2016-2017 学年度第一学期期中练习题

年级：高一　科目：数学

A 卷（本卷满分 100 分）

一、选择题（共 10 道小题，每题 5 分，共 50 分）

1．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,0<x<2\}$，$B=\{x\,|\,x<1\}$，则集合 $A\cap B=$（　　）.

A．$(0,1)$　　B．$(0,2)$　　C．$(-\infty,1)$　　D．$(-\infty,2)$

【答案】A

【解析】易知 $A\cap B=\{x\,|\,0<x<1\}$，选择 A

2．“函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数”是“函数 $y=f(x)$ 图象过原点”的（　　）.

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】$\because$ $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

$\therefore$必有 $f(x)$ 经过原点反之不成立，

$\therefore$ $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 的奇函数是 $y=f(x)$ 图像过原点的充分不必要条件.

$\therefore$选择 A .

3．若 $\log_2 a<0$，则实数 a 的范围是（　　）.

A．$a>0$　　B．$a<1$　　C．$a>1$　　D．$0<a<1$

【答案】D

【解析】易知 $0<a<1$，选择 D .

4．下列函数中，是偶函数的是（　　）.

A．$y=x+1$　　B．$y=\mathrm{e}^x$　　C．$y=\lg|x|$　　D．$y=\sqrt{x}$

【答案】C

【解析】$\because$ $\lg|-x|=\lg|x|$，

$\therefore$ $y=\lg|x|$ 是偶函数（定义域关于原点对称）.

5．函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$ 的零点所在的区间是（　　）.

A．$(0,1)$　　B．$(1,2)$　　C．$(2,\mathrm{e})$　　D．$(\mathrm{e},3)$

【答案】C

【解析】$\because$ $x>0$ 时，$y=\ln x$ 和 $y=-\dfrac{2}{x}$ 均为单调增函数，

$\therefore$ $f(x)=\ln x-\dfrac{2}{x}$ 为单调增函数，

由零点存在定理可知 $f(x_1)\cdot f(x_2)\leqslant 0$，

易知 $f(2)\cdot f(\mathrm{e})<0$，

$\therefore$选择 C .

6．下列函数中，在 $(0,+\infty)$ 上是增函数的是（　　）.

A. $y=\frac{1}{x}$　　B. $y=(x-1)^2$　　C. $y=2^x$　　D. $y=\log_{\frac{1}{3}}x$

【答案】C

【解析】易知C选项 $y=2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增，

∴选择C．

7．设 $a=0.3^2$，$b=\log_2 0.3$，$c=2^{0.3}$，则 a、b、c 的大小关系是（　　）．

A. $c<b<a$　　B. $b<c<a$　　C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

【答案】D

【解析】∵ $a=0.3^2\in(0,1)$；$b=\log_2 0.3\in(-\infty,0)$，$c=2^{0.3}\in(1,+\infty)$，

∵ $b<a<c$，

∴选择D．

8．若函数 $y=\sqrt{ax^3-2ax+3}$ 的定义域为实数集 $\mathbf{R}$，则实数 a 的取值范围是（　　）．

A. $(0,3]$　　B. $(0,3)$　　C. $[0,3)$　　D. $[0,3]$

【答案】D

【解析】当 $a=0$ 时，$y=\sqrt{3}$，符合条件；

当 $a\neq 0$ 时，原命题等价于 $ax^2-2ax+3\geqslant 0$ 恒成立，

∴有：$\begin{cases} a>0 \\ 4a^2-12a\leqslant 0 \end{cases}$，

即 $0<a\leqslant 3$，

综上所述，$a\in[0,3]$，选择D．

9．函数 $f(x)$ 的图象向右平移一个单位，所得图象与 $y=2^x$ 的图象关于 y 轴对称，则 $f(x)=$（　　）．

A. 2^{x+1}　　B. 2^{x-1}　　C. 2^{-x-1}　　D. 2^{-x+1}

【答案】C

【解析】函数 $y=2^x$ 关于 y 轴对称的函数为 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^{-x}$，

将 $y=2^{-x}$ 向左平移1个单位对应的解析式为：$y=2^{-(x+1)}$，

∴ $f(x)=2^{-x-1}$，选择C．

10．根据统计，一名工人组装第 x 件某产品所用的时间 $f(x)$（单位：分钟）为 $f(x)=\begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x}},x<A \\ \frac{c}{\sqrt{A}},x\geqslant A \end{cases}$（$A$，$C$ 为常数），已知工人组装第4件产品用时30分钟，组装第 A 件产品用时15分钟，那么 C 和 A 的值分别是（　　）．

