

北京市西城区 2017 — 2018 学年度第二学期期末试卷

高一数学 2018.7

试卷满分：150 分 考试时间：120 分钟

A 卷[立体几何初步与解析几何初步]

本卷满分：100 分

题号	一	二	三			本卷总分
			17	18	19	
分数						

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

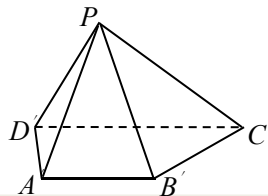
1. $M(-1,2)$, $N(3,0)$ 两点之间的距离为 ()			
(A) $2\sqrt{2}$	(B) 4	(C) $2\sqrt{5}$	(D) 5
2. 直线 $x - y - \sqrt{3} = 0$ 的倾斜角为 ()			
(A) 45°	(B) 60°	(C) 120°	(D) 135°
3. 直线 $y = 2x - 2$ 与直线 l 关于 y 轴对称，则直线 l 的方程为 ()			
(A) $y = -2x + 2$	(B) $y = -2x - 2$	(C) $y = 2x + 2$	(D) $y = \frac{1}{2}x - 1$
4. 已知圆 $M: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $N: (x-2)^2 + y^2 = 9$ ，则两圆的位置关系是 ()			
(A) 相交	(B) 相离	(C) 内切	(D) 外切
5. 设 m, n 为两条不重合的直线， α, β 为两个不重合的平面， m, n 既不在 α 内，也不在 β 内。则下列结论正确的是 ()			
(A) 若 $m \parallel \alpha$, $n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel n$		(B) 若 $m \parallel n$, $n \parallel \alpha$, 则 $m \parallel \alpha$	
(C) 若 $m \perp \alpha$, $n \perp \alpha$, 则 $m \perp n$		(D) 若 $m \perp \alpha$, $m \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$	
6. 若方程 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5k = 0$ 表示圆，则实数 k 的取值范围是 ()			
(A) $(-\infty, 1)$	(B) $(-\infty, 1]$	(C) $[1, +\infty)$	(D) \mathbf{R}
7. 圆柱的侧面展开图是一个边长为 2 的正方形，那么这个圆柱的体积是 ()			
(A) $\frac{2}{\pi}$	(B) $\frac{1}{\pi}$	(C) $\frac{2}{\pi^2}$	(D) $\frac{1}{\pi^2}$
8. 方程 $x = \sqrt{1 - y^2}$ 表示的图形是 ()			

(A) 两个半圆	(B) 两个圆	(C) 圆	(D) 半圆
----------	---------	-------	--------

9.如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是梯形, $AB \parallel CD$,

若平面 $PAD \perp$ 平面 $PBC=l$,则()

- (A) $l \parallel CD$ (B) $l \parallel BC$
(C) l 与直线 AB 相交 (D) l 与直线 AD 相交



10.已知 a, b 是异面直线.给出下列结论:

- ① 一定存在平面 α ,使直线 $b \perp$ 平面 α ,直线 $a \parallel$ 平面 α ;
② 一定存在平面 α ,使直线 $b \parallel$ 平面 α ,直线 $a \parallel$ 平面 α ;
③ 一定存在无数个平面 α ,使直线 b 与平面 α 交于一个定点,且直线 $a \parallel$ 平面 α .

则所有正确结论的序号为()

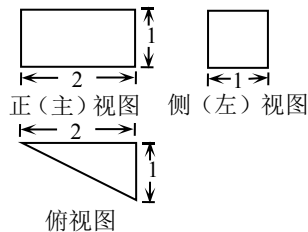
(A) ①②	(B) ②	(C) ②③	(D) ③
--------	-------	--------	-------

二、填空题:本大题共6小题,每小题4分,共24分.把答案填在题中横线上.

11.已知点 $A(m, -2)$, $B(3, 0)$,若直线 AB 的斜率为 $\frac{1}{2}$,则 $m =$ _____.

12.若直线 $l_1: ax + 2y - 8 = 0$ 与直线 $l_2: x - y = 0$ 平行,
则 $a =$ _____.

