B．$\dfrac{1}{2}$　　C．1　　D．2

2．已知集合 $M=\{x|x^2-5x+4\le 0\}, N=\{x|2^x>4\}$，则

A．$M\cup N=\mathbf{R}$　　B．$M\cap N=\{x|2<x<4\}$

C．$M\cup N=\{x|x>2\}$　　D．$M\cap N=\{x|2<x\le 4\}$

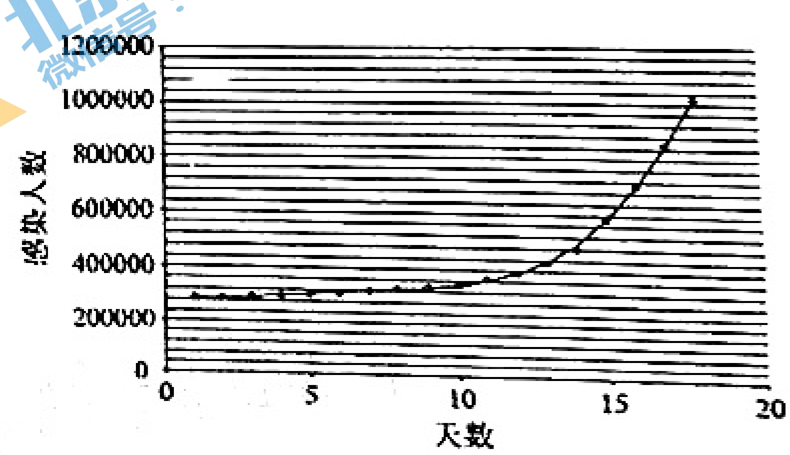
3．已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_2+a_5+a_8=15$，则 $a_3+a_7=$

A．3　　B．5　　C．7　　D．10

4．已知向量 $\overrightarrow{OA}=(-1,2),\overrightarrow{OB}=(3,m)$．若 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，则实数 m 的值为

A．$\dfrac{3}{2}$　　B．4　　C．$-\dfrac{3}{2}$　　D．-4

5．某个国家某种病毒传播的中期，感染人数 y 和时间 x（单位：天）在 18 天里的散点图如图所示，下面四个回归方程类型中最适宜作为感染人数 y 和时间 x 的回归方程类型的是



（第 5 题图）

A．$y=a+bx$　　B．$y=a+be^x$

C．$y=a+b\ln x$　　D．$y=a+b\sqrt{x}$

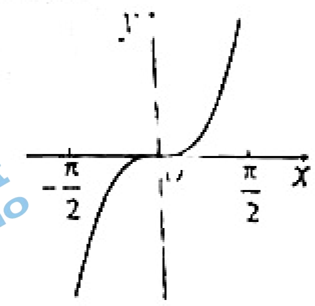
6．已知△ABC 的三个内角 A,B,C 的对边边长分别为 a,b,c，若 $2a=3b, A=2B$，则 $\cos B=$

A．$\dfrac{2}{3}$　　B．$\dfrac{3}{4}$　　C．$\dfrac{4}{5}$　　D．0

7．已知函数 $f(x)$ 的局部图象如图所示，则下列选项中可能是函数 $f(x)$ 解析式的是

A．$y=x^2\cos x$　　B．$y=x\cos x$

C．$y=x^2\sin x$　　D．$y=x\sin x$



（第 7 题图）

8．已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x\le 2,\\ x+y\ge 2,\\ x+2y\le 4,\end{cases}$ 则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最大值为

A．2　　B．$\sqrt{5}$　　C．4　　D．5

9．若 $x^4+(x+1)^7=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_7(x+2)^7$，则 $a_3=$

A．27　　B．35　　C．-8　　D．-43

10．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}-1,x\ge 0,\\ -\log_a(-x),x<0,\end{cases}$ 7>4 （$a>0$ 且 $a\ne 1$），若函数图象上关于原点对称的点至少有 3 对，则实数 a 的取值范围是

A．$\left(0,\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$　　B．$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6},1\right)$　　C．$\left(0,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$　　D．$\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},1\right)$

11．在棱长为 $4\sqrt{2}$ 的正四面体 $A-BCD$ 中，点 E,F 分别为直线 AB,CD 上的动点，点 P 为 EF 中点，Q 为正四面体中心（满足 $QA=QB=QC=QD$），若 $PQ=\sqrt{2}$，则 EF 长度为

