丰台区 2019 年高三年级第二学期综合练习（二）

数　学（理科）

2019. 05

（本试卷满分共 150 分，考试时间 120 分钟）

注意事项：

1. 答题前，考生务必先将答题卡上的学校、年级、班级、姓名、准考证号用黑色字迹签字笔填写清楚，并认真核对条形码上的准考证号、姓名，在答题卡的“条形码粘贴区”贴好条形码。

2. 本次考试所有答题均在答题卡上完成。选择题必须使用 2B 铅笔以正确填涂方式将各小题对应选项涂黑，如需改动，用橡皮擦除干净后再选涂其它选项。非选择题必须使用标准黑色字迹签字笔书写，要求字体工整、字迹清楚。

3. 请严格按照答题卡上题号在相应答题区内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试卷、草稿纸上答题无效。

4. 请保持答题卡卡面清洁，不要装订、不要折叠、不要破损。

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．若集合 $A=\{x\in \mathbf{Z}\,|\,x^2\leqslant 4\}$，集合 $B=\{x\,|\,-1<x<3\}$，则 $A\cap B=$

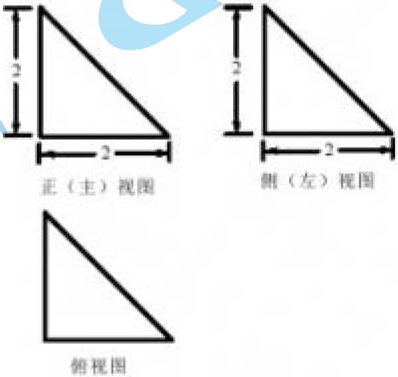
（A）$\{0,1,2\}$　　　　（B）$\{-1,0,1,2\}$

（C）$\{-1,0,1,2,3\}$　　　　（D）$\{x\,|\,-1<x\leqslant 2\}$

2．若 x,y 满足 $\begin{cases}2x-y\leqslant 0,\\ x+y\leqslant 3,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $x-y$ 的最大值为

（A）3　　　　（B）0　　　　（C）-1　　　　（D）-3

3．某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为



（A）$\dfrac{1}{6}$

（B）$\dfrac{4}{3}$

（C）$\dfrac{8}{3}$

（D）4

4．已知 i 是虚数单位，$a\in\mathbf{R}$，则“$a=1$”是“$(a+\mathrm{i})^2$ 为纯虚数”的

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件

（D）既不充分也不必要条件

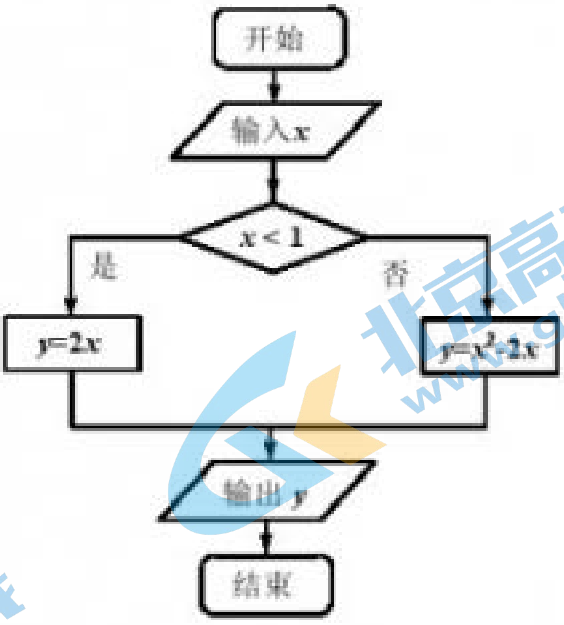
5．执行如图所示的程序框图，如果输入的 $x\in[0,2]$，那么输出的 y 值不可能为

（A）-1

（B）0

（C）1

（D）2



6．已知函数 $f(x)=\sin(2x+\theta)(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2})$ 的图象过点 $P(0,\frac{1}{2})$，现将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $t(t>0)$ 个单位长度得到的函数图象也过点 P，那么

（A）$\theta=\frac{\pi}{3}$，t 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$　　（B）$\theta=\frac{\pi}{3}$，t 的最小值为 π