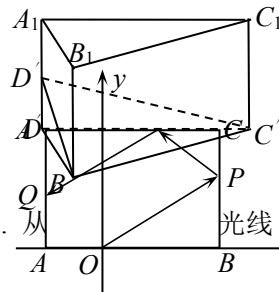
13.已知某三棱柱的三视图如图所示,那么该三棱柱
最大侧面的面积为_____.



14.已知直线 $y = kx + k$ 过定点,则定点的坐标为_____.

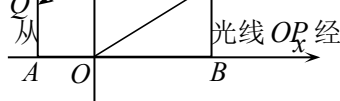
15.在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D 为 AA_1 中点,点 P 在侧面 BCC_1B_1 上运动,当点 P 满足
条件_____时, $A_1P \parallel$ 平面 BCD .

(答案不唯一,填一个满足题意的条件即可)



16.如图,矩形 $ABCD$ 中 AB 边与 x 轴重合, $C(2, 2)$, $D(-1, 2)$.
 BC 反射到 CD 上,再经 CD 反射到 AD 上点 Q 处.

- ①若 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$,则点 Q 的纵坐标为_____;
②若点 Q 恰为线段 AD 中点,则 OP 的斜率为_____.

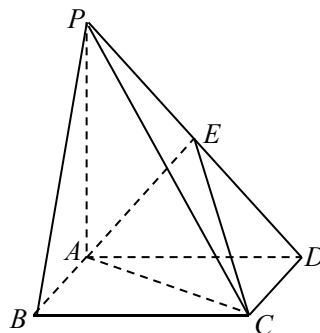


三、解答题：本大题共 3 小题，共 36 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PA = AD = 2$ ，点 E 为线段 PD 的中点.

- (I) 求证： $PB \parallel$ 平面 AEC ；
- (II) 求证： $AE \perp$ 平面 PCD ；
- (III) 求三棱锥 $A-PCE$ 的体积.



18. (本小题满分 12 分)

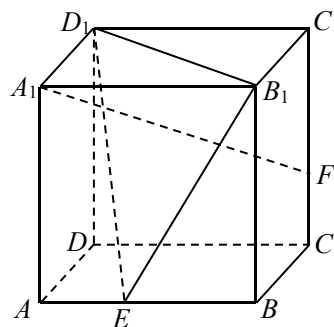
已知直线 $l: y = -x + 8$ 与 x 轴相交于点 A ，点 B 坐标为 $(0, -4)$ ，过点 B 作直线 l 的垂线，交直线 l 于点 C . 记过 A 、 B 、 C 三点的圆为圆 M .

- (I) 求圆 M 的方程；
- (II) 求过点 C 与圆 M 相交所得弦长为 8 的直线方程.

19. (本小题满分 12 分)

如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 E 是棱 AB 上的动点， F 是棱 CC_1 上一点， $CF:FC_1 = 1:2$.

- (I) 求证： $B_1D_1 \perp A_1F$ ；
- (II) 若直线 $A_1F \perp$ 平面 B_1D_1E ，试确定点 E 的位置，并证明你的结论；
- (III) 设点 P 在正方体的上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上运动，求总能使 BP 与 A_1F 垂直的点 P 所形成的轨迹的长度。（直接写出答案）



B 卷 [学期综合]本卷满分：50 分

题号	一	二			本卷总分
		6	7	8	
分数					

一、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.把答案填在题中横线上.

1. 在区间 $[-2,4]$ 内随机选取一个实数 x ，则 $x \in [1,3]$ 的概率为_____.

2. 如图所示，茎叶图记录了甲、乙两组各四名工人 1 天加工的零件数，且甲、乙两组工人平均每人加工零件的个数相同，则 $m =$ _____；甲、乙两组工人加工零件数方差较大的一组的方差为_____.

甲			乙	
9	8		1	9
2	1		2	0 0 m

3. 从 1,2,3,4 这四个数中一次随机选取两个数，所取两个数之和不小于 5 的概率为_____.

4. 一艘货船以 15 km/h 的速度向东航行，货船在 A 处看到一个灯塔 P 在北偏东 60° 方向上，行驶 4 小时后，货船到达 B 处，此时看到灯塔 P 在北偏东 15° 方向上，这时船与灯塔的距离为_____ km .

5. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $\triangle ABC$ 面积 S 满足 $1 \leq S \leq 2$ ，且 $\sin A \sin B \sin C = \frac{1}{8}$. 给出下列结论：

- ① $abc \geq 16$ ； ② $a^2b + ab^2 > 8$ ； ③ $ab < 32$ ；

其中正确结论的序号是_____。（写出所有正确结论的序号）

二、解答题：本大题共 3 小题，共 30 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

6. (本小题满分 8 分)

分组	频数	频率
(40,50]	2	0.02
(50,60]	3	0.03

专注北京高考升学

在某地区高二年级的一次英语口语测试中，随机抽取 M 名同学的成绩，数据的分组统计表如下：

(60,70]	12	0.12
(70,80]	38	0.38
(80,90]	m	n
(90,100]	15	0.15
合计	M	N

(I) 求出表中 m, n, M, N 的值；

(II) 根据上表，请在答题纸中给出的坐标系中完整画出频率分布直方图；

(III) 若该地区高二年级学生有 5000 人，假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，试估计这次测试中该地区高二年级学生的平均分及分数在区间 $(60, 90]$ 内的学生人数。

7. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . $b = \sqrt{5}$, $B = \frac{\pi}{4}$.

(I) 若 $a = 3$ ，求 $\sin A$ 及 $\sin C$ 的值；

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积等于 1，求 a 的值。

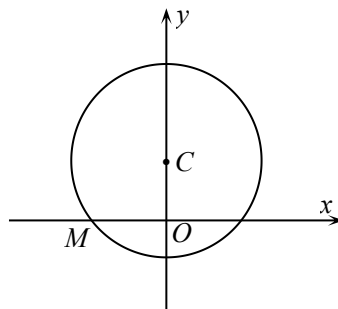
8. (本小题满分 12 分)

已知圆 $C: x^2 + (y-3)^2 = 25$ 与 x 轴的负半轴相交于点 M .

(I) 求点 M 的坐标及过点 M 与圆 C 相切的直线方程；

(II) 一般把各边都和圆相切的三角形叫做圆的外切三角形. 记圆 C 的外切三角形为 $\triangle DEF$ ，且 $D(-5, -2)$ ， $E(t, -2)(t > 5)$. 试用 t 表示 $\triangle DEF$ 的面积；

(III) 过点 M 作 MA, MB 分别与圆相交于点 A, B ，且直线 MA, MB 关于 x 轴对称，试问直线 AB 的斜率是否为定值？若是，请求出这个值；若不是，请说明理由。



北京市西城区 2017— 2018 学年度第二学期期末试卷

高一数学参考答案及评分标准 2018.7

A 卷[立体几何初步与解析几何初步] 满分 100 分

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

- 1. C 2. A 3. B 4. C 5. B 6. A 7. A 8. D 9. D 10. C.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

- 11. -1 12. -2 13. $\sqrt{5}$ 14. (-1,0) 15. P 是 CC_1 中点, 等 16. $\frac{3}{2}, \frac{3}{5}$

注：第 16 题每空两分.

三、解答题：本大题共 3 小题，共 36 分.

17. (本小题满分 12 分)

(I) 证明：连结 BD ，交 AC 于点 O ，连结 OE .

因为 O 是正方形 $ABCD$ 对角线交点，所以 O 为 BD 中点，

由已知 E 为线段 PD 的中点，

所以 $PB \parallel OE$.……………2 分

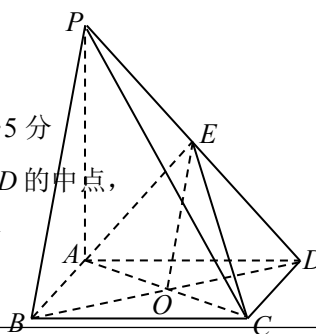
又 $OE \subset$ 平面 ACE ， $PB \not\subset$ 平面 ACE ，

所以 $PB \parallel$ 平面 ACE .……………5 分

(II) 证明：因为 $PA = AD$ ， E 为线段 PD 的中点，

所以 $AE \perp PD$ ，……………6 分

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，



专注北京高考升学

所以 $PA \perp CD$,7分

在正方形 $ABCD$ 中, $CD \perp AD$,

又 $PA \perp AD = A$,

所以 $CD \perp$ 平面 PAD ,8分

又 $AE \subset$ 平面 PAD ,

所以 $CD \perp AE$,9分

又 $PD \cap CD = D$,

所以 $AE \perp$ 平面 PCD ,10分

(III) 因为 $AE \perp$ 平面 PCD , 所以三棱锥 $A-PCE$ 的体积.

