2024 年普通高等学校招生全国统一考试仿真试题

数学(三)参考答案及解析

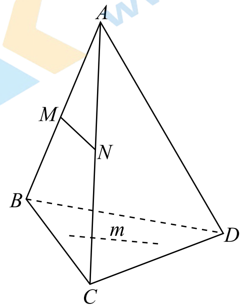
一、选择题

1. A 【解析】$\tan\alpha=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+1}{1-\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2+1}{1-2}=-3$. 故选 A.

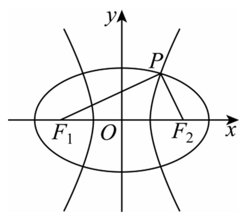
2. D 【解析】因为复数 $z=a+bi$, 又因为 $\frac{2+ai}{1+3i}=b$, 故有 $2+ai=b(1+3i)=b+3bi$, 故 $\begin{cases}b=2\\3b=a\end{cases}$, 解得 $a=6$, $b=2$, 故复数 $z=6+2i$, 所以 $\bar{z}=6-2i$, 所以复数 $\bar{z}$ 在复平面内所对应的点为$(6,-2)$, 该点在第四象限. 故选 D.

3. B 【解析】显然 $(x+1)(x-1)^5=x(x-1)^5+(x-1)^5$, 则 $(x-1)^5$ 展开式第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-1)^r=C_5^r(-1)^r x^{5-r}$, $r\in\mathbf{N}$, $r\leqslant 5$, 当 $r=3$ 时, $x\cdot C_5^3(-1)^3x^2=-10x^3$, 当 $r=2$ 时, $C_5^2(-1)^2x^3=10x^3$, 所以展开式中含 x^3 的项为 $-10x^3+10x^3=0$, 即展开式中 x^3 的系数为 0. 故选 B.

4. C 【解析】如图所示, 因为 M, N 分别为 AB, AC 的中点, 则 $MN/\!/BC$, 可得直线 $MN/\!/$面 BCD, 直线 m 在面 BCD 内, 由线面平行的性质知, 直线 MN 与直线 m 平行或者异面, 下证充分性: 直线 MN 与直线 m 异面, 则直线 MN 与直线 m 不平行, 即直线 m 也不平行于直线 BC, 又直线 m 与直线 BC 在一个面内, 故直线 m 与直线 BC 相交, 再证必要性: 若直线 m 与直线 BC 相交, 则直线 m 与直线 MN 不平行, 故直线 MN 与直线 m 异面. 故选 C.



5. C 【解析】根据题意如下图所示:



利用椭圆定义可知 $|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{5}$, 由双曲线定义可知 $|PF_1|-|PF_2|=2$; 解得 $|PF_1|=\sqrt{5}+1$, $|PF_2|=\sqrt{5}-1$, 由三角形面积公式可得 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}\times|PF_1||PF_2|\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$; 即 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\sqrt{3}$. 故选 C.

6. A 【解析】由题意, 设 A_0 的长、宽分别为 x, y, 根据题意得 $xy=1$; A_1 的长、宽分别为 y, $\frac{x}{2}$, 幅面面积为 $y\cdot\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; A_2 的长、宽分别为 $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, 幅面面积为 $\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{1}{4}$; A_3 的长、宽分别为 $\frac{y}{2}$, $\frac{x}{4}$, 幅面面积为 $\frac{y}{2}\cdot\frac{x}{4}=\frac{1}{8}$; 所以 A_0, A_1, A_2, A_3, …, A_8 的面积是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, 所以 A_0, A_1, A_2,

$A_3,\cdots,A_8$ 这 9 张纸的面积之和为 $\dfrac{1\times\left(1-\dfrac{1}{2^9}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{511}{256}\ m^2$.故选 A.

