

高三文科数学

考生注意：全站免费，资源共享，更多资料关注公众号拾穗者的杂货铺。

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 z 满足 $z = \frac{2}{1-i} + i$ ，则 $|z| =$

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{5}$

2. 已知集合 $A = \{x | x^2 + 2x - 3 \leq 0\}$ ， $B = \{y | y = x^2 + 4x + 3, x \in A\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. $[-1, 1]$ B. $(-1, 1)$
C. $[-1, 1)$ D. $(-1, 1]$

3. 已知 $p: x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ， $q: \sin x = 1$ ，则 p 是 q 的

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

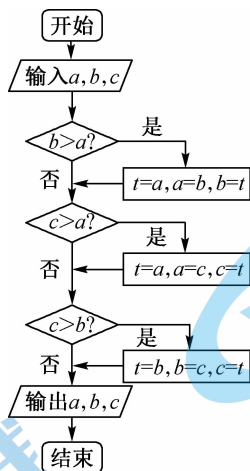
4. 已知 $\tan \theta = 2$ ，则 $\sin \theta \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) =$

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $-\frac{2}{5}$

5. 水雾喷头布置的基本原则是：保护对象的水雾喷头数量应根据设计喷雾强度、保护面积和水雾喷头特性，按水雾喷头流量 q (单位: L/min) 计算公式为 $q = K \sqrt{10P}$ 和保护对象的水雾喷头数量 N 计算公式为 $N = \frac{S \cdot W}{q}$ 计算确定，其中 P 为水雾喷头的工作压力 (单位: MPa)， K 为水雾喷头的流量系数 (其值由喷头制造商提供)， S 为保护对象的保护面积， W 为保护对象的设计喷雾强度 (单位: L/min · m²)。水雾喷头的布置应使水雾直接喷射和完全覆盖保护对象，如不能满足要求时应增加水雾喷头的数量。当水雾喷头的工作压力 P 为 0.35 MPa，水雾喷头的流量系数 K 为 24.96，保护对象的保护面积 S 为 14 m²，保护对象的设计喷雾强度 W 为 20 L/min · m² 时，保护对象的水雾喷头的数量 N 约为 (参考数据: $\sqrt{3.5} \approx 1.87$)

- A. 4 个 B. 5 个 C. 6 个 D. 7 个

6. 执行如图所示的程序框图,若输入的 a, b, c 分别为 3, 6, 9, 则输出的结果为



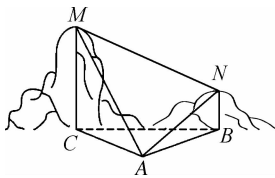
A. 3, 6, 9

B. 6, 9, 3

C. 9, 6, 3

D. 9, 9, 9

7. 如图,某景区为方便游客,计划在两个山头 M, N 间架设一条索道. 为测量 M, N 间的距离,施工单位测得以下数据:两个山头的海拔高度 $MC = 100\sqrt{3}$ m, $NB = 50\sqrt{2}$ m,在 BC 同一水平面上选一点 A ,测得 M 点的仰角为 60° , N 点的仰角为 30° ,以及 $\angle MAN = 45^\circ$,则 M, N 间的距离为



A. $100\sqrt{2}$ m

B. 120 m

C. $100\sqrt{3}$ m

D. 200 m

8. 已知抛物线 $E: x^2 = 4y$, 圆 $C: x^2 + (y-3)^2 = 1$, P 为 E 上一点, Q 为 C 上一点, 则 $|PQ|$ 的最小值为

A. 2

B. $2\sqrt{2} - 1$

C. $2\sqrt{2}$

D. 3

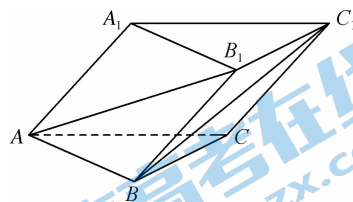
9. 如图,在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,底面边长和侧棱长均相等, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$, 则异面直线 AB_1 与 BC_1 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



10. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线 l 与 E 的左、右两支分别交于 A, B 两点. 若 $\triangle ABF_2$ 是等边三角形, 则双曲线 E 的离心率为

A. $2\sqrt{3}$

B. 3

C. $\sqrt{7}$

D. $\sqrt{5}$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x + 1}$, 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到 $g(x)$ 的图象, 则

A. π 为 $f(x)$ 的一个周期

B. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$

C. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 0$ 对称

D. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-\frac{\pi}{4}, f(-\frac{\pi}{4}))$ 处的切线斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 设 $a = \frac{2}{\ln 2}, b = \frac{e^2}{4 - \ln 4}, c = 2\sqrt{e}$, 则

A. $a > b > c$

B. $c > b > a$

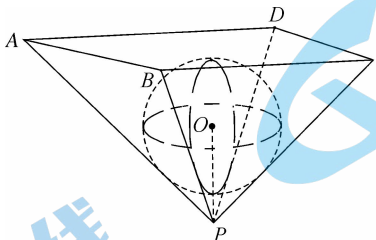
C. $a > c > b$

D. $c > a > b$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + 2y \geq 1, \\ x - y \leq 1, \\ y - 2 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x - 2y$ 的最大值为_____.