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle PCE} \cdot AE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} PE \cdot CD \cdot AE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = \frac{2}{3} . \quad \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

18. (本小题满分 12 分)

解: (I) 由已知 $A(8,0)$,

依题意, 圆 M 的圆周角 $\angle ACB = 90^\circ$,

所以过 A 、 B 、 C 三点的圆 M 即为以 AB 为直径的圆.....3分

所以, 圆 M 的圆心为 AB 的中点 $(4,-2)$.

因为 $|AB| = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$, 所以圆 M 的半径为 $2\sqrt{5}$,5分

所以圆 M 的方程为 $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$ 6分

(II) 因为所求直线与圆 M 相交所得弦长为 8 ,

由垂径定理, 圆 M 的圆心到所求直线的距离为 $\sqrt{20-16} = 2$ 7分

易知, 直线 $x=6$ 满足题意.....8分

由已知, 直线 $AC: y=x-4$,

$$\text{解} \begin{cases} y=x-4, \\ y=-x+8 \end{cases} \text{得点 } C \text{ 的坐标为 } C(6,2) . \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

设斜率存在且满足题意的直线方程为 $y-2=k(x-6)$, 即 $kx-y-6k+2=0$.

则圆心 $(4,-2)$ 到直线 $kx-y-6k+2=0$ 的距离为 $\frac{|4k+2-6k+2|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{|2k-4|}{\sqrt{1+k^2}}$,10分

$$\text{令} \frac{|2k-4|}{\sqrt{1+k^2}} = 2, \text{解得 } k = \frac{3}{4} . \quad \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

所以, 所求直线方程为 $x=6$ 和 $3x-4y-10=0$ 12分

分

19. (本小题满分 12 分)

(I) 证明: 连结 A_1C_1 . $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形, 所以 $B_1D_1 \perp A_1C_1$ 1分

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,

专注北京高考升学

所以 $CC_1 \perp B_1D_1$,2分

又 $CC_1 \cap A_1C_1 = C_1$,

所以 $B_1D_1 \perp$ 平面 A_1C_1C ,3分

因为 $A_1F \subset$ 平面 A_1C_1C ,

所以 $B_1D_1 \perp A_1F$4分

(II) 当 $AE:EB=1:2$ 时, 直线 $A_1F \perp$ 平面 D_1B_1E 5分

证明如下:

过点 F 在平面 BCC_1B_1 作 $FG \parallel BC$ 交 BB_1 于点 G ,

连结 A_1G , 交 B_1E 于点 H ,

因为 $CF:FC_1=1:2$, 所以 $BG:GB_1=1:2$,

在 $Rt\triangle A_1B_1G$ 与 $Rt\triangle B_1BE$ 中, $B_1G=BE$, $A_1B_1=B_1B$,

所以 $\triangle A_1B_1G \cong \triangle B_1BE$, $\angle B_1A_1G = \angle BB_1E$.

又 $\angle B_1A_1G + \angle A_1GB_1 = 90^\circ$, 所以 $\angle BB_1E + \angle A_1GB_1 = 90^\circ$.

所以 $\angle B_1HG = 90^\circ$, $A_1G \perp B_1E$ 7分

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $CB \perp$ 面 ABB_1A_1 ,

所以 $FG \perp$ 面 ABB_1A_1 ,

所以 $FG \perp B_1E$,

又 $A_1G \cap FG = G$,

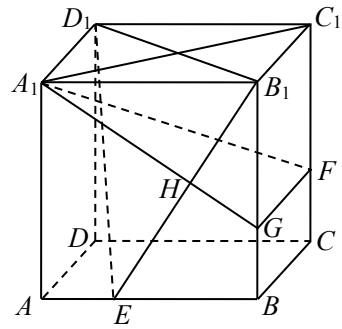
所以 $B_1E \perp$ 面 A_1FG ,8分

所以 $B_1E \perp A_1F$.