（C）$\theta=\frac{\pi}{6}$，t 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$　　（D）$\theta=\frac{\pi}{6}$，t 的最小值为 π

7．已知点 P 是边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在平面内一点，若 $|\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}|=1$，则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最大值是

（A）$2\sqrt{2}-1$　　（B）$2\sqrt{2}$

（C）$2\sqrt{2}+1$　　（D）$2\sqrt{2}+2$

8．某码头有总重量为 13.5 吨的一批货箱，对于每个货箱重量都不超过 0.35 吨的任何情况，都要一次运走这批货箱，则至少需要准备载重 1.5 吨的卡车

（A）12 辆　　（B）11 辆　　（C）10 辆　　（D）9 辆

第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9．双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的离心率为____．

10．若在区间 $[-1,4]$ 上随机选取一个数 x，则事件 $x\geq 1$ 发生的概率为____．

11．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，能够说明“若数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，则数列 $\{S_n\}$ 是递减数列”是假

命题的数列$\{a_n\}$的一个通项公式为____.

12．在平面直角坐标系xOy中，圆C的参数方程为$\begin{cases} x=\cos\alpha, \\ y=1+\sin\alpha \end{cases}$（$\alpha$为参数），以坐标原点$O$为极点，$x$轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$，圆心$C$到直线$l$的距离为____.

13．把5个人安排在周一至周五值班，要求每人值班一天，每天安排一人，甲乙安排在不相邻的两天，乙丙安排在相邻的两天，则不同的安排方法有____种.

14．已知点P,Q分别是抛物线$C: y^2=4x$和直线$x+6=0$上的动点，点M是圆$K: (x-1)^2+y^2=1$上的动点.

① 抛物线C的焦点坐标为____；

② $\dfrac{|PQ|^2}{|PM|}$的最小值为____.

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15．（本小题13分）

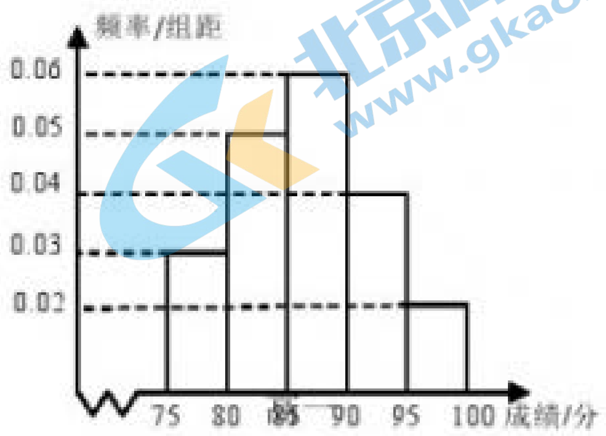
在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$.

（Ⅰ）求B的值；

（Ⅱ）求$\sin A+\sin C$的最大值.

16．（本小题13分）

某学校组织高一、高二年级学生进行了"纪念建国70周年"的知识竞赛．从这两个年级各随机抽取了40名学生，对其成绩进行分析，得到了高一年级成绩的频率分布直方图和高二年级成绩的频数分布表.



成绩分组	频数
[75，80)	2
[80，85)	6
[85，90)	16
[90，95)	14
[95，100]	2

高二

规定成绩不低于90分为"优秀".

（Ⅰ）估计高一年级知识竞赛的优秀率；

（Ⅱ）将成绩位于某区间的频率作为成绩位于该区间的概率．在高一、高二年级学生中各选出 1 名学生，记这 2 名学生中成绩优秀的人数为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列；

（Ⅲ）在高一、高二年级各随机选取 1 名学生，用 X,Y 分别表示所选高一、高二年级学生成绩优秀的人数．写出方差 DX，DY 的大小关系．（只需写出结论）

17．（本小题 14 分）

在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$AB=2AD=2CD=4$，P 为 AB 的中点，线段 AC 与 DP 交于 O 点（如图 1）．将 $\triangle ACD$ 沿 AC 折起到 $\triangle ACD'$ 的位置，使得二面角 $B-AC-D'$ 为直二面角（如图 2）．