14. 已知平面向量 a, b 满足 $|a| = \sqrt{10}$, $|b| = 2$, 且 $(2a+b) \cdot (a-b) = 14$, 则 $|a+b| =$ _____.
15. 已知圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 与圆 $E: x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, 写出圆 C 和圆 E 的一条公切线的方程 _____.
16. 如图, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 框架内放一个球 O , 球 O 与侧棱 PA, PB, PC, PD 均相切. 若 $\angle APB = \frac{\pi}{3}$, 且 $OP = 2$, 则球 O 的表面积为 _____.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

无论是国际形势还是国内消费状况, 2023 年都是充满挑战的一年, 为应对复杂的经济形势, 各地均出台了促进经济发展的各项政策, 积极应对当前的经济形势, 取得了较好的效果. 某市零售行业为促进消费, 开展了新一轮的让利促销的活动, 活动之初, 利用各种媒体进行大量的广告宣传. 为了解大众传媒对本次促销活动的影响, 在本市内随机抽取了 6 个大型零售卖场, 得到其宣传费用 x (单位: 万元) 和销售额 y (单位: 万元) 的数据如下:

卖场	1	2	3	4	5	6
宣传费用	2	3	5	6	8	12
销售额	30	34	40	45	50	60

- (1) 求 y 关于 x 的线性回归方程, 并预测当宣传费用至少多少万元时 (结果取整数), 销售额能突破 100 万元;
- (2) 经济活动中, 人们往往关注投入和产出比, 在这次促销活动中, 设销售额与投入的宣传费用的比为 λ , 若 $\lambda \geq 9$, 则称这次宣传策划是高效的, 否则为非高效的. 从这 6 家卖场中随机抽取 3 家, 求这 3 家卖场中至少有 1 家宣传策划高效的概率.

附: 参考数据 $\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 1752$, 回归直线方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中 $\hat{b}$ 和 $\hat{a}$ 的最小二乘法的估计公式分别为: $\hat{b} =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

18. (本小题满分 12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 1$, 若 $a_2 + a_3 + a_4 = 14$, 且 $a_2, a_3 + 1, a_4$ 分别是等差数列 $\{b_n\}$ 的第 1, 3, 5 项.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{2a_n}{(a_{n+1}-1)(a_{n+2}-1)} + \frac{b_n}{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

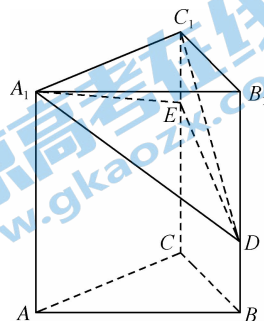
19. (本小题满分 12 分)

如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, E 为 CC_1 上一点, $AB=CE=2, AA_1=3$,

D 为 BB_1 上一点,三棱锥 $D-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(1)求证:平面 $A_1DE \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;

(2)求点 E 到平面 A_1C_1D 的距离.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 $l: y = k_1x (k_1 \neq 0)$ 与 E 交于 A, B 两点, 当 l 为

双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线时, A 到 y 轴的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(1)求 E 的方程;

(2)若过 B 作 x 轴的垂线, 垂足为 H , OH 的中点为 N (O 为坐标原点), 连接 AN 并延长交 E 于点 P , 直线 PB 的斜率为 k_2 , 求 $|k_1 - k_2|$ 的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{a}{x} (a \in \mathbb{R})$.

(1)若 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围;

(2)若函数 $g(x) = \frac{x}{2}f(x) - ax^2 - x$ 有两个不同的极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明: $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 3$.

(二)选考题: 共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做, 则按所做的第一题计分。

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}t, \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} (t \text{ 为参数})$, 以 O 为极点, x 轴的正半轴

为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$.

(1)求 C 的直角坐标方程以及 C 与 y 轴交点的极坐标;

(2)若直线 l 与 C 交于点 A, B , 与 x 轴交于点 P , 求 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知关于 x 的不等式 $|x^2 + ax + b| \leq 2|x - 4| \cdot |x + 2|$ 对任意实数 x 恒成立.