A．$2\sqrt{6}$　　B．$\sqrt{6}$　　C．3　　D．2

12．已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=1,a^2+b^2+c^2=1$，则 $a^3+b^3+c^3$ 的最小值是

A．$\dfrac{1}{3}$　　B．$\dfrac{5}{9}$　　C．$\dfrac{7}{9}$　　D．1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\dfrac{1-i}{1+2i}$（其中 i 是虚数单位）的共轭复数为________．

14．已知函数 $f(x)=\cos x\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)-\dfrac{1}{2},x\in[0,\pi]$，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为________．

15. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦点为$F_1,F_2,P$是双曲线上一点，且$\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$．若$\triangle F_1PF_2$的外接圆和内切圆的半径分别为$R,r$，且$R=4r$，则双曲线的离心率为________.

16. 已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}$（$a>0$且$a\neq1$），$g\left(x\right)=\frac{1-x}{1+x}$．若对任意的$x\in\left[1,+\infty\right)$不等式$f\left(x\right)g\left(x-1\right)<2-f\left(x\right)$恒成立，则实数$a$的取值范围为________.

三、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答．第22、23题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共60分．

17. （12分）已知数列$\{a_n\}$的前n项和S_n，且$S_n-a_n=\left(n-1\right)^2,b_n=\frac{2^{a_n}}{S_n^{\ 2}}$．

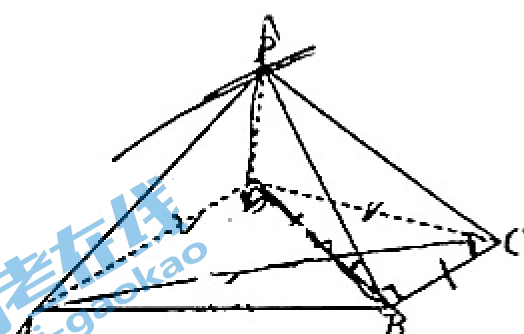
（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{b_n\}$的最小项的值．

18. （12分）如图，四棱锥$P-ABCD$中，$AD\,//\,BC$，平面$PAD\perp$平面PBC．若$\angle BCD=\frac{\pi}{3},\angle PBC=\frac{\pi}{2},AD=CD=2,BC=1$．

（1）证明：$PB\perp PA$；

（2）若$PA=2PC$，求二面角$P-BC-A$的余弦值



（第18题图）

19. （12分）袋中有大小完全相同的7个白球，3个黑球．

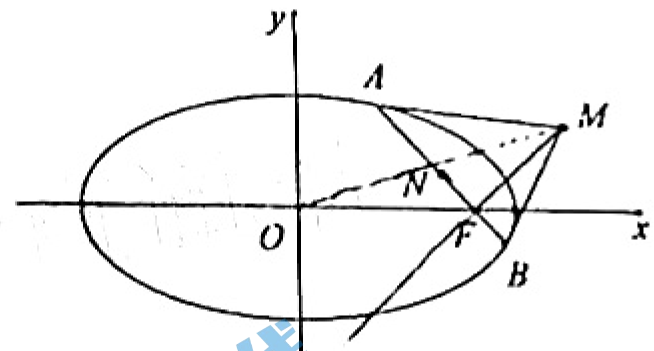
（1）若甲一次性抽取4个球，求甲至多抽到一个黑球的概率；

（2）若乙共抽取4次，每次抽取1个球，记录好球的颜色后再放回袋子中，等待下次抽取，且规定抽到白球得10分，抽到黑球得20分，求乙总得分X的分布列和数学期望．

20. （12分）如图，已知椭圆$C:\frac{x^2}{5}+y^2=1$的右焦点为F，原点为O，椭圆的动弦AB过焦点F且不垂直于坐标抽，弦AB的中点为N，椭圆C在点A,B处的两切线的交点为M．

（1）求证：O,M,N三点共线；

（2）求$\dfrac{|AB|\cdot|FM|}{|FN|}$的最小值.



（第 20 题图）

21．（12 分）已知$f(x)=\ln(x+1)-ax$在$(0,+\infty)$有零点x_0.

（1）求实数a的取值范围；

（2）求证：$2\left(\dfrac{1}{a}-1\right)<x_0<e^{\frac{1}{a}}-1$.

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．（10 分）[选修 4—4：坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系xOy中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases} x=2+\dfrac{4k}{1+k^2}, \\ y=\dfrac{2(1-k^2)}{1+k^2}, \end{cases}$（$k$为参数）．以原点$O$为极点，$x$轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C_2$的极坐标方程为$\rho=\dfrac{2}{\sqrt{3+\cos2\theta-\sin^2\theta}}$.