A. 75，25　　B. 75，16　　C. 60，25　　D. 60，16

【答案】D

【解析】由题可知：$f(A)=\frac{c}{\sqrt{A}}=15$，$C=15\sqrt{A}$；

$f(4)=\dfrac{c}{\sqrt{4}}=30$，

∴ $A=16$， $C=60$，

∴选择 D．

二、填空题（共 4 道小题，每题 5 分，共 20 分）

11．计算： $\lg 4+\lg 25-8^{\frac{2}{3}}=$__________．

【答案】 -2

【解析】原式 $=\lg(25\times 4)-(2^3)^{\frac{2}{3}}$

$=\lg 10^2-2^2$

$=2-4$

$=-2$．

12．函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+\lg(2-x)$ 的定义域是__________．

【答案】 $[1,2)$

【解析】易知有 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\2-x>0\end{cases}$，解得 $1\leqslant x<2$，

∴ $f(x)$ 的定义域为 $[1,2)$．

13．已知函数 $f(x+1)=2^x$，则函数 $f(x)=$__________．

【答案】 2^{x-1}

【解析】∵ $f(x)=f\left[(x-1)+1\right]=2^{x-1}$，

∴ $f(x)=2^{x-1}$．

14．函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上是增函数，若 $f(a)\leqslant f(1)$，则实数 a 的取值范围是__________．

【答案】 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

【解析】∵ $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上为增函数，

∴ $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为单调减函数，

∵ $f(x)=f(-x)$，

∴若 $f(a)\leqslant f(1)$，仅须 $|a|\geqslant 1$ 即可，

∴ $a\geqslant 1$ 或 $a\leqslant -1$．

三、解答题（共 3 道小题，每题 10 分，共 30 分）

15．已知集合 $A=\left\{x\,|\,\dfrac{x+5}{x+2}<0\right\}$， $B=[a,a+2)$，全集是实数解 $\mathbf{R}$．

（Ⅰ）求集合 A．

（Ⅱ）若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围．

【答案】见解析

【解析】（Ⅰ）易知有： $\begin{cases}(x+5)(x+2)<0\\x+2\neq 0\end{cases}$，

解得 $-5<x<-2$，

∴ $A=\{x|-5<x<-2\}$.

（Ⅱ）若 $A\cap B=\varPhi$，则有 $a+2\leqslant -5$ 或 $a\geqslant -2$，

∴ a 的取值范围为 $a\leqslant -7$ 或 $a\geqslant -2$.

16．已知函数 $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

（Ⅰ）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性并证明.

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的值域.

【答案】见解析

【解析】（Ⅰ）$f(x)$ 为奇函数，

证明：∵ $f(x)$ 中 $x\in\mathbf{R}$，

∴定义域关于原点对称，

∵ $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{2^x}-1}{\dfrac{1}{2^x+1}}$

$=\dfrac{1-2^x}{2^x+1}$

$=-\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

∴ $f(-x)=-f(x)$，

∴ $f(x)$ 为奇函数.

（Ⅱ）∵ $f(x)=\dfrac{(2^x+1)-2}{2^x+1}=1-\dfrac{2}{2^x+1}$，

显然 $2^x+1>1$，

∴显然 $f(x)$ 为单调增函数，

∵ $0<\dfrac{2}{2^x+1}<2$，

∴ $f(x)\in(-1,1)$.

17．已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{x^3+4}{x}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式.

（Ⅱ）用定义证明函数 $f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上是增函数.

【答案】见解析

【解析】（Ⅰ）∵ $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

∴ $f(0)=0$，

∵当 $x<0$ 时，$-x>0$，且 $f(x)$ 为奇函数，

∴ $f(x)=-f(-x)=\dfrac{4-x^3}{x}(x<0)$，

$\therefore f(x)=\begin{cases}\dfrac{4-x^3}{x}(x<0)\\0(x=0)\\\dfrac{x^3+4}{x}(x>0)\end{cases}$.

（Ⅱ）证明：$f(x)=x^2+\dfrac{4}{x}$，

取 x_1，$x_2\in(2,+\infty)$ 且 $x_1>x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2+\left(\dfrac{4}{x_1}-\dfrac{4}{x_2}\right)$

$=\dfrac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)\cdot x_1x_2-4(x_1-x_2)}{x_1x_2}$

$=\dfrac{[(x_1+x_2)\cdot x_1x_2-4]\times(x_1-x_2)}{x_1x_2}$

$\because x_1>2$，$x_2>2$，

$\therefore x_1x_2\times(x_1+x_2)>16$.