(1)求满足条件的实数 a, b 的所有值;

(2)若 $x^2 + ax + b \geq (m + 2)x - m - 15$ 对 $x > 1$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

高三文科数学综合参考答案、提示及评分细则

1. D $z = \frac{2}{1-i} + i = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} + i = 1+i+i = 1+2i$, 所以 $|z| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. 故选 D.

2. A 由 $x^2+2x-3 \leq 0$, 得 $-3 \leq x \leq 1$, 所以 $A = [-3, 1]$. 因为 $y = (x+2)^2 - 1$, 且 $x \in [-3, 1]$, 所以 $-1 \leq y \leq 8$. 所以 $B = [-1, 8]$, 所以 $A \cap B = [-1, 1]$. 故选 A.

3. B 若 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 则 $\sin x = 1$, 或 $\sin x = -1$, 故由 p 得不到 q ; 若 $\sin x = 1$, 则 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 所以由 q 可以推出 p , 故 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

4. D $\sin \theta \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \theta \right) = -\sin \theta \cos \theta = -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = -\frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = -\frac{2}{5}$. 故选 D.

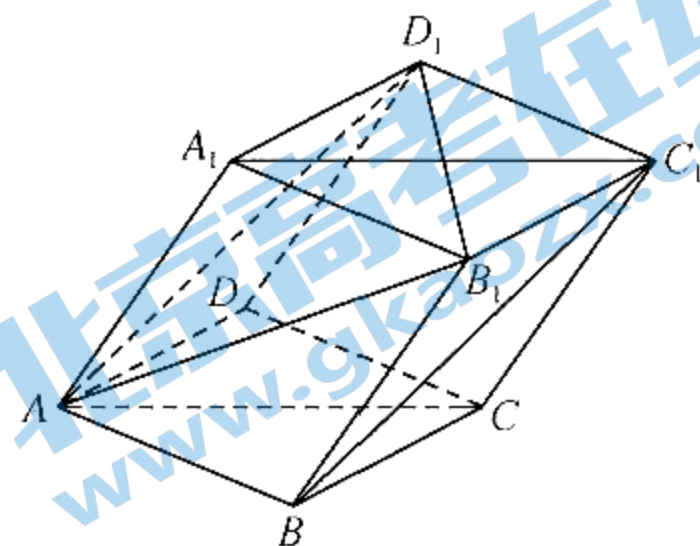
5. C 由题意知, 保护对象的水雾喷头的数量约为 $N = \frac{SW}{q} = \frac{SW}{K \sqrt{10P}} = \frac{14 \times 20}{24.96 \times \sqrt{10 \times 0.35}} \approx \frac{280}{24.96 \times 1.87} \approx 5.9989 \approx 6$. 故选 C.

6. C 该程序框图的功能是将输入的 3 个数字按从大到小的顺序排序. 故选 C.

7. A 由题意知 $\angle MAC = 60^\circ$, $\angle NAB = 30^\circ$, $MC = 100\sqrt{3}$ m, $NB = 50\sqrt{2}$ m, $\angle MAN = 45^\circ$, $\angle MCA = \angle NBA = 90^\circ$, 所以 $AM = 200$ m, $AN = 100\sqrt{2}$ m, 在 $\triangle AMN$ 中, 由余弦定理得 $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos \angle MAN = 20\ 000$, 所以 $MN = 100\sqrt{2}$ m. 故选 A.

8. B 由题意知 $C(0, 3)$, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $x_0^2 = 4y_0$, $|PC| = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 3)^2} = \sqrt{y_0^2 - 2y_0 + 9} = \sqrt{(y_0 - 1)^2 + 8}$, 所以当 $y_0 = 1$ 时, $|PC|_{\min} = 2\sqrt{2}$, 所以 $|PQ|_{\min} = 2\sqrt{2} - 1$. 故选 B.

9. A 将三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 补成一个四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ (如图所示), 则 $\angle B_1AD_1$ 即为所求的角或其补角. 设三棱柱底面边长和侧棱长均为 1. 在 $\triangle AB_1D_1$ 中, $AB_1 = \sqrt{3}$, $B_1D_1 = \sqrt{3}$, $AD_1 = \sqrt{2}$, $\cos \angle B_1AD_1 = \frac{AB_1^2 + AD_1^2 - B_1D_1^2}{2AB_1 \cdot AD_1} = \frac{3+2-3}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 故选 A.