（1）直接写出曲线C_2的普通方程；

（2）设A是曲线C_1上的动点，B是曲线C_2上的动点，求$|AB|$的最大值.

23．（10 分）[选修 4—5：不等式选讲]

已知a,b,c均为正数，函数$f(x)=|x-a|+|x+b|+c$的最小值为 1.

（1）求$2a^2+3b^2+6c^2$的最小值；

（2）求证：$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}>\dfrac{3}{2}$.

中学生标准学术能力诊断性测试 2021 年 3 月测试

理科数学试卷（一卷）参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	D	B	B	B	C	B	A	A	A	B

二、填空题：本题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分．

13．$-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

14．$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$，$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$

15．$\frac{2}{7}\sqrt{21}$

16．$a\in(0,1)\cup(3,+\infty)$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．解：

（1）$\because a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$，$\therefore S_n-a_n=S_{n-1}$，则 $S_{n-1}=(n-1)^2(n\geq 2)$，

即 $S_n=n^2(n\in N^*)$ ……………3 分

$\therefore a_n=n^2-(n-1)^2=2n-1(n\geq 2)$ ……………5 分

经检验 $a_1=1$ 适合，$\therefore a_n=2n-1$ ……………6 分

（2）易知 $b_n>0$，$\because b_n=\frac{2^{2n-1}}{n^4}$，$b_{n-1}=\frac{2^{2n-3}}{(n-1)^4}$．

$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2^2n^4}{(n+1)^4}=\left(\frac{\sqrt{2}n}{n+1}\right)^4$ ……………8 分

当 $\frac{\sqrt{2}n}{n+1}>1$ 时，$n>\sqrt{2}+1$，

所以当$1\le n<3$时，$b_n>b_{n+1}$，当$n\ge 3$时，$b_n<b_{n+1}$……………10 分

又$b_2=\frac{1}{2},b_3=\frac{32}{81}$，所以当$n=3$时，$b_n$有最小值$\frac{32}{81}$……………12 分

18. 解：

（1）证明：设平面$PAD\cap$平面$PBC=l$，

$\because AD//BC,BC\not\subset$平面$PAD,AD\subset$平面$PAD\therefore BC//$平面$PAD$，

又$\because BC\subset$平面$PBC\therefore BC//l$……………2 分

$\because\angle PBC=\frac{\pi}{2}\therefore PB\perp BC\therefore PB\perp l$……………4 分

又因为平面$PAD\perp$平面$PBC\therefore PB\perp$平面PAD，可得$PB\perp PA$，得证。

……………6 分

（2）解：连结BD，在$\triangle BCD$中，易得$BD=\sqrt{3}\therefore BD\perp BC$，

又$\because PB\perp BC\therefore\angle PBD$为二面角$P-BC-A$的平面角……………8 分

以D为原点，分别以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}$的方向为$x$轴，$y$轴正方向，建立空间直角坐标系，

$\therefore A(2,0,0),B(0,\sqrt{3},0),C(-1,\sqrt{3},0)$，

$\because BC\perp BD,BC\perp PD,BD\cap PD=D\therefore BC\perp$平面$PBD$，

所以平面$PBD\perp$平面$ABCD$……………9 分

可设$P(0,y,z)$，由$PA=2PC$可得：

$(0-2)^2+y^2+z^2=4(0+1)^2+4(y-\sqrt{3})^2+4z^2$，

化简可得：$3y^2-8\sqrt{3}y+3z^2+12=0$…①

由（1）知$PB\perp PA\therefore(-2,y,z)\cdot(0,y-\sqrt{3},z)=0$，化简得$y^2-\sqrt{3}y+z^2=0$…②

解方程①②可得$y=\frac{4}{5}\sqrt{3},z=\frac{2}{5}\sqrt{3}$……………11 分

$\therefore\sin\angle PBD=\frac{z}{PB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则$\cos\angle PBD=\frac{\sqrt{5}}{5}$……………12 分

19. 解：

（1）甲是无放回地抽取，甲至多抽到一个黑球：基本事件{没有抽到黑球，抽到一个黑球}，

$\therefore P\{没有抽到黑球\}=\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{35}{210}=\frac{1}{6}$……………1 分

