2022—2023 学年第二学期北大附中行知学院高二期中考试

数 学 试 卷

考生须知	
考生须知	1. 本试卷共 4 页，分为两部分：第一部分为选择题，共 40 分；第二部分为非选择题，共 60 分。 2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答，第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。 3. 考试结束后，考生应将答题卡放在桌面上，待监考员收回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）函数 $f(x)=2x$ 在区间 $[1,1+\Delta x]$ 上的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 等于

（A）2　　（B）$2\Delta x$

（C）$1+\Delta x$　　（D）0

（2）下列求导结论错误的是

（A）$(e^x)'=e^x$　　（B）$(lnx)'=\frac{1}{x}$

（C）$(sinx)'=-cosx$　　（D）$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

（3）下列导数计算错误的是

（A）$(2x+1)'=2$　　（B）$\left(\frac{x+1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

（C）$(xlnx)'=1+lnx$　　（D）$(e^{-x})'=e^{-x}$

（4）函数 $f(x)=2cosx+x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的极大值点为

（A）$(\frac{\pi}{6},\sqrt{3}+\frac{\pi}{6})$　　（B）$\frac{\pi}{6}$

（C）$1+\frac{\pi}{3}$　　（D）$\frac{\pi}{3}$

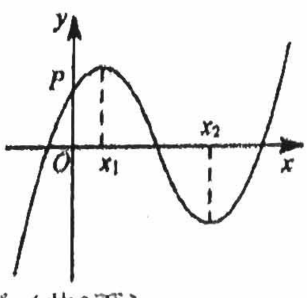
5）函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图所示，则下列结论成立的是

（A）$a<0$，$b<0$，$c>0$，$d>0$

（B）$a>0$，$b<0$，$c<0$，$d>0$

（C）$a>0$，$b<0$，$c>0$，$d>0$

（D）$a>0$，$b>0$，$c>0$，$d<0$



(6) 已知函数 $f(x)=xe^x$，给出下列结论：

① $f(x)$ 的零点是 0；

② $x<0$ 时，$f(x)<0$；

③ 若直线 $y=k$ 与曲线 $f(x)$ 总有两个不同交点，则 k 的取值范围是 $(-\frac{1}{e},+\infty)$.

其中所有正确结论的序号是

(A) ①②③　　(B) ①②

(C) ①③　　(D) ②③

(7) 若函数 $f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x$ 在 $(0,k)$ 上不单调，则实数 k 的取值范围是

(A) $[1,+\infty)$　　(B) $(1,+\infty)$

(C) $(0,1)$　　(D) $(0,1]$

(8) 已知函数 $f(x)=x-sinx$，下列叙述中不正确的一项是

(A) $f(x)$ 在 R 上单调递增

(B) $f(x)$ 无极值点

(C) $f(x)$ 有唯一零点

(D) 曲线 $y=f(x)$ 只有一条斜率为 0 的切线

(9) 下列不等式中正确的是

(A) $2^{\pi}<2^3$

(B) $e^{\pi}<\pi+1$

(C) $\ln\pi>\pi-1$

(D) $\frac{\sin 2}{2}>\frac{\sin 3}{3}$

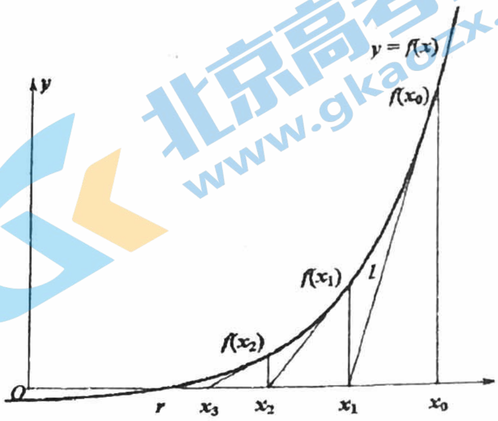
(10) 数学家高斯在 21 岁时，证明了“任何复系数代数方程一定有根”，这个结论被称作代数学基本定理；同样是 21 岁的时候，法国数学家伽罗瓦证明了“五次及五次以上多项式方程没有求根公式”. 但随着科学技术的发展，很多领域需要求解高次方程，比如行星轨道的计算等等. 为此，数学家们想了很多办法，我们学过的“二分法”就是其中之一. 牛顿和拉弗森在 17 世纪提出了“牛顿迭代法”，相比二分法可以更快速的给出近似值，至今仍在计算机等学科中被广泛应用.