10. C 由双曲线的定义, 得 $|AF_2| - |AF_1| = 2a$, $|BF_1| - |BF_2| = 2a$, 又 $|AF_2| = |AB| = |BF_2|$, 所以 $|AF_1| = 2a$, $|BF_1| = 6a$, $|BF_2| = 4a$. 在 $\triangle BF_1F_2$ 中, $|F_1F_2|^2 = |BF_1|^2 + |BF_2|^2 - 2|BF_1| \cdot |BF_2| \cos \frac{\pi}{3}$, 即 $4c^2 = 36a^2 + 16a^2 - 2 \times 6a \times 4a \times \frac{1}{2} = 28a^2$, 所以 $\frac{c^2}{a^2} = 7$, 即 $e^2 = 7$, 所以 $e = \sqrt{7}$. 故选 C.

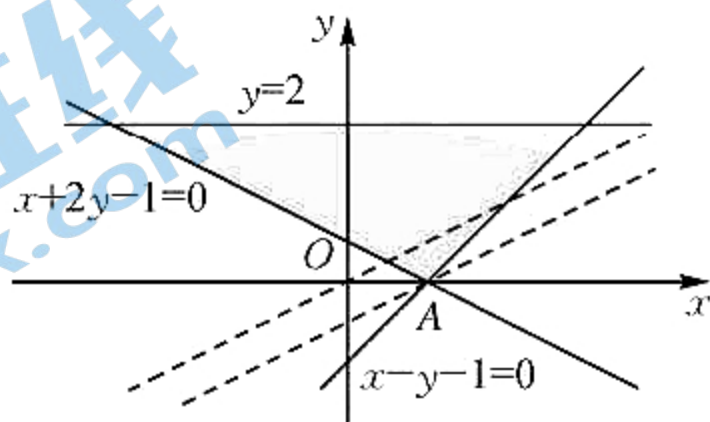
11. B 对于 A, $f(x+\pi) = \frac{-\sin x - \cos x}{\sin x \cos x + 1} = -f(x)$, 故 π 不是 $f(x)$ 的周期, 故 A 错误; 对于 B, 令 $t = \sin x + \cos x$, 则 $t = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 且 $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$, 所以原函数变为 $y = \frac{2t}{t^2 + 1}$, 当 $t = 0$ 时, $y = 0$. 当 $t \neq 0$ 时, $\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$, 又 $\left| t + \frac{1}{t} \right| \geq 2$, 所以 $\frac{1}{y} \leq -1$, 或 $\frac{1}{y} \geq 1$, 所以 $-1 \leq y < 0$, 或 $0 < y \leq 1$, 综上 $-1 \leq y \leq 1$, 所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$, 故 B 正确; 对于 C, $g(x) = \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 1} = \frac{\sqrt{2} \sin x}{1 - \frac{1}{2} \cos 2x}$, 易得 $g(-x) = -g(x)$,

$g(-x) - g(x) = -2g(x) \neq 0$, 故 $g(x)$ 为奇函数, 不是偶函数, 所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 0$ 不对称, 故 C 错误; 对

于 D, $f'(x) = \frac{\sin x \cos x (\sin x - \cos x)}{(\sin x \cos x + 1)^2}$, 所以 $f'(-\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$, 故 D 错误. 故选 B.

12. D 设 $f(x) = \frac{x}{\ln x} (x > 1)$, 则 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < e$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > e$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上单调递减; 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递增. 又 $a = f(2) = \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4} = f(4)$, $b = \frac{e^2}{4 - \ln 4} = \frac{\frac{e^2}{2}}{\ln \frac{e^2}{2}} = f(\frac{e^2}{2})$, $c = 2\sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{\ln \sqrt{e}} = f(\sqrt{e})$, 且 $1 < \sqrt{e} < 2 < e < \frac{e^2}{2} < 4$, 所以 $f(\sqrt{e}) > f(2) = f(4) > f(\frac{e^2}{2})$, 即 $c > a > b$. 故选 D.

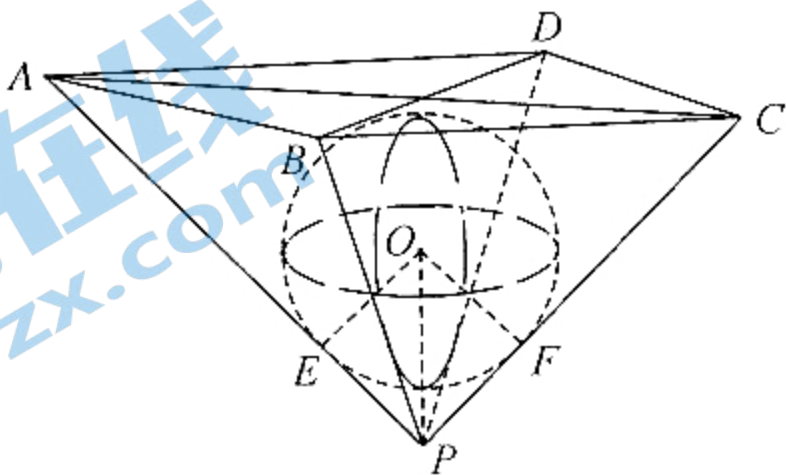
13. 1 画出可行域(如图所示阴影部分), 移动直线 $x - 2y - z = 0$, 当直线经过点 A 时, z 最大, 易求点 A 的坐标为 $(1, 0)$, 故 $z_{\max} = 1$.