7.B 【解析】由题意得知 $A+B=\dfrac{2\pi}{3}$,又△ABC 是锐角三角形,则 $\begin{cases}0<A<\dfrac{\pi}{2},\\0<\dfrac{2\pi}{3}-A<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$,得 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$,由题意得 $c^2=\dfrac{3}{\sin A\sin B}$.设 $y=\sin A\sin B$,因为 $B=\dfrac{2\pi}{3}-A$,所以 $y=\sin A\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)=\sin A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos 2A=\dfrac{1}{2}\sin\left(2A-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{4}$,因为 $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}$,则 $\dfrac{\pi}{6}<2A-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$,所以 $y\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right]$,从而 $c^2\in[4,6)$,即 $c\in[2,\sqrt{6})$,所以边 c 的取值范围是 $[2,\sqrt{6})$.故选 B.

8.A 【解析】设 C 的焦距为 $2c$,点 $P(x_0,y_0)$,由 C 的离心率为 2 可知 $c=2a,b=\sqrt{3}a$,因为 $PF\perp FA_2$,所以 $x_0=c$,将 $P(c,y_0)$ 代入 C 的方程得 $\dfrac{c^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$,即 $y_0=\pm\sqrt{3}b$,不妨取 $y_0=\sqrt{3}b$,所以 $\tan\angle PA_2F=\dfrac{\sqrt{3}b-0}{c-a}=3$,$\tan\angle PA_1F=\dfrac{\sqrt{3}b-0}{c-(-a)}=1$,故 $\tan\angle A_1PA_2=\tan(\angle PA_2F-\angle PA_1F)=\dfrac{3-1}{1+3\times1}=\dfrac{1}{2}$.当 $y_0=-\sqrt{3}b$ 时,$\tan\angle A_1PA_2=\dfrac{1}{2}$.故选 A.

二、选择题

9.BC 【解析】$x^2+y^2-2x-6=0$ 变为 $(x-1)^2+y^2=7$,所以 C 的坐标为 $(1,0)$,$|MC|=\sqrt{7}$,故 A 错误;直线 l 过点 A,则 $-1=1+b,b=-2$,所以 C 到直线 l 的距离为 $\dfrac{|1-2-0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,故 B 正确;$\sqrt{7}-1=r-|CA|\leqslant|MA|\leqslant r+|CA|=\sqrt{7}+1$,故 C 正确;圆 C 与 x 轴相交所得的弦长为 $2\sqrt{7}$,圆 C 与 y 轴相交所得的弦长为 $2\sqrt{6}$,所以圆 C 与坐标轴相交所得的四点构成的四边形面积为 $\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{7}\times2\sqrt{6}=2\sqrt{42}$,故 D 错误.故选 BC.

10.ACD 【解析】若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则其密度函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$,因此 X 的密度曲线与 y 轴只有一个交点 $\left(0,\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right)$,故 A 正确;$X$ 的密度曲线关于直线 $x=\mu$ 对称,故 B 错误;$P(|X-\mu|>3\sigma)=P(X<\mu-3\sigma)+P(X>\mu+3\sigma)=2P(X>\mu+3\sigma)$,故 C 正确;$E(Y)=\dfrac{E(X)-\mu}{\sigma}=0$,故 D 正确.故选 ACD.

11.ABD 【解析】因为 $f(x)+g'(x)-8=0$,令 $x=1$,则 $f(1)+g'(1)-8=0$ ①,$f(x)-g'(4-x)-8=0$,令 $x=3$,则 $f(3)-g'(1)-8=0$ ②,联立①②可得 $f(1)+f(3)=16$,故 A 正确;由题可知 $g'(x)=-g'(4-x)$,又因为 $g(x)$ 是偶函数,$g'(x)$ 是奇函数,由 $g'(x)=-g'(-x)=-g'(4-x)$ 可知 $g'(x)=g'(x+4)$,所以 $g'(x)$ 的周期为 4,又 $\because g'(0)=-g'(0)$,故 $g'(0)=g'(4)=0$,$f(x)=8-g'(x)$,故 $f(4)=8-g'(4)=8$,故 B 正确;因为 $g'(-1)=-g'(1)$,由 $g'(x)=g'(x+4)$ 得 $g'(-3)=g'(1)$,故 $g'(-3)=-g'(-1)$,所以 $f(-3)=8-g'(-3)$,$f(-1)=8-g'(-1)$,所以 $f(-3)+f(-1)=16-g'(-3)-g'(-1)=16$,即 $f(-3)+f(-1)=16$,不能得出 $f(-3)=f(-1)$,