（Ⅰ）求证：$BC//$ 平面 POD'；

（Ⅱ）求二面角 $A-BC-D'$ 的大小；

（Ⅲ）线段 PD' 上是否存在点 Q，使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{8}$？若存在，求出 $\frac{PQ}{PD'}$ 的值；若不存在，请说明理由．

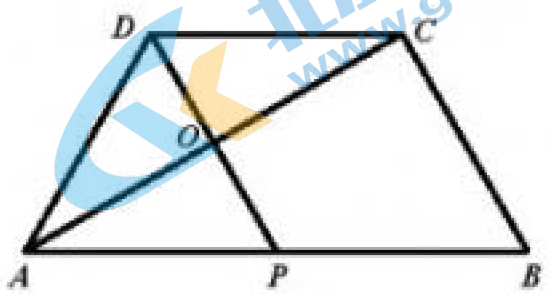


图 1

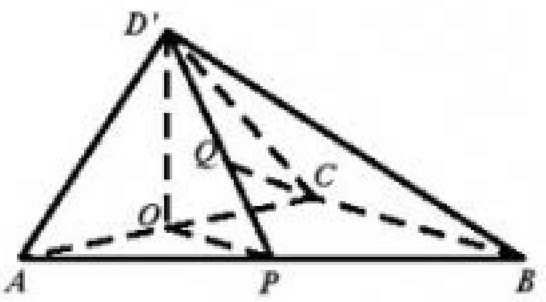


图 2

18．（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2-(2a+1)x+1(a\geqslant 0)$．

（Ⅰ）当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最大值；

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在最小值，记为 $g(a)$，求证：$g(a)<\dfrac{1}{4a}-1$．

19．（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，长轴长为 4，离心率为 $\dfrac{1}{2}$．过右焦点 F 的直线 l 交椭圆 E 于 C,D 两点（均不与 A,B 重合），记直线 AC,BD 的斜率分别为 k_1,k_2．

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）是否存在常数 λ，当直线 l 变动时，总有 $k_1=\lambda k_2$ 成立？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由．

20．（本小题 13 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，记 $P(n)=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|(n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2)$．

（Ⅰ）若对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$，都有 $P(n)\leqslant a_n-a_1$，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P．

①请写出具有性质 P 的一个数列的前四项；

②设数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，证明：$a_{n-1}\leqslant a_n$；

（Ⅱ）若存在常数 M，对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$，都有 $P(n)\leqslant M$，则称数列 $\{a_n\}$ 是 $\mathbf{\Omega}$ 数列．设 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，且 $\{S_n\}$ 是 $\mathbf{\Omega}$ 数列，证明：数列 $\{b_n\}$ 是 $\mathbf{\Omega}$ 数列．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

丰台区 2018—2019 学年度第二学期综合练习（二）
高三数学（理科）答案及评分参考

2019．05

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	B	A	D	C	C	B

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分）

9．$\sqrt{3}$　　10．$\dfrac{3}{5}$　　11．满足 $a_1,a_2>0,d<0$（答案不唯一）

12．$\sqrt{2}$　　13．36　　14．$(1,0)$；16

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

15．（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$，

由正弦定理可得 $\sqrt{3}\sin A\cos B=\sin B\sin A$．　……………2 分

因为在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A\neq 0$．

所以 $\sqrt{3}\cos B=\sin B$．　……………3 分

因为 $0<B<\pi$，　……………4 分

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$．　……………5 分

（Ⅱ）因为 $A+B+C=\pi$，　……………6 分

所以 $\sin A+\sin C=\sin A+\sin(A+\dfrac{\pi}{3})$　……………7 分

$=\sin A+(\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A)$　……………8 分

$=\sqrt{3}\sin(A+\dfrac{\pi}{6})$．　……………9 分

因为 $0<A<\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $\dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$．　……………11 分

当 $A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 时，

$\sin A+\sin C$ 有最大值 $\sqrt{3}$．　……………13 分

16．（共 13 分）

解：（Ⅰ）高一年级知识竞赛的优秀率为

$(0.04+0.02)\times 5=0.3$．　……………4 分

所以高一年级知识竞赛的优秀率为30%.

