

2023年广州市普通高中毕业班综合测试(二)

数 学

本试卷共5页,22小题,满分150分。考试用时120分钟。

- 注意事项:1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用2B铅笔在答题卡的相应位置填涂考生号。
- 2.作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
- 3.非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
- 4.考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若 a 为实数,且 $\frac{7+ai}{3+i}=2-i$,则 $a=$

- A. 2 B. 1 C. -1 D. -2

2. 已知集合 $A=\{x|x=3n-2,n\in\mathbf{N}^*\}$, $B=\{6,7,10,11\}$,则集合 $A\cap B$ 的元素个数为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. 已知两个非零向量 a , b 满足 $|a|=3|b|$, $(a+b)\perp b$,则 $\cos\langle a,b\rangle=$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

4. 已知 $a=3^{\frac{2}{3}}$, $b=2^{\frac{3}{4}}$, $c=4^{\frac{1}{3}}$,则

- A. $c<a<b$ B. $b<c<a$ C. $b<a<c$ D. $c<b<a$

5. 木升在古代多用来盛装粮食作物,是农家必备的用具,如图为一升制木升.某同学制作了一个高为40cm的正四棱台木升模型,已知该正四棱台的所有顶点都在一个半径为50cm的球 O 的球面上,且一个底面的中心与球 O 的球心重合,则该正四棱台的侧面与底面所成二面角的正弦值为



- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

6. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 过点 $(-a, 0)$ 且方向向量为 $\boldsymbol{n} = (1, -1)$ 的光线, 经直线 $y = -b$ 反射后过 C 的右焦点, 则 C 的离心率为

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{5}$

7. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 若 $f(x) \leq \left| f\left(\frac{\pi}{3}\right) \right|$ 恒成立, 且 $f(\pi) > f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 则 $f(x)$ 的单调递增区间为

- A. $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2\pi}{3} \right] (k \in \mathbf{Z})$ B. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3} \right] (k \in \mathbf{Z})$
 C. $\left[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6} \right] (k \in \mathbf{Z})$ D. $\left[k\pi - \frac{2\pi}{3}, k\pi - \frac{\pi}{6} \right] (k \in \mathbf{Z})$

8. 已知偶函数 $f(x)$ 与其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f'(x) + e^{-x} + x$ 也是偶函数,

若 $f(2a-1) < f(a+1)$, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, 2)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 有 3 台车床加工同一型号的零件, 第 1 台加工的次品率为 8%, 第 2 台加工的次品率为 3%, 第 3 台加工的次品率为 2%, 加工出来的零件混放在一起. 已知第 1, 2, 3 台车床加工的零件数分别占总数的 10%, 40%, 50%, 从混放的零件中任取一个零件, 则下列结论正确的是

- A. 该零件是第 1 台车床加工出来的次品的概率为 0.08
 B. 该零件是次品的概率为 0.03
 C. 如果该零件是第 3 台车床加工出来的, 那么它不是次品的概率为 0.98
 D. 如果该零件是次品, 那么它不是第 3 台车床加工出来的概率为 $\frac{1}{3}$

10. 已知函数 $f(x) = 1 - \frac{4|x|}{x^2 + 4}$ 的定义域是 $[a, b] (a, b \in \mathbf{Z})$, 值域为 $[0, 1]$, 则满足条件的整数对 (a, b) 可以是

- A. $(-2, 0)$ B. $(-1, 1)$ C. $(0, 2)$ D. $(-1, 2)$

11. 已知双曲线 $\Gamma: x^2 - y^2 = a^2 (a > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线 l 与双曲线 Γ 的右支交于点 B, C , 与双曲线 Γ 的渐近线交于点 A, D (A, B 在第一象限, C, D 在第四象限), O 为坐标原点, 则下列结论正确的是