故 C 错误;因为 $g'(1)=-g'(3)$,得 $g'(1)+g'(3)=0$,在 $g'(x)=-g'(4-x)$中,令 $x=2$,可得$g'(2)=0$,又 $g'(4)=0$,故 $g'(1)+g'(2)+g'(3)+g'(4)=0$,所以 $\sum_{k=1}^{2\,023}g'(k)=505\times0+g'(1)+g'(2)+g'(3)=0$,故 D 正确.故选 ABD.

三、填空题

12.$\{(1,2)\}$ 【解析】当 $y-1<0$,即 $y<1$,则 $|y-1|+(x+y-3)^2+1-y>0$ 恒成立,此时集合 A 为空;当 $y-1\geqslant0$,即 $y\geqslant1$,则集合 A 中$(x+y-3)^2=0$,可得 $x=3-y$,代入 $y^2=4x$,所以 $y^2+4y-12=(y+6)\cdot(y-2)=0$,可得 $y=-6$(舍)或 $y=2$,此时 $x=1$,综上,$A\cap B=\{(1,2)\}$.故答案为$\{(1,2)\}$.

13.$-\frac{\pi}{9}$ 【解析】由已知得,函数 $f(x)$的周期 $T=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=3$,所以 $f(x)=\sin(3x+\varphi)$,又 $f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\sin\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为 $\varphi\in(-\pi,\pi)$,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$ 或 $-\frac{2\pi}{3}$,因为 $f(x)$在包含 0 的小区间内单调递增,所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$,所以$\frac{\varphi}{\omega}=-\frac{\pi}{9}$.故答案为$-\frac{\pi}{9}$.

14.$\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 【解析】由题意可得 $a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$,显然,$a_n>0$,由 $(m-a_n)\cdot(m+a_{n+3})>0$,解得 $m>a_n$ 或 $m<-a_{n+3}$,由题意可知,存在 $n\in\mathbf{N}^*$,使得 $m>(a_n)_{\min}$ 或 $m<(-a_{n+3})_{\max}$.当 n 为偶数时,$a_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\in\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$,$-a_{n+3}=-\frac{2}{3}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right]\in\left[-\frac{11}{16},-\frac{2}{3}\right)$,所以 $m>\frac{1}{2}$或 $m<-\frac{2}{3}$;当 n 为奇数时,$a_n=\frac{2}{3}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]\in\left(\frac{2}{3},1\right]$,$-a_{n+3}=-\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\right]\in\left(-\frac{2}{3},-\frac{5}{8}\right]$,所以 $m>\frac{2}{3}$或 $m<-\frac{5}{8}$.综上可知,m 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$,故答案为$\left(-\infty,-\frac{5}{8}\right)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

四、解答题

15.**解**:(1)因为 $f'(x)=\ln x+1+a$, (2 分)

在点$(1,f(1))$处的切线斜率为 $k=f'(1)=1+a$, (3 分)

又 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线与直线 $x-2y+2=0$ 相互垂直,

所以$\frac{1}{2}\times f'(1)=-1$, (4 分)

解得 $a=-3$. (6 分)

(2)由(1)得,$f'(x)=\ln x-2$,$x\in(0,+\infty)$, (7 分)

令 $f'(x)>0$,得 $x>e^2$,令 $f'(x)<0$,得 $0<x<e^2$,

即 $f(x)$的增区间为$(e^2,+\infty)$,减区间为$(0,e^2)$. (10 分)