14. $3\sqrt{2}$ 由 $(2a+b) \cdot (a-b) = 2a^2 - a \cdot b - b^2 = 20 - a \cdot b - 4 = 14$, 得 $a \cdot b = 2$, 所以 $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + 2a \cdot b + b^2} = \sqrt{10 + 4 + 4} = 3\sqrt{2}$.

15. $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$, 或 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} + 2 = 0$, 或 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} - 2 = 0$ (写出一个即可得分) 由题意, 得圆 C 与圆 E 相外切, 且 $C(1, 0), E(0, \sqrt{3})$, 则 $k_{CE} = -\sqrt{3}$, 过 CE 中点且与 CE 垂直的直线是两圆的内公切线, 其方程为 $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{2})$, 即内公切线方程为 $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$; 又圆 C 与圆 E 半径相等, 故外公切线与 CE 平行, 所以圆 C 与圆 E 的外公切线的方程可设为 $y = -\sqrt{3}x + b$, 即 $\sqrt{3}x + y - b = 0$, 则 $\frac{|\sqrt{3} \times 1 + 0 - b|}{2} = 1$, 所以 $b = \sqrt{3} + 2$ 或 $b = \sqrt{3} - 2$, 所以两条外公切线的方程为 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} + 2 = 0$, 或 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} - 2 = 0$.

16. 8π 连接 AC, BD, 由题意得 $PA = PB = PC = PD = AB = BC = CD = DA$, 又 $AC = BD = \sqrt{2}AB$, 所以 $\angle APC = \frac{\pi}{2}$, 设球 O 与 PA, PC 的切点分别为 E, F, 连接 OE, OF, 因为 $OE = OF$, 所以 $\angle OPE = \angle OPF = \frac{\pi}{4}$, 所以 $OE = OP \sin \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. 即球 O 的半径 $R = \sqrt{2}$, 所以球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 = 4\pi \times (\sqrt{2})^2 = 8\pi$.



17. 解: (1) $\bar{x} = \frac{2+3+5+6+8+12}{6} = 6$, $\bar{y} = \frac{30+34+40+45+50+60}{6} = \frac{259}{6}$, 2 分

$\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 + 12^2 = 282$, 3 分

所以 $b = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i y_i - 6\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^6 x_i^2 - 6\bar{x}^2} = \frac{1752 - 6 \times 6 \times \frac{259}{6}}{282 - 6 \times 6^2} = \frac{198}{66} = 3$,

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = \frac{259}{6} - 3 \times 6 = \frac{151}{6}, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \hat{y} = 3x + \frac{151}{6}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{令 } 3x + \frac{151}{6} = 100, \text{ 解得 } x = \frac{449}{18} = 24.94 (\text{万元}).$$

故当宣传费用至少为 25 万元时, 销售额能突破 100 万元. $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(2) 由题意知宣传策划是高效的仅有 2 家, 记作 a, b , 余下的记作 A, B, C, D .

所以从中取出 3 家, 基本事件有: $abA, abB, abC, abD, aAB, aAC, aAD, aBC, aBD, aCD, bAB, bAC, bAD, bBC, bBD, bCD, ABC, ABD, ACD, BCD$, 共 20 个, $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

其中至少含有 1 家宣传策划是高效的有: $abA, abB, abC, abD, aAB, aAC, aAD, aBC, aBD, aCD, bAB, bAC, bAD, bBC, bBD, bCD$, 共 16 个, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{故所求概率 } P = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 因为 $a_2, a_3 + 1, a_4$ 分别是等差数列 $\{b_n\}$ 的第 1, 3, 5 项,

$$\text{所以 } 2(a_3 + 1) = a_2 + a_4, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{又 } a_2 + a_3 + a_4 = 14, \text{ 所以 } a_3 = 4, \text{ 且 } a_2 + a_4 = 10,$$

$$\text{即 } a_1 q^2 = 4, a_1 q(1 + q^2) = 10, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} q=2, \\ a_1=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} q=\frac{1}{2}, \\ a_1=16 \end{cases} \text{ (舍)}, \text{ 所以 } a_n = 2^{n-1}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{又 } b_1 = a_2 = 2, b_3 = a_3 + 1 = 5, \text{ 故 } \{b_n\} \text{ 的公差 } d = \frac{b_3 - b_1}{3 - 1} = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } b_n = 2 + \frac{3}{2}(n - 1) = \frac{3n + 1}{2}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } c_n = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} + \frac{3n + 1}{2^n},$$