又 $B_1D_1 \perp A_1F$, $B_1D_1 \cap B_1E = B_1$,

所以直线 $A_1F \perp$ 平面 B_1D_1E 9分

(III) $\frac{\sqrt{2}}{3}$12分



B 卷 [学期综合] 满分 50 分

一、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分.

1. $\frac{1}{3}$ 2. 1, 2.5 3. $\frac{2}{3}$ 4. $30\sqrt{2}$ 5. ②③.

注: 第 5 题少选得 2 分, 多选、错选不得分. 第 2 题每空 2 分.

二、解答题: 本大题共 3 小题, 共 30 分.

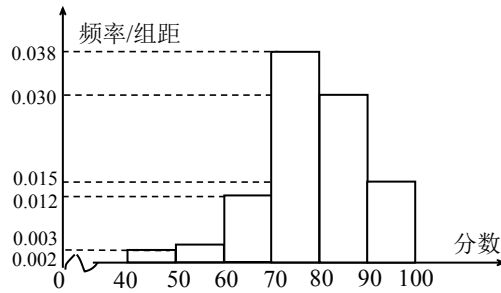
6. (本小题满分 8 分)

解: (I) $N=1$. 因为 $\frac{2}{M}=0.02$, 所以 $M=100$.

从而 $m=100-(2+3+12+38+15)=30$,

$n = \frac{m}{M} = 0.30$4 分

(II) 直方图如下:



.....6 分

(III) 平均分约为 $45 \times 0.02 + 55 \times 0.04 + 65 \times 0.12 + 75 \times 0.38 + 85 \times 0.30 + 95 \times 0.15 = 78.6$.

该地区高二年级同学分数在区间 (60,90] 内的人数约为

$5000 \times (0.12 + 0.38 + 0.30) = 4000$ (人).

.....8 分

7. (本小题满分 10 分)

解: (I) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $B = \frac{\pi}{4}$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

所以 $\sin A = \frac{a}{b} \sin B = \frac{3}{\sqrt{5}} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3}{10} \sqrt{10}$2 分

当 A 为锐角时, $\cos A = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ 3 分

$= \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{5} \sqrt{5}$4 分

当 A 为钝角时, $\cos A = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$5 分

(II) $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} ac$,

所以 $\frac{\sqrt{2}}{4} ac = 1$①7 分

在 $\triangle ABC$ 中, $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \frac{\pi}{4}$,9 分

所以 $5 = a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac$②

由①得 $c = \frac{2\sqrt{2}}{a}$, 代入②得 $5 = a^2 + \frac{8}{a^2} - 4$,

所以 $a^4 - 9a^2 + 8 = 0$.

解得 $a = 1$ 或 $a = 2\sqrt{2}$10 分

8. (本小题满分 12 分)

解: (I) 点 M 的坐标为 $(-4,0)$1 分

直线 CM 的斜率 $k_{CM} = \frac{3-0}{0-(-4)} = \frac{3}{4}$,2 分

专注北京高考升学

所以过点 M 圆 C 的切线斜率 $k = -\frac{4}{3}$,

所以, 过点 M 的切线方程为 $y - 0 = -\frac{4}{3}[x - (-4)]$, 即 $4x + 3y + 16 = 0$3 分

(II) 已知 $D(-5, -2)$, 所以直线 DF 方程为 $x = -5$.

设直线 EF 的斜率为 k , 则直线 EF 方程为 $y = k(x - t) - 2$, 即 $kx - y - kt - 2 = 0$.

依题意 $\frac{|-3 - kt - 2|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5$, 所以 $(t^2 - 25)k^2 + 10tk = 0$,

解得 $k = 0$ (舍) 或 $k = \frac{-10t}{t^2 - 25}$,5 分

所以直线 EF 方程为 $y = \frac{-10t}{t^2 - 25}(x - t) - 2$.