又 $f(e^2)=e^2\ln e^2-3e^2+2=2-e^2$,

所以 $f(x)$在 $x=e^2$ 处取得极小值 $2-e^2$,无极大值. (13 分)

16.**解**:(1)$\bar{x}=\frac{10+20+30+40+50}{5}=30$, (2 分)

$\bar{y}=\frac{62+68+75+81+89}{5}=75, 5\bar{x}\bar{y}=5\times30\times75$

$=11\ 250$，　　　　(4 分)

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=10^2+20^2+30^2+40^2+50^2=5\ 500$，

(5 分)

则相关系数 $r=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{5}y_i^2-5\bar{y}^2}}$

$=\frac{11\ 920-11\ 250}{\sqrt{5\ 500-5\times30^2}\times\sqrt{28\ 575-5\times75^2}}$

$=\frac{670}{\sqrt{1\ 000}\times\sqrt{450}}\approx0.999.$　　　　(7 分)

y 与 x 的相关系数近似为 0.999，说明 y 与 x 的线性相关程度相当高，

从而可用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系.　(8 分)

(2) 由(1)得 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{670}{1\ 000}=0.67$，

(10 分)

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=75-0.67\times30=54.9$，　　　　(12 分)

所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.67x+54.9$.

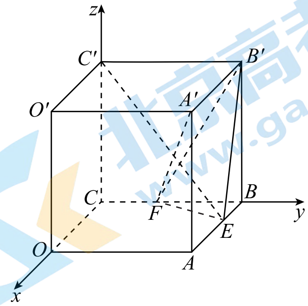
(13 分)

将 $x=130$ 代入 $\hat{y}=0.67x+54.9$，得 $\hat{y}=0.67\times130+54.9=142$，

所以预测该汽车城连续营业 130 天的汽车销售总量为 142 辆.　　　　(15 分)

17. **解**：(1)证明：∵CO、CB、CC'两两垂直，

∴以 C 为原点，CO,CB,CC'为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，



则 $C(0,0,0),B(0,1,0),A(1,1,0),O(1,0,0)$，

$C'(0,0,1),B'(0,1,1),A'(1,1,1),O'(1,0,1)$，

由于 $AE=BF$，设 $CF=a$，则 $F(0,a,0)$，其中 $0\leqslant a\leqslant1$，

则 $E(a,1,0)$，

所以$\overrightarrow{A'F}=(-1,a-1,-1),\overrightarrow{C'E}=(a,1,-1)$，

(3 分)

则$\overrightarrow{A'F}\cdot\overrightarrow{C'E}=-a+a-1+1=0$，故 $A'F\perp C'E$.

(6 分)

(2)要使三棱锥 $B'-BEF$ 的体积取得最大值，只要$\triangle BEF$ 的面积最大即可，

由题意知 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}BE\cdot BF=\frac{1}{2}a(1-a)=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}$，

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，即 E,F 分别为 AB,BC 中点时$\triangle BEF$ 的面积最大，　　　　(7 分)

则 $F\left(0,\frac{1}{2},0\right),E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，设平面 $B'EF$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

又$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right),\overrightarrow{EB'}=\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{EF}\cdot\boldsymbol{n}=0\\\overrightarrow{EB'}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y=0\\-\frac{1}{2}x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x\\z=\frac{1}{2}x\end{cases}$，

令 $x=2$ 得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$，　　　　(9 分)

又正方体 $OABC-O'A'B'C'$ 中 $CC'\perp$ 平面 BEF，

所以 $\overrightarrow{CC'}=(0,0,1)$ 为平面 BEF 的一个法向量，（11分）

所以 $\cos\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{CC'}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CC'}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{CC'}|}=\dfrac{1}{3\times 1}=\dfrac{1}{3}$，（13分）

则 $\sin\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{CC'}\rangle=\sqrt{1-\cos^2\langle \boldsymbol{n},\overrightarrow{CC'}\rangle}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以平面 $B'EF$ 与平面 BEF 的夹角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.（15分）