$$\text{令 } d_n = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)}, e_n = \frac{3n + 1}{2^n}, \text{ 设数列 } \{d_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } A_n, \text{ 数列 } \{e_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } B_n,$$

$$\text{则 } S_n = A_n + B_n, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } d_n = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } A_n &= \left(\frac{1}{2 - 1} - \frac{1}{2^2 - 1} \right) + \left(\frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{2^3 - 1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } B_n = \frac{4}{2^1} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \dots + \frac{3n - 2}{2^{n-1}} + \frac{3n + 1}{2^n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} B_n = \frac{4}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \dots + \frac{3n - 2}{2^n} + \frac{3n + 1}{2^{n+1}},$$

$$\text{两式相减, 得 } \frac{1}{2} B_n = 2 + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{3}{2^{n-1}} + \frac{3}{2^n} - \frac{3n + 1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 + 3 \times \frac{\frac{1}{2^2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{3n + 1}{2^{n+1}} = \frac{7}{2} - \frac{3n + 7}{2^{n+1}}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以 $B_n = 7 - \frac{3n+7}{2^n}$, 11 分

所以 $S_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} + 7 - \frac{3n+7}{2^n} = 8 - \frac{1}{2^{n+1}-1} - \frac{3n+7}{2^n}$ 12 分

19. (1) 证明: 分别取 AB, A_1D 的中点 O, F , 连接 CO, FO, EF , 则 $CO \perp AB, CO \perp AA_1, OF \parallel AA_1 \parallel BD$, 且 $OF = \frac{AA_1 + BD}{2}$, 2 分

因为三棱锥 $D-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\frac{1}{3} S_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot B_1D = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

即 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{\pi}{3} \cdot B_1D = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 解得 $B_1D = 2$, 所以 $BD = 1$ 3 分

所以 $OF = 2$, 又 $OF \parallel AA_1 \parallel CE, CE = 2$,

所以 $OF \parallel CE$, 且 $OF = CE$, 所以四边形 $CEFO$ 为平行四边形,

所以 $EF \parallel CO$, 所以 $EF \perp AB, EF \perp AA_1$, 4 分

又 $AA_1 \cap AB = A, AA_1, AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $EF \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

因为 $EF \subset$ 平面 A_1DE , 所以平面 $A_1DE \perp$ 平面 ABB_1A_1 6 分

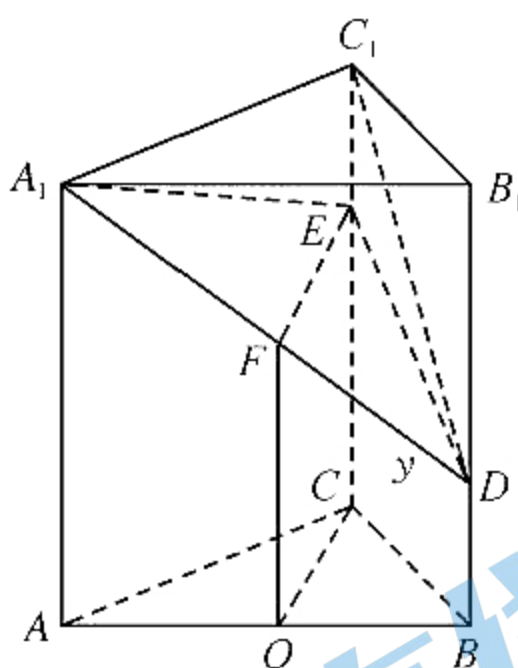
(2) 解: 由题意得 $DA_1 = DC_1 = 2\sqrt{2}$, 点 D 到平面 A_1C_1E 的距离为 $\sqrt{3}$ 7 分

所以 $V_{\text{三棱锥 } D-A_1C_1E} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 8 分

又 $A_1C_1 = 2$, 所以 $S_{\triangle DA_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1} = \sqrt{7}$, 9 分

设点 E 到平面 A_1C_1D 的距离为 d , 则 $V_{\text{三棱锥 } E-A_1C_1D} = \frac{1}{3} \times \sqrt{7} d = \frac{\sqrt{7}}{3} d$, 10 分

所以 $\frac{\sqrt{7}}{3} d = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $d = \frac{\sqrt{21}}{7}$, 即点 E 到平面 A_1C_1D 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 12 分



20. 解: (1) 设 E 的半焦距为 c , 则 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$, 所以 $a = \sqrt{2}b$. ① 1 分

不妨设 $l: y = \frac{1}{a}x$, 与 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 联立, 得 $|x| = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + 1}}$.