$P\{抽到一个黑球\}=\frac{C_7^3C_3^1}{C_{10}^4}=\frac{105}{210}=\frac{1}{2}$……………2 分

所以甲至多抽到一个黑球的概率为：$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$……………5 分

（2）解法一：

乙是有放回地抽取，抽到白球得 10 分，抽到黑球得 20 分，

所以抽取 4 次{4 个白球，3 个白球 1 个黑球，2 个白球 2 个黑球，1 个白球 3 个黑球，4 个黑球}，

对应的 X 取值有{40,50,60,70,80}，而每次抽到白球、黑球的概率分别为 $\frac{7}{10},\frac{3}{10}$，

设 4 次取球取得黑球次数为 r，则 r 的可能取值 0,1,2,3,4……………6 分

$\therefore P(X=40+10r)=C_4^r\left(\frac{7}{10}\right)^{4-r}\left(\frac{3}{10}\right)^r$，即可得分布列如下：

X	40	50	60	70	80
P	$\frac{2401}{10000}$	$\frac{4116}{10000}$	$\frac{2646}{10000}$	$\frac{756}{10000}$	$\frac{81}{10000}$

……………10 分

$\therefore E(X)=40\times\frac{2401}{10000}+50\times\frac{4116}{10000}+60\times\frac{2646}{10000}+70\times\frac{756}{10000}+80\times\frac{81}{10000}=52$

……………12 分

解法二：

设 4 次取球取得黑球数为 Y，则 $X=40+10Y$，且 $Y\sim B\left(4,\frac{3}{10}\right)$……………8 分

$EX=40+10EY=40+10\times4\times\frac{3}{10}=52$……………12 分

20．解：

（1）椭圆的右焦点$F(2,0)$，

设AB所在的直线的方程为$y=k(x-2)$（$k\neq 0$），且$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

……………1分

联立方程组$\begin{cases} y=k(x-2), \\ \dfrac{x^2}{5}+y^2=1, \end{cases}$ 可得：$(5k^2+1)x^2-20k^2x+(20k^2-5)=0$

……………3分

则$x_1+x_2=\dfrac{20k^2}{5k^2+1}, x_1x_2=\dfrac{20k^2-5}{5k^2+1}$，点$N$的坐标为$\left(\dfrac{10k^2}{5k^2+1},\dfrac{-2k}{5k^2+1}\right)$.

$\therefore$ ON所在的直线的方程为$y=-\dfrac{1}{5k}x$……………5分

椭圆C在A,B处的切线方程分别为$\dfrac{x_1x}{5}+y_1y=1,\dfrac{x_2x}{5}+y_2y=1$.

联立方程组$\begin{cases} \dfrac{x_1x}{5}+y_1y=1, \\ \dfrac{x_2x}{5}+y_2y=1, \end{cases}$

解得点M的坐标为$\left(\dfrac{5(y_2-y_1)}{x_1y_2-x_2y_1},\dfrac{x_1-x_2}{x_1y_2-x_2y_1}\right)$，$M\left(\dfrac{5}{2},-\dfrac{1}{2k}\right)$，

所以点M的坐标满足直线ON的方程$y=-\dfrac{1}{5k}x$，故O,M,N三点共线

……………7分

（2）由（1）可知，$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\dfrac{2\sqrt{5}(1+k^2)}{5k^2+1}$……………8分

$|FM|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\left|\dfrac{5}{2}-2\right|=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{2|k|}$……………9分

$|FN|=\sqrt{1+k^2}\left|\dfrac{10k^2}{5k^2+1}-2\right|=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}}{5k^2+1}$……………10分

$\therefore \dfrac{|AB|\cdot|FM|}{|FN|}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{k^2+1}{|k|}\geq\sqrt{5}$，

当且仅当$|k|=1$时，等号成立……………12分

21．解：

（1）$f(x)=\ln(x+1)-ax, f'(x)=\frac{1}{x+1}-a$ ……………1 分

①当 $a\le 0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x+1}-a\ge 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，

$\therefore f(x)=\ln(x+1)-ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，$\therefore f(x)>f(0)=0$，不符合题意，

……………2 分

②当 $0<a<1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x+1}-a\ge 0\Leftrightarrow 0<x\le\frac{1}{a}-1$，

$\therefore f(x)=\ln(x+1)-ax$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}-1\right)$ 上递增，在 $\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 上递减，

$\because f\left(\frac{1}{a}-1\right)>f(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，满足题意……………4 分

③当 $a\ge 1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x+1}-a<0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，

$\therefore f(x)=\ln(x+1)-ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减，$\therefore f(x)<f(0)=0$，不符合题意．