$\therefore (x_1+x_2)\cdot x_1x_2-4>0$，$x_1-x_2>0$，$x_1x_2>0$，

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数.

B 卷（本卷满分 50 分）

四、填空、选择题（共 6 道小题，每题 5 分，共 30 分）

18．函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}[(x+1)(x-3)]$ 的增区间是（　　）.

A．$(-\infty,1)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,-1)$　　D．$(3,+\infty)$

【答案】C

【解析】$\because y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 为减函数，

$\therefore$要求函数 $y=(x+1)(x-3)$ 的减区间，

且 $(x+1)(x-3)>0$，

易知 $y=(x+1)(x-3)$ 在 $(-\infty,1)$ 为单调减函数，

又$\because (x+1)(x-3)>0$，

$\therefore x\in(-\infty,-1)$，

$\therefore$选择 C .

19．已知定义在 **R** 上的函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)=2f(x+1)$，且当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x^2-x$，则当 $x\in(-1,0]$时，函数 $y=f(x)$ 的最小值为（　　）.

A．$-\dfrac{1}{8}$　　B．$-\dfrac{1}{4}$　　C．$-\dfrac{1}{2}$　　D．-1

【答案】C

【解析】$\because x\in(-1,0]$时，$x+1\in(0,1]$.

$\therefore f(x)=2f(x+1)=2\times\left[(x+1)^2-(x+1)\right]=2(x^2+x)$，

由二次函数的最值易知最小值为 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$，选择C .

20．已知关于 x 的方程 $(1-m)x^2-x+4m-2=0$ 有两个实根，且一个实根小于1，一个实根大于1，则实根 m 的取值范围是__________.

【答案】$\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$

【解析】易知有 $\begin{cases}1-m>0\\ f(1)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m<0\\ f(1)>0\end{cases}$，

即：$\begin{cases}1-m>0\\ 3m-2<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-m<0\\ 3m-2>0\end{cases}$，

解得 $m<\dfrac{2}{3}$ 或 $m>1$，

$\therefore$ m 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

21．已知函数 $y=\log_3 x$ 的图象上有两点 $A(x_1,y_1)$， $B(x_2,y_2)$，且线段 AB 的中点在 x 轴上，则 $x_1\cdot x_2=$__________.

【答案】1

【解析】$\because$ AB 的中点在 x 轴上，

$\therefore$ $\log_3 x_1+\log_3 x_2=\log_3 x_1\cdot x_2=0$，

$\therefore$ $x_1\cdot x_2=1$.

22．已知函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+2^x$，且实数 m 满足 $f(m+1)<5$，则实数 m 的取值范围是__________.

【答案】$[0,1)$

【解析】$\because$ $y=\sqrt{x-1}$ 为增函数， $y=2^x$ 为增函数，$(x\geqslant 1)$，

$\therefore$ $f(x)=\sqrt{x-1}+2^x$ 为单调增函数，

$\therefore$若 $f(m+1)<5=f(2)$，

$\therefore$仅需 $\begin{cases}m+1\geqslant 1\\ m+1<2\end{cases}$，

解得 $0\leqslant m<1$.

$\therefore$ m 的取值范围为 $[0,1)$.

23．已知集合 $U=\{1,2,\cdots,n\}$， $n\in\mathbf{N}^*$，设集合 A 同时满足下列三个条件：

① $A\subseteq U$；

②若 $x\in A$，则 $2x\notin A$；

③若 $x\in\complement_U A$，则 $2x\notin\complement_U A$.

（1）当 $n=4$ 时，一个满足条件的集合 A 是__________.（写出一个即可）

（2）当 $n=7$ 时，满足条件的集合 A 的个数为__________.

【答案】（1） $\{2\}$ 或 $\{1,4\}$，或 $\{2,3\}$ 或 $\{1,3,4\}$；（2）16

【解析】（1） $n=4$ 时， $U=\{1,2,3,4\}$，

由条件可得：

当$1\in A$，则$2\notin A$，即$2\in \complement_U A$，则$4\notin \complement_U A$，即$4\in A$，

但元素3与集合的关系不确定.

$\therefore A=\{1,4\}$，或$A=\{1,3,4\}$，

当$2\in A$，则$4\notin A$，$1\notin A$，但元素3与集合关系不确定，

$\therefore A=\{2\}$，或$A=\{2,3\}$.