由题意得 $|x| = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. ② 3 分

①②联立并解得 $b^2 = 2, a^2 = 4$, 故 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5 分

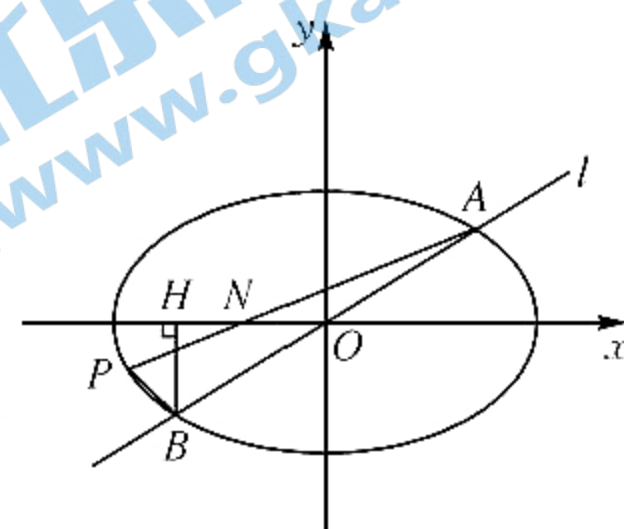
(2) 设 $A(x_1, y_1), P(x_2, y_2)$, 则 $B(-x_1, -y_1), H(-x_1, 0), N(-\frac{x_1}{2}, 0)$,

所以直线 AP 的斜率 $k = \frac{y_1 - 0}{x_1 - (-\frac{x_1}{2})} = \frac{2y_1}{3x_1} = \frac{2}{3}k_1$, 6 分

直线 AP 的方程为 $y = k(x + \frac{x_1}{2})$, 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 2k^2x_1x + \frac{1}{2}k^2x_1^2 - 4 = 0$.

所以 $x_1 + x_2 = -\frac{2k^2x_1}{2k^2 + 1}$, 8 分

$y_1 + y_2 = k(x_1 + \frac{x_1}{2}) + k(x_2 + \frac{x_1}{2}) = k(x_1 + x_2 + x_1) = \frac{kx_1}{2k^2 + 1}$, 9 分



所以 $k_2 = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{\frac{kx_1}{2k^2+1} + \frac{kx_1}{2k^2+1}}{-\frac{2k^2x_1}{2k^2+1}} = -\frac{1}{2k} = -\frac{1}{2 \times \frac{2}{3}k_1} = -\frac{3}{4k_1}$, 10 分

所以 $|k_1 - k_2| = \left| k_1 + \frac{3}{4k_1} \right| = |k_1| + \frac{3}{4|k_1|} \geq 2\sqrt{|k_1| \times \frac{3}{4|k_1|}} = \sqrt{3}$, 当且仅当 $|k_1| = \frac{3}{4|k_1|}$, 即 $k_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立, 所以当 $k_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $|k_1 - k_2|$ 取得最小值, 且最小值为 $\sqrt{3}$ 12 分

21. (1) 解: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{2x-a}{x^2}$ 1 分

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 最多有一个零点, 不合题意, 舍去; 2 分

当 $a > 0$ 时, 当 $0 < x < \frac{a}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{a}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 3 分

因为 $f(x)$ 有两个不同的零点, 则 $f(x)_{\min} = f(\frac{a}{2}) = 2\ln \frac{a}{2} + 2 < 0$, 解得 $0 < a < \frac{2}{e}$ 4 分

当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, $f(\frac{a}{2}) < 0$, $f(e) = 2 + \frac{a}{e} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{a}{2}, e)$ 上存在唯一零点;

当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, 取正整数 $n > 2$, 则 $0 < \frac{a}{n} < \frac{a}{2}$, $f(x) = \frac{2x \ln x + a}{x} > 0 \Leftrightarrow x \ln x > -\frac{a}{2}$,

而 $\frac{a}{n} \ln \frac{a}{n} > -\frac{a}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{a}{n} > -\frac{n}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{n} > e^{-\frac{n}{2}} \Leftrightarrow \frac{a}{2} > \frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}$, 当 $x > 1$ 时易证 $e^x > x^2$,

又 $\frac{n}{2} > 1$, 所以 $e^{\frac{n}{2}} > (\frac{n}{2})^2$, 于是 $\frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}} < \frac{\frac{n}{2}}{(\frac{n}{2})^2} = \frac{2}{n}$, 要使 $\frac{a}{2} > \frac{\frac{n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}}$, 只需 $\frac{a}{2} > \frac{2}{n}$, 即 $n > \frac{4}{a}$.