……………6 分

综上所述，a 的取值范围是 $(0,1)$．

（2）由（1）知 $0<a<1$，$\therefore a=\frac{\ln(x_0+1)}{x_0}$，

要证明 $x_0>2\left(\frac{1}{a}-1\right)$，只要证明 $\ln(x_0+1)>\frac{2x_0}{x_0+2}$ ……………7 分

设 $g(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}, x>0$，

$g'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}\ge 0$，

$g(x)=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+2}>g(0)=0$，即 $x_0>2\left(\frac{1}{a}-1\right)$……………9 分

另一方面：证法一：要证明 $x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$，只要证明 $\ln(x_0+1) < \frac{1}{a}$，

即证明 $\ln(x_0+1) < \frac{x_0}{\ln(x_0+1)}$ ……………10 分

$\because \ln(x_0+1) > 0$，即证 $\ln(x_0+1) < \sqrt{x_0}$．

设 $h(x) = \ln(x+1) - \sqrt{x}, x > 0$．

则 $h'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$，

所以当 $x > 0$ 时，$h(x) < h(0) = 0$，即 $x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$ ……………12 分

证法二：因为在 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}-1, +\infty\right)$ 上递减，且 $e^{\frac{1}{a}} - 1 > \frac{1}{a} - 1, x_0 > \frac{1}{a} - 1$，

要证明 $x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$，只要证明 $f(x_0) > f\left(e^{\frac{1}{a}} - 1\right)$，即证 $\frac{1}{a} - ae^{\frac{1}{a}} + a < 0$

……………10 分

设 $\varphi(x) = \frac{x^2+1}{e^x}, x > 1, \varphi'(x) = \frac{-(x-1)^2}{e^x} < 0$，

$\therefore \varphi(x) = \frac{x^2+1}{e^x} < \varphi(1) = \frac{2}{e} < 1$，

所以当 $x > 1$ 时，$e^x > x^2 + 1$，

即当 $0 < a < 1$ 时，$e^{\frac{1}{a}} > \frac{1}{a^2} + 1$，

$\therefore x_0 < e^{\frac{1}{a}} - 1$ ……………12 分

（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题．作答如果多做，则按所做的第一题计分．

22．解：

（1）曲线 C_2 的普通方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ……………2 分

(2) 由曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{4k}{1+k^2}, \\ y=\dfrac{2\left(1-k^2\right)}{1+k^2}, \end{cases}$ (k 为参数)，

得曲线 C_1 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，

它是一个以 $C(2,0)$ 为圆心，半径等于 2 的圆，

……………4 分

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{3+\cos 2\theta-\sin^2\theta}}$，

$\therefore \rho^2(3+\cos 2\theta-\sin^2\theta)=4$，可得 $4x^2+y^2=4$ ……………6 分

则曲线 C_2 的参数方程为：$\begin{cases} x=\cos\beta, \\ y=2\sin\beta, \end{cases}$ (β 为参数)，

$\because$ A 是曲线 C_1 上的点，B 是曲线 C_2 上的点，$\therefore |AB|_{max}=|BC|_{max}+2$

……………8 分

设 $B(\cos\beta,2\sin\beta)$，则 $|BC|=\sqrt{(\cos\beta-2)^2+4\sin^2\beta}=\sqrt{-3\cos^2\beta-4\cos\beta+8}$

$=\sqrt{-3\left(\cos\beta+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{28}{3}}$，

当 $\cos\beta=-\dfrac{2}{3}$ 时，$|BC|_{max}=\sqrt{\dfrac{28}{3}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，$\therefore |AB|_{max}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}+2$ ……………10 分

23. 解：

(1) $f(x)=|x-a|+|x+b|+c\ge|x-a-x-b|+c=|a+b|+c=a+b+c=1$

……………2 分

$\therefore \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)(2a^2+3b^2+6c^2)\ge\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{2}a+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}b+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{6}c\right)^2=1$，

$\therefore 2a^2+3b^2+6c^2\ge1$，即 $2a^2+3b^2+6c^2$ 的最小值为 1……………5 分

(2) $\because \sqrt{a^2+ab+b^2}=\sqrt{\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{\sqrt{3}b}{2}\right)$……………7 分

$$\therefore \sqrt{b^2+bc+c^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(b+\frac{c}{2}+\frac{\sqrt{3}c}{2}\right), \sqrt{c^2+ca+a^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(c+\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}a}{2}\right).$$

因此 $\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a+b+c+\frac{a+b+c}{2}+\frac{a+b+c}{2}\times\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>\frac{3}{2}$$ ……10分