- A. 若 $BC \perp x$ 轴, 则 $\triangle BCF_1$ 的周长为 $6a$
- B. 若直线 OB 交双曲线 Γ 的左支于点 E , 则 $BC \parallel EF_1$
- C. $\triangle AOD$ 面积的最小值为 $4a^2$
- D. $|AB| + |BF_1|$ 的取值范围为 $(3a, +\infty)$

12. 已知正四面体 $A-BCD$ 的棱长为 2, 点 M, N 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 的重心, P 为线段 CN 上一点, 则下列结论正确的是

- A. 若 $AP + BP$ 取得最小值, 则 $CP = PN$
- B. 若 $CP = 3PN$, 则 $DP \perp$ 平面 ABC
- C. 若 $DP \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 $\frac{27\pi}{2}$
- D. 直线 MN 到平面 ACD 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{9}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 某班有 48 名学生, 一次考试的数学成绩 X (单位: 分) 服从正态分布 $N(80, \sigma^2)$, 且成绩在 $[80, 90]$ 上的学生人数为 16, 则成绩在 90 分以上的学生人数为_____.

14. 已知 $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^n$ 的展开式中存在常数项, 写出 n 的一个值为_____.

15. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{m+n} = a_m + a_n$, 若 $a_k a_{k+1} = 440$, 则正整数 $k =$ _____.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中, 定义 $d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ 为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

两点之间的“折线距离”. 已知点 $Q(1, 0)$, 动点 P 满足 $d(Q, P) = \frac{1}{2}$, 点 M 是曲线

$y = \frac{1}{x^2}$ 上任意一点, 则点 P 的轨迹所围成图形的面积为_____, $d(P, M)$ 的最小值

为_____. (第一个空 2 分, 第二个空 3 分)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1 = 0$ ， $a_{n+1} + (-1)^n S_n = 2^n$ 。

(1) 求 a_1, a_2 ；

(2) 令 $b_n = a_{n+1} + 2a_n$ ，求 $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{2n}$ 。

18. (12 分)

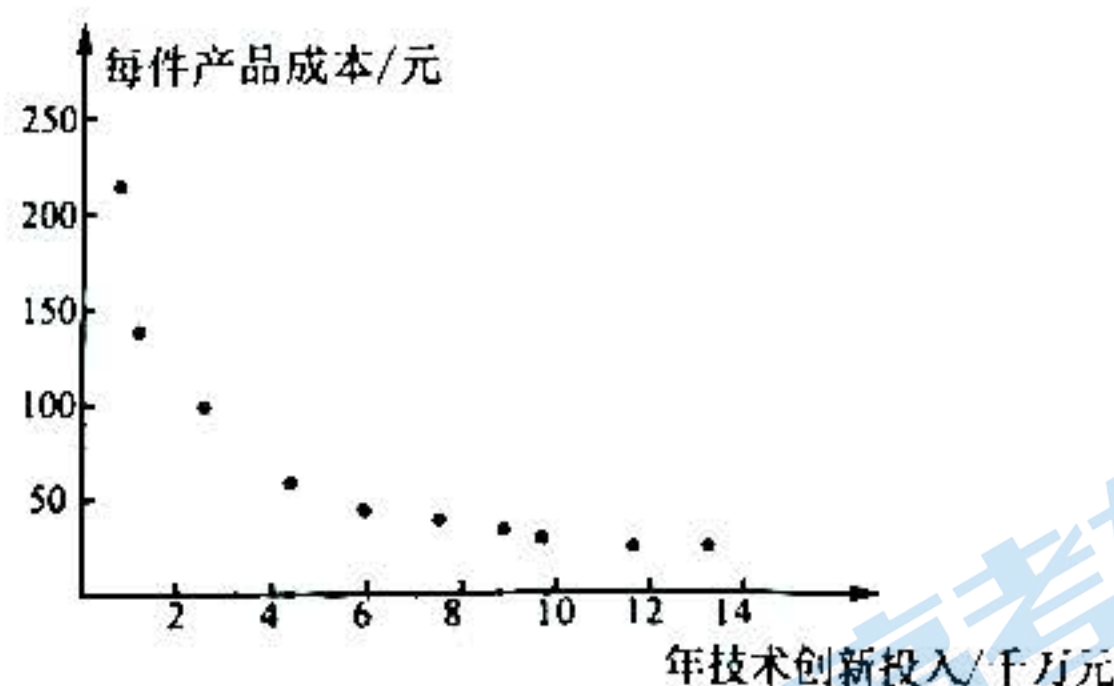
一企业生产某种产品，通过加大技术创新投入降低了每件产品成本。为了调查年技术创新投入 x (单位：千万元) 对每件产品成本 y (单位：元) 的影响，对近 10 年的年技术创新投入 x_i 和每件产品成本 y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, 10$) 的数据进行分析，得到如下散点图，并计算得：