如图，设 r 是方程 $f(x)=0$ 的根，选取 x_0 作为 r 初始近似值.

过点 $(x_0,f(x_0))$ 作曲线 $f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 l_1，当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，称 l_1 与 x 轴交点的横坐标 x_1 是 r 的 1 次近似值；

过点 $(x_1,f(x_1))$ 作曲线 $f(x)$ 的切线，设切点为 $(x_1,f(x_1))$ 的切线方程为 l_2，当 $f'(x_1)\neq 0$ 时，称 l_2 与 x 轴交点的横坐标 x_2 是 r 的 2 次近似值；

重复以上过程，得到 r 的近似值序列 $\{x_n\}$．当 $f'(x_n)\neq 0$，$n\in N^*$ 时，r 的 $n+1$ 次近似值 x_{n+1} 与 n 次近似值 x_n 可建立等式关系．



给出以下结论：

① 切线 l_1 的方程为 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$；

② $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$；

③ 若取 $x_0=1$ 作为 r 的初始近似值，根据牛顿迭代法，计算 $\sqrt[3]{2}$ 的 2 次近似值为 $\frac{91}{72}$．

其中所有正确结论的个数为

（A）3　　　（B）2

（C）1　　　（D）0

第二部分（非选择题　共 60 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。

（11）已知函数 $y=\ln(-x)$，其定义域为____________，导函数 $y'=$__________.

（12）已知曲线 $y=e^x$，则在 $x=0$ 处的切线方程为____________，过原点的切线方程为____________.

（13）函数 $f(x)=x^3+2x-1$ 的对称中心为__________，零点个数为____________.

（14）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\le a\\ x^3, & x>a\end{cases}$，

（1）若函数 $f(x)$ 有极大值，则 a 的取值范围是____________；

（2）若存在实数 m 使得方程 $f(x)-m=0$ 无实根，则 a 的取值范围是____________.

（15）已知函数 $f(x)=e^{ax}$，$(a\in\mathbf{R})$，若对于任意 $x_1\in[0,2]$，存在 $x_2\in[0,2]$，都有 $f(x_1)\geq x_2^2-2x_2+2$，则 a 的取值范围为____________.

（16）法国数学家拉格朗日于 1778 年在其著作《解析函数论》中提出一个定理：

如果函数 $y=f(x)$ 满足如下条件：

① $f(x)$ 的图象在闭区间 $[a,b]$ 上是连续不断的；

② $f(x)$ 在区间 (a,b) 上都有导数.

则在区间 (a,b) 上至少存在一个数 m，使得 $f(b)-f(a)=f'(m)(b-a)$.

这就是著名的“拉格朗日中值定理”，其中 m 称为拉格朗日中值.

请阅读以上内容，回答以下问题：

（1）函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的拉格朗日中值 m 为__________；

（2）下列函数，是否存在以 0 为拉格朗日中值的区间 (a,b)？若存在，请将函数对应的序号全部填在横线上________________.

①$y=x^2-1$；②$y=x^3$；③$y=e^x-1$；④$y=\sin x$；⑤$y=\ln(x+1)$

三、解答题共 3 小题，共 36 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 单调区间与极值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[-3,3]$ 上的最值.

（18）（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}-1$，$a\in R$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=\frac{x-a}{\ln x}$，求证：当 $0<a<1$ 时，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上存在极小值，且极小值大于 1.

(19)（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=x\cdot\ln x$.

（Ⅰ）比较 $f(1.33)$ 与 0.33 的大小，并加以证明；

（Ⅱ）若 $f(e^{-x})\geq a$恒成立，求实数 a 的取值范围；

（Ⅲ）证明：当 $x>1$ 时，$\frac{x-1}{lnx}>\frac{x}{e^{x-1}}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。