18. **解**：(1)由题意，笔尖到点 F 的距离与它到直线 a 的距离相等，

所以笔尖留下的轨迹为以 F 为焦点，直线 a 为准线的抛物线，（1分）

设其方程为 $y^2=2px(p>0)$，则 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，（3分）

因为 $\angle FAP=30°$，$\angle AFP=90°$，且 $|PA|+|PF|=3$，（5分）

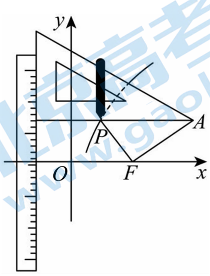
可得 $|PA|=2|PF|$，$|PF|=1$.（6分）

由 $\angle FPA=60°$，可得点 P 的横坐标为 $\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2}$，（7分）

又由抛物线的准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$，

则 $\dfrac{p}{2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{p}{2}=1$，解得 $p=\dfrac{3}{2}$，

所以曲线 C 的轨迹方程为 $y^2=3x$.（8分）



(2)假设存在 λ，使得 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DN}$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $y=kx-3$，（9分）

联立方程组 $\begin{cases}y=kx-3\\y^2=3x\end{cases}$，整理得 $k^2x^2-(6k+3)x+9=0$，且 $k\in(0,2)$，

则 $\Delta=[-(6k+3)]^2-36k^2=36k+9>0$，

则 $x_1+x_2=\dfrac{6k+3}{k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{9}{k^2}$，（11分）

可得 $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+2=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(\dfrac{6k+3}{k^2}\right)^2}{\dfrac{9}{k^2}}=\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{4}{k}+4$，（12分）

由 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DN}$，可得 $x_1=\lambda x_2$，即 $\lambda=\dfrac{x_1}{x_2}$，

所以 $\lambda+\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{4}{k}+2$，（13分）

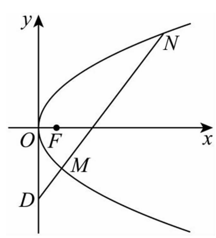
令 $t=\dfrac{1}{k}\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，

则 $\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{4}{k}+2=t^2+4t+2=(t+2)^2-2\in\left(\dfrac{17}{4},+\infty\right)$，（14分）

所以 $\lambda+\dfrac{1}{\lambda}>\dfrac{17}{4}$，且 $\lambda>0$，

即 $\lambda^2-\dfrac{17}{4}\lambda+1>0$，解得 $0<\lambda<\dfrac{1}{4}$ 或 $\lambda>4$，（16分）

所以存在 $\lambda\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)\cup(4,+\infty)$，使得 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DN}$ 成立.（17分）



19. **解**：(1)由题目中给出的中国剩余定理可知 $x=105k$

$+2\times35t_1+3\times21t_2+2\times15t_3$，（2 分）

又因为$\begin{cases}35t_1\equiv1(mod3)\\21t_2\equiv1(mod5)\\15t_3\equiv1(mod7)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=2\\t_2=1\\t_3=1\end{cases}$，（5 分）

所以 $x=105k+140+63+30=233+105k$，（6 分）

当 $k=-2$ 时，x 取得最小值，$x_{\min}=233-210=23$.

（8 分）

所以第 n 个满足条件的正整数为 $23+105(n-1)=105n-82$.（10 分）

(2)不超过 4 200 的正整数中，$105n-82<4\ 200$，解得 $n\leqslant40\dfrac{82}{105}$，（12 分）

所以共有 40 个满足条件的正整数，将这 40 个正整数首尾进行相加有

$[23+(23+105\times39)]+[(23+105\times1)+(23+105\times38)]+\cdots$

$=\dfrac{40}{2}\times(23\times2+105\times39)=82\ 820$，（16 分）

故所有满足条件的数的和为 82 820.（17 分）