（2）$n=7$时，集合$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，

由条件得，1，4必同属于A，此时$2\in \complement_U A$；

或1，4必属于$\complement_U A$，此时$2\in A$；

$3\in A$时，$6\in \complement_U A$；

$3\in \complement_U A$时，$6\in A$；

而元素5，7没有限制，

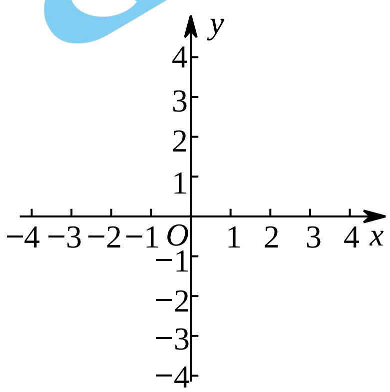
共有$2^4=16$个.

五、解答题（共2道小题，每题10分，共20分）

24．已知函数$f(x)=|x+1|+ax(a\in \mathbf{R})$.

（Ⅰ）试给出a的一个值，并画出此时函数的图象.

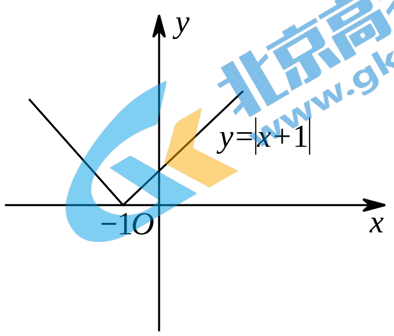
（Ⅱ）若函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上具有单调性，求a的取值范围.



【答案】见解析

【解析】（Ⅰ）$a=0$时，函数$f(x)=|x+1|$，

作出$f(x)$的图像如图所示：



（Ⅱ）易知$f(x)=\begin{cases}(a+1)x+1, x\geqslant -1\\(a-1)x-1, x<-1\end{cases}$， ① $a>1$时，

当 $x\geqslant -1$时， $f(x)=(a+1)x+1$为增函数，

$f(x)\geqslant f(-1)=-a$；

当 $x<-1$时， $f(x)=(a-1)x-1$为增函数，

$f(x)<f(-1)=-a$．

∴当 $a>1$时， $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，

同理可知 $a<-1$时， $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数．

② $a=1$或 -1时，显然不合题．

③ $-1<a<1$时，取 $x=0$， 则 $f(0)=1$，

取 $x=\dfrac{2}{a-1}$， 由 $\dfrac{2}{a-1}<-1$， 知 $f\left(\dfrac{2}{a-1}\right)=1$，

∴ $f(0)=f\left(\dfrac{2}{a-1}\right)$．

∴ $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上不是单调函数．

综上所述， a的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$．

25．定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 同时满足下列两个条件：

①对任意 $x\in\mathbf{R}$， 有 $f(x+2)\geqslant f(x)+2$；

②对任意 $x\in\mathbf{R}$， 有 $f(x+3)\leqslant f(x)+3$．

设 $g(x)=f(x)-x$．

（Ⅰ）证明： $g(x+3)\leqslant g(x)\leqslant g(x+2)$．

（Ⅱ）若 $f(6)=9$， 求 $f(2016)$ 的值．

【答案】见解析

【解析】（Ⅰ）证明：∵ $g(x)=f(x)-x$，

∴ $g(x+2)=f(x+2)-x-2$， $g(x+3)=f(x+3)-x-3$，

由条件①②知 $g(x+2)=f(x+2)-x-2\geqslant f(x)-x=g(x)$；

又∵ $g(x+3)=f(x+3)-x-3\leqslant f(x)+3-x-3=f(x)-x=g(x)$；

∴ $g(x+3)\leqslant g(x)\leqslant g(x+2)$．

（Ⅱ）由 $g(x+2)\geqslant g(x)$，

可知 $g(x+6)\geqslant g(x+4)\geqslant g(x+2)\geqslant g(x)$；

又∵ $g(x+3)\leqslant g(x)$，

∴ $g(x+6)\leqslant g(x+3)\leqslant g(x)$；

∴必有 $g(x+6)=g(x)$，

也即 $g(x)$ 是以 6 为周期的周期函数．

∴ $g(2016)=g(336\times 6+0)=g(6)=f(6)-6=3$，

∴ $f(2016)=g(2016)+2016=2019$．