这样, 当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, 只需取正整数 $n > \frac{4}{a}$, 则 $f(\frac{a}{n}) > 0$.

又 $f(\frac{a}{2}) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{a}{2})$ 内存在唯一零点.

综上, 实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{2}{e})$ 6 分

(2) 证明: $g(x) = \frac{x}{2} f(x) - ax^2 - x = x \ln x - ax^2 - x + \frac{a}{2}$, 则 $g'(x) = \ln x - 2ax$,

因为 $g(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 则 $\ln x_1 = 2ax_1, \ln x_2 = 2ax_2$,

要证 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 3$, 只要证 $3 < 2ax_1 + 4ax_2 = 2a(x_1 + 2x_2)$,

因为 $0 < x_1 < x_2$, 所以只要证 $2a > \frac{3}{x_1 + 2x_2}$ 8 分

又由 $\ln x_1 = 2ax_1, \ln x_2 = 2ax_2$, 作差得 $\ln \frac{x_1}{x_2} = 2a(x_1 - x_2)$, 所以 $2a = \frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2}$,

所以原不等式等价于 $\frac{\ln \frac{x_1}{x_2}}{x_1 - x_2} > \frac{3}{x_1 + 2x_2}$, 即 $\ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{3(x_1 - x_2)}{x_1 + 2x_2} = \frac{3(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 2}$.

令 $t = \frac{x_1}{x_2}, t \in (0, 1)$, 只需证明 $\ln t < \frac{3(t-1)}{t+2}$ 10 分

令 $h(t) = \ln t - \frac{3(t-1)}{t+2}, t \in (0, 1)$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{9}{(t+2)^2} = \frac{t^2 - 5t + 4}{t(t+2)^2} = \frac{(t-1)(t-4)}{t(t+2)^2} > 0$, 11 分

所以 $h(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, $h(t) < h(1) = 0$, 即 $\ln t < \frac{3(t-1)}{t+2}$.

所以 $\ln x_1 + 2\ln x_2 > 3$ 12 分

22. 解: (1) 由 $\rho \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1$, 得 $\rho \cdot \frac{1-\cos \theta}{2} = 1$, 即 $\rho - \rho \cos \theta = 2$ 1 分

又 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \theta$, 所以 $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$, 2 分

化简, 得 $y^2 = 4x + 4$, 即 C 的直角坐标方程为 $y^2 = 4x + 4$ 3 分

其与 y 轴交点的直角坐标为 $(0, 2)$ 和 $(0, -2)$, 4 分

对应的极坐标分别为 $(2, \frac{\pi}{2})$, $(2, \frac{3\pi}{2})$. (答案不唯一, 符合即可得分) 5 分

(2) 易知点 P 的直角坐标为 $(1, 0)$, 将直线 l 的参数方程代入 C 的直角坐标方程, 得 $3t^2 - 8t - 32 = 0$, 6 分

显然 $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times (-32) = 448 > 0$, 7 分

设点 A, B 对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $t_1 + t_2 = \frac{8}{3}$, $t_1 t_2 = -\frac{32}{3}$,

显然 t_1, t_2 一正一负, 8 分

所以 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{|t_1 t_2|}$
 $= \frac{\sqrt{(\frac{8}{3})^2 - 4 \times (-\frac{32}{3})}}{\frac{32}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ 10 分

23. 解: (1) 当 $x = 4$ 时, 不等式化为 $|16 + 4a + b| \leq 0$,

而 $|16 + 4a + b| \geq 0$,

所以 $|16 + 4a + b| = 0$, ① 2 分

当 $x = -2$ 时, 同理可得 $|4 - 2a + b| = 0$, ② 3 分

联立①和②, 解得 $a = -2, b = -8$ 4 分

而 $a = -2, b = -8$ 时, 原不等式为 $|x^2 - 2x - 8| \leq 2|x^2 - 2x - 8|$,

显然恒成立, 所以 $a = -2, b = -8$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $x^2 - 2x - 8 \geq (m+2)x - m - 15$,

所以 $(x-1)m \leq x^2 - 4x + 7$, 6 分

因为 $x > 1$, 所以 $x-1 > 0$, 所以 $m \leq \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立.

令 $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1}$ ($x > 1$), 则 $m \leq y_{\min}$ 7 分

因为 $y = \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1} = x-1 + \frac{4}{x-1} - 2 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} - 2 = 2$, 8 分

当且仅当 $x-1 = \frac{4}{x-1}$, 即 $x = 3$ 时等号成立, 所以 $y_{\min} = 2$, 9 分

所以 $m \leq 2$, 即实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 2]$ 10 分