$$\bar{x} = 6.8, \quad \bar{y} = 70, \quad \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{x_i} = 3, \quad \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{x_i^2} = 1.6, \quad \sum_{i=1}^{10} \frac{y_i}{x_i} = 350.$$

(1) 根据散点图可知，可用函数

模型 $y = \frac{b}{x} + a$ 拟合 y 与 x 的关系，

试建立 y 关于 x 的回归方程；



(2) 已知该产品的年销售额 m (单位：千万元) 与每件产品成本 y 的关系为

$$m = -\frac{y^2}{500} + \frac{2y}{25} + \frac{200}{y-10} + 100.$$

该企业的年投入成本除了年技术创新投入，还要投入其他

成本 10 千万元，根据 (1) 的结果回答：当年技术创新投入 x 为何值时，年利润的预报值最大？

(注：年利润 = 年销售额 - 年投入成本)

参考公式：对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ ，其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和

截距的最小二乘估计分别为：

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n \bar{u} \bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n \bar{u}^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}.$$

19. (12分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $b \cos A - a \cos B = b - c$.

(1) 求 A ;

(2) 若点 D 在 BC 边上, 且 $CD = 2BD$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\tan \angle BAD$.

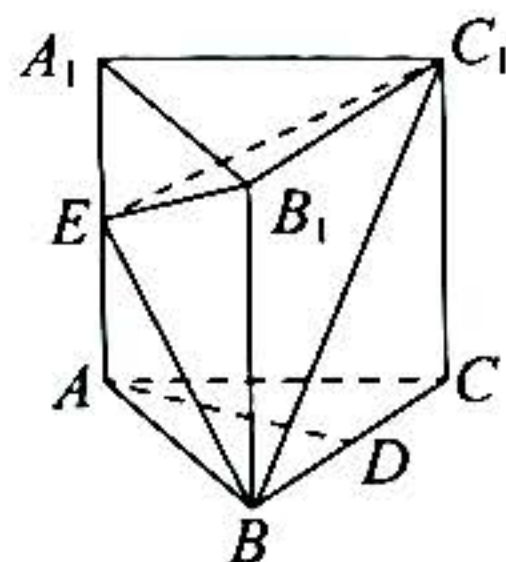
20. (12分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AC = AA_1 = 3$, 点 D 是 BC 的中点, 点 E 在 AA_1 上, $AD \parallel$ 平面 BC_1E .

(1) 求证: 平面 $BC_1E \perp$ 平面 BB_1C_1C ;

(2) 当三棱锥 $B_1 - BC_1E$ 的体积最大时,

求直线 AC 与平面 BC_1E 所成角的正弦值.



21. (12分)

已知点 $F(1, 0)$, P 为平面内一动点, 以 PF 为直径的圆与 y 轴相切, 点 P 的轨迹记为 C .

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 F 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 过点 A 且垂直于 l 的直线交 x 轴于点 M , 过点 B 且垂直于 l 的直线交 x 轴于点 N . 当四边形 $MANB$ 的面积最小时, 求 l 的方程.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = ax^2 + x$.

(1) 当 $x > -1$ 时, $f(x) \leq g(x)$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 已知 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $\sin \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+2} + \dots + \sin \frac{1}{2n} < \ln 2$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