当 $x = -5$ 时, $y = \frac{-10t}{t^2 - 25}(-5 - t) - 2 = \frac{8t + 10}{t - 5}$6 分

所以 $F(-5, \frac{8t + 10}{t - 5})$,

所以 $\triangle DEF$ 的面积 $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \cdot (t + 5) \cdot (\frac{8t + 10}{t - 5} + 2) = \frac{5t(t + 5)}{t - 5}$, ($t > 5$).7 分

(III) 解法一 (解析法):

设点 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, 设直线 MA 的方程为: $x = my - 4$.

由 $\begin{cases} x = my - 4, \\ x^2 + (y - 3)^2 = 25 \end{cases}$ 得 $(m^2 + 1)y^2 - (8m + 6)y = 0$.

所以 $y_A + 0 = \frac{8m + 6}{m^2 + 1}$, $y_A = \frac{8m + 6}{m^2 + 1}$8 分

所以 $y_B = \frac{-8m + 6}{m^2 + 1}$,9 分

所以 $y_A - y_B = \frac{16m}{m^2 + 1}$.

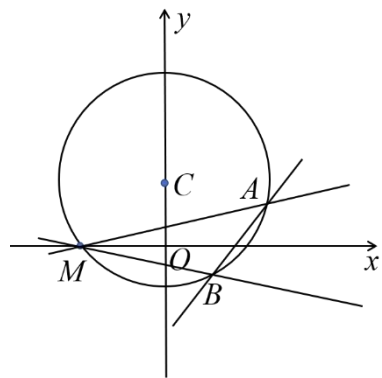
又直线 MB 的方程为 $x = -my - 4$,

所以 $x_A = my_A - 4$, $x_B = -my_B - 4$,

$x_A - x_B = my_A + my_B = m(y_A + y_B) = \frac{12m}{m^2 + 1}$11 分

所以直线 AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\frac{16m}{m^2 + 1}}{\frac{12m}{m^2 + 1}} = \frac{4}{3}$.

即直线 AB 的斜率为定值, 其值为 $\frac{4}{3}$12 分



专注北京高考升学

注：其他解法相应给分。

解法二（几何法）：如图，设圆与 x 轴的正半轴相交于点 M' 。

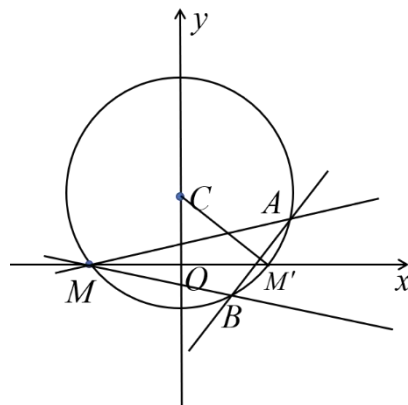
由 MA, MB 关于 x 轴对称可知， $\angle AMM' = \angle BMM'$ ，

所以 M' 为 AB 的中点，连结 CM' ，则 $CM' \perp AB$ ，

因为直线 CM' 的斜率 $k_{CM'} = \frac{3-0}{0-4} = -\frac{3}{4}$ ，

所以 $k_{AB} = \frac{4}{3}$ 。

即直线 AB 的斜率为定值，其值为 $\frac{4}{3}$ 。



附：B 卷 5. 略解：因为 $\sin A \sin B \sin C = \frac{1}{8}$ ，

所以 $\frac{1}{8} ab \cdot bc \cdot ca \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} ab \cdot bc \cdot ca$ ；

所以 $S^3 = \frac{a^2 b^2 c^2}{64}$ 。

因为 $1 \leq S \leq 2$ ，所以 $1 \leq \frac{a^2 b^2 c^2}{64} \leq 8$ ， $8 \leq abc \leq 16\sqrt{2}$ 。

所以①不正确。

因为 $a^2 b + ab^2 = ab(a+b) > abc \geq 8$ 。所以②正确。

因为 $\sin A \sin B \sin C = \frac{1}{8}$ ，所以 $\sin C > \frac{1}{8}$ ，所以 $\frac{1}{2} ab \sin C > \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} ab$ ，

所以 $ab < 16S$ ，所以 $ab < 32$ 。所以③正确。

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980