（Ⅱ）在高一年级学生中选中成绩优秀学生的概率为0.3，选中成绩不优秀学生的概率为0.7；在高二年级学生中选中成绩优秀学生的概率为0.4，选中成绩不优秀学生的概率为0.6．

ξ 的所有可能取值为 0，1，2； ……………6 分

$P(\xi=0)=0.7\times0.6=0.42$；

$P(\xi=1)=0.3\times0.6+0.7\times0.4=0.46$；

$P(\xi=2)=0.3\times0.4=0.12$． ……………9 分

所以随机变量 ξ 的分布列为：

P	0	1	2
ξ	0.42	0.46	0.12

……………10 分

（Ⅲ）$DX<DY$． ……………13 分

17.（共 14 分）

（Ⅰ）证明：因为在梯形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=2CD=4$，P 为 AB 的中点，

所以 $CD//AP$，$CD=AP$，

所以四边形 $APCD$ 为平行四边形， ……………1 分

因为线段 AC 与 DP 交于 O 点，

所以 O 为线段 AC 的中点，

所以 ΔABC 中 $OP//BC$， ……………3 分

因为 $OP\subset$ 平面 POD'，$BC\not\subset$ 平面 POD'，

所以 $BC//$ 平面 POD'． ……………4 分

（Ⅱ）解：因为平行四边形 $APCD$ 中，$AP=AD=2$，

所以四边形 $APCD$ 是菱形，$AC\perp DP$，垂足为 O，

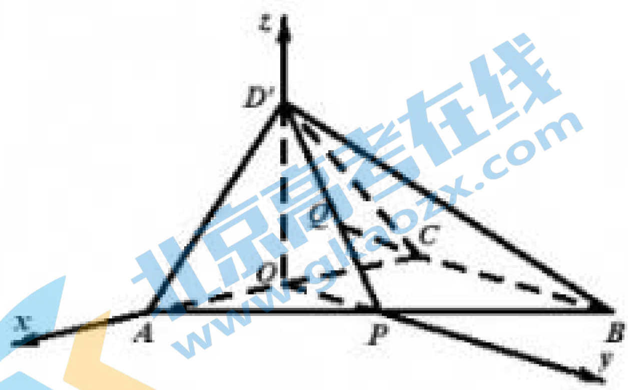
所以 $AC\perp OD'$，$AC\perp OP$，

因为 $OD'\subset$ 平面 ACD'，$OP\subset$ 平面 ACB，

所以 $\angle D'OP$ 是二面角 $B-AC-D'$ 的平面角，

因为二面角 $B-AC-D'$ 为直二面角，

所以 $\angle D'OP=\dfrac{\pi}{2}$，即 $OP\perp OD'$．



可以如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，其中 $O(0,0,0)$． ……………6 分

因为在图 1 菱形 $APCD$ 中，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $OD=OP=1$，$OA=OC=\sqrt{3}$，

所以 $B(-\sqrt{3},2,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$D'(0,0,1)$．

所以 $\overrightarrow{BD'}=(\sqrt{3},-2,1)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$． ……………7 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BCD' 的法向量，

因为 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{CB}\\ \boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BD'}\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD'}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y=0,\\ \sqrt{3}x-2y+z=0.\end{cases}$

取 $x=1$，得到 $\begin{cases}y=0,\\ z=-\sqrt{3}.\end{cases}$

所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,-\sqrt{3})$，

易知平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=\overrightarrow{OD'}=(0,0,1)$， ………………8 分

所以 $\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ………………9 分

由图可知，二面角 $A-BC-D'$ 为锐二面角，

所以二面角 $A-BC-D'$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$． ………………10 分

（Ⅲ）解：线段 PD' 上存在点 Q，使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$， ………………11 分

设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD'}(0\le\lambda\le1)$，

因为 $\overrightarrow{CP}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{PD'}=(0,-1,1)$，

所以 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CP}+\lambda\overrightarrow{PD'}=(\sqrt{3},1-\lambda,\lambda)$． ………………12 分

因为 $\cos<\overrightarrow{CQ},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{CQ}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{CQ}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}(1-\lambda)}{2\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$， ………………13 分

