

高三数学

本试卷共 4 页, 满分 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题卡上, 在试卷上作答无效。

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$, 则 $A \cap B =$

- (A) $\{-1, 0\}$ (B) $\{0, 1\}$
(C) $\{-1, 0, 1\}$ (D) $\{0, 1, 2\}$

(2) 已知一组数据: 1, 2, 2, 3, 3, 3。则这组数据的中位数是

- (A) 2 (B) $\frac{7}{3}$
(C) $\frac{5}{2}$ (D) 3

(3) 已知向量 $a = (2, 0)$, $b = (1, 1)$, 则下列结论正确的是

- (A) $a \cdot b = 1$ (B) $a \parallel b$
(C) $|a| = |b|$ (D) $(a - b) \perp b$

(4) 已知复数 z 在复平面上对应的点为 $(m, 1)$, 若 iz 为实数, 则 m 的值为

- (A) -1 (B) 0
(C) 1 (D) 1 或 -1

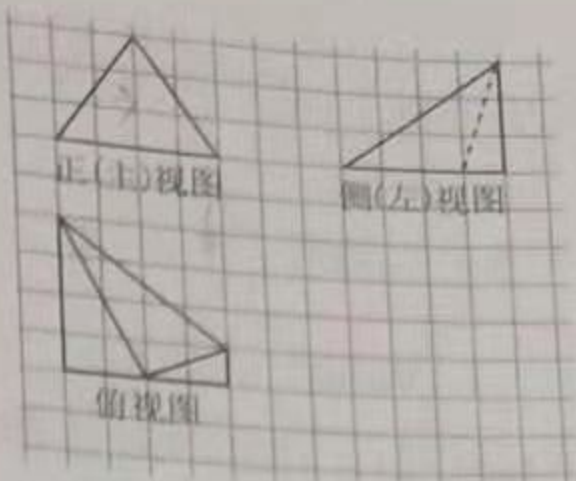
(5) 下列函数中, 值域为 $(1, +\infty)$ 的是

- (A) $y = 2^x + 1$ (B) $y = \frac{1}{x+1}$
(C) $y = \log_2 |x|$ (D) $y = x^2 + 1$

(6) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $2a_{n+1} = 2a_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 a_1 与 a_5 的等比中项为

- (A) ± 2 (B) 2
(C) $\pm \sqrt{3}$ (D) $\sqrt{3}$

(7) 某四棱锥的三视图如图所示, 如果方格纸上小正方形的边长为 1, 那么该四棱锥体积为



- (A) 4
- (B) 10
- (C) 12
- (D) 30

(8) 设 a, b 为非零向量, 则“ $|a+b| < |a| + |b|$ ”是“ a 与 b 不共线”的

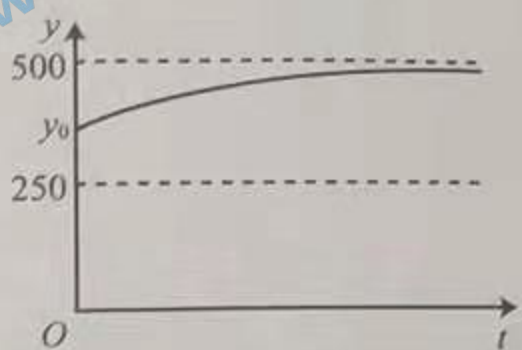
- (A) 充分而不必要条件
- (B) 必要而不充分条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既不充分也不必要条件

(9) 动点 M 位于数轴上的原点处, M 每一次可以沿数轴向左或者向右跳动, 每次可跳动 1 个单位或者 2 个单位的距离, 且每次至少跳动 1 个单位的距离. 经过 3 次跳动后, M 在数轴上可能位置的个数为

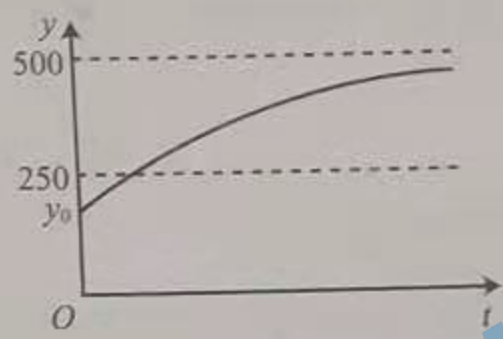
- (A) 7
- (B) 9
- (C) 11
- (D) 13

(10) 某种新产品的社会需求量 y 是时间 t 的函数, 记作: $y = f(t)$. 若 $f(0) = y_0$, 社会需求量 y 的市场饱和水平估计为 500 万件, 经研究可得, $f(t)$ 的导函数 $f'(t)$ 满足:

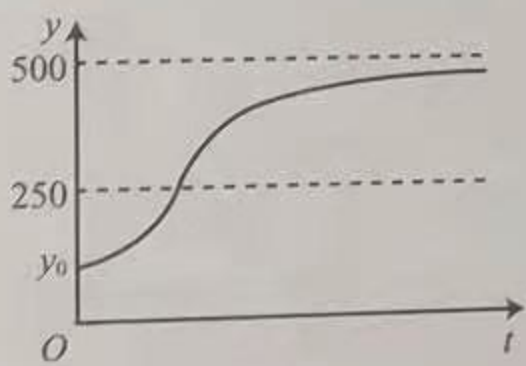
$f'(t) = kf(t)(500 - f(t))$ (k 为正的常数), 则函数 $f(t)$ 的图象可能为



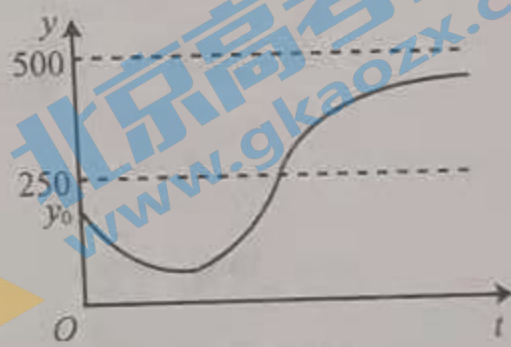
①



②



③



④

(A) ①②

(B) ①③

(C) ②④

(D) ①②③

第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(11) 抛物线 $y^2 = x$ 的焦点到其准线的距离等于 _____.

(12) 已知 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \ln x$, 则 $f(-e) =$ _____.

(13) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2, \cos B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\triangle ABC$ 的面积为 1, 则 $b =$ _____.

(14) 圆心在 x 轴上, 且与双曲线 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 的渐近线相切的一个圆的方程可以是_____.

(15) 已知 $a \geq 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq a, \\ \sqrt{x}, & x > a. \end{cases}$ 若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 的值域为_____; 若方程

$f(x) - 2 = 0$ 恰有一个实根, 则 a 的取值范围是_____.

(16) 小明用数列 $\{a_n\}$ 记录某地区 2019 年 12 月份 31 天中每天是否下过雪, 方法为: 当第 k 天下过雪时, 记 $a_k = 1$, 当第 k 天没下过雪时, 记 $a_k = -1 (1 \leq k \leq 31)$; 他用数列 $\{b_n\}$ 记录该地区该月每天气象台预报是否有雪, 方法为: 当预报第 k 天有雪时, 记 $b_k = 1$, 当预报第 k 天没有雪时, 记 $b_k = -1 (1 \leq k \leq 31)$; 记录完毕后, 小明计算出 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{31} b_{31} = 25$, 则该月份气象台预报准确的天数为_____; 若 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_k b_k = m$, 则前 k 天气象台预报准确的天数为_____. (用 m, k 表示)

三、解答题共 6 小题, 共 80 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(17) (本小题 13 分)