所以 $3\lambda^2-7\lambda+2=0$，

因为 $0\le\lambda\le1$，

所以 $\lambda=\dfrac{1}{3}$． ………………14 分

所以线段 PD' 上存在点 Q，且 $\dfrac{PQ}{PD'}=\dfrac{1}{3}$ 时，使得 CQ 与平面 BCD' 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{8}$．

18.（共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，$f(x)=\ln x-x+1$，

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1$， ………………2 分

因为 $x\in[1,+\infty)$，所以 $f'(x)\leqslant0$． ………………3 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减， ………………4 分

所以 $f(x)$ 区间 $[1,+\infty)$ 上最大值为 $f(1)=0$． ………………5 分

（Ⅱ）由题可知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-(2a+1)$

$=\dfrac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}$

$=\dfrac{(2ax-1)(x-1)}{x}$． ………………6 分

①当 $a=0$ 时，由（Ⅰ）知，函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $f(x)$ 无最小值，此时不符合题意； ………………7 分

②当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，因为 $x\in(1,+\infty)$，所以 $2ax-1>0$．此时函数 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以函数 $f(x)$ 无最小值，此时亦不符合题意； ………………8 分

③当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，此时 $1<\dfrac{1}{2a}$．

函数 $f(x)$ 在区间 $(1,\frac{1}{2a})$ 上单调递减，在区间 $(\frac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(\frac{1}{2a})=\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}$，　　　　……………9 分

即 $g(a)=\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{4a}$.

要证 $g(a)<\frac{1}{4a}-1$，只需证当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$g(a)-\frac{1}{4a}+1<0$ 成立.

即证 $\ln\frac{1}{2a}-\frac{1}{2a}+1<0(0<a<\frac{1}{2})$，　　　　……………10 分

设 $t=\frac{1}{2a}$，$h(t)=\ln t-t+1(t>1)$　　　　……………11 分

由（Ⅰ）知 $h(t)<h(1)=0$　　　　……………12 分

即 $g(a)-\frac{1}{4a}+1<0$ 成立.

所以 $g(a)<\frac{1}{4a}-1$.　　　　……………13 分

19.（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题知 $\begin{cases}2a=4,\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3}.\end{cases}$　　　　……………3分

所以求椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.　　　　……………5分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $A(-2,0)$，$B(2,0)$

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=1$.

由 $\begin{cases}x=1\ ,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\ y=\frac{3}{2}.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\ y=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

得 $k_1=\frac{1}{2},k_2=\frac{3}{2}$ 或 $k_1=-\frac{1}{2},k_2=-\frac{3}{2}$；均有 $k_1=\frac{1}{3}k_2$.

猜测存在 $\lambda=\frac{1}{3}$.　　　　……………6分

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1.\end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$.

则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3},\\ x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}.\end{cases}$　　　　……………8分

故 $k_1-\dfrac{1}{3}k_2=\dfrac{y_1}{x_1+2}-\dfrac{y_2}{3(x_2-2)}$ ……………………9分

$$=\frac{3(x_2-2)y_1-(x_1+2)y_2}{3(x_1+2)(x_2-2)}$$

$$=\frac{k\left[2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8\right]}{3(x_1+2)(x_2-2)}$$ ……………………13分

$$=\frac{k\left[\dfrac{8(k^2-3)}{4k^2+3}-\dfrac{40k^2}{4k^2+3}+8\right]}{3(x_1+2)(x_2-2)}$$

$=0$.

所以存在常数 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 使得 $k_1=\dfrac{1}{3}k_2$ 恒成立. ……………………14分

20.（共 13 分）

解：（Ⅰ）①1,2,3,4. ……………………3 分

②假设 $a_i\ (i\in\mathbf{N}^*)$ 是数列 $\{a_n\}$ 中，使得 $a_{i-1}>a_i$ 成立的最小的项，

则 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{i-1}-a_i|=|a_{i-1}-a_i|+a_{i-1}-a_1\leqslant a_i-a_1$

所以 $a_{i-1}-a_i+a_{i-1}\leqslant a_i$，

所以 $a_{i-1}\leqslant a_i$，这与 $a_{i-1}>a_i$ 矛盾，所以假设不成立.

所以 $a_{n-1}\leqslant a_n$. ……………………8 分

（Ⅱ）因为 $\{S_n\}$ 是 $\mathbf{\Omega}$ 数列