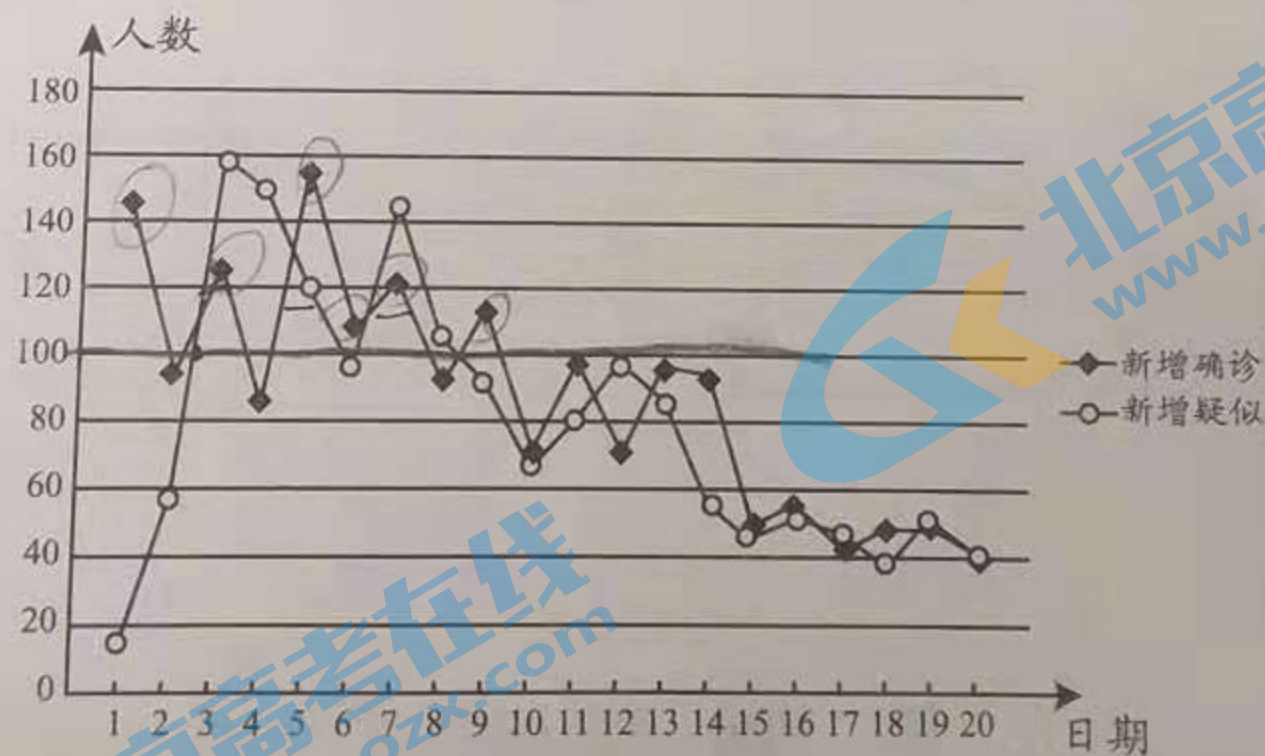
已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin^2 x - \frac{1}{2}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值.

(18) (本小题 13 分)

下图是 2019 年 11 月 1 日到 11 月 20 日某地区甲流疫情新增数据的走势图.



(I) 从这 20 天中任选 1 天, 求新增确诊和新增疑似的人数都超过 100 的概率;

(II) 从新增确诊的人数超过 100 的日期中任选两天, 用 X 表示新增确诊的人数超过 140 的天数, 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 根据这 20 天统计数据, 预测今后该地区甲流疫情的发展趋势.

(19) (本小题 13 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_n > 0$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$. 若 $b_1 = 4, b_2 = 3$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设数列 $\{b_n + m\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若当且仅当 $n = 5$ 时, S_n 取得最大值, 求实数 m 的取值范围.

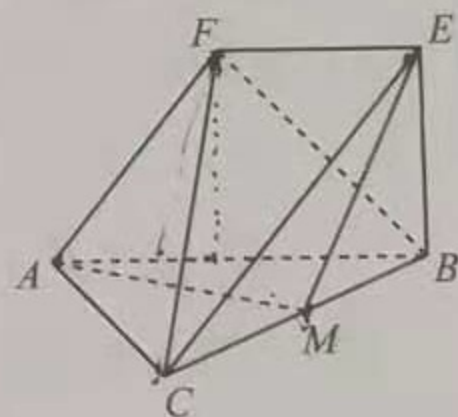
(20) (本小题 14 分)

如图, 在四棱锥 $C-ABEF$ 中, 平面 $ABEF \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形, $AB \parallel EF$, $\angle ABE = 90^\circ$, $BE = EF = 1$, 点 M 为 BC 的中点.

(I) 求证: $EM \parallel$ 平面 ACF ;

(II) 求证: $AM \perp CE$;

(III) 求二面角 $E-BC-F$ 的余弦值.



(21) (本小题 13 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过焦点且与 x 轴垂直的直线被椭圆 C 截得的线段长为 2.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 已知点 $A(1, 0), B(4, 0)$, 过点 A 的任意一条直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点,

求证: $|MB| \cdot |NA| = |MA| \cdot |NB|$.

(22) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = x^2 e^x$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 过点 $P(1, 0)$ 存在几条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 并说明理由;

(III) 若 $f(x) \geq k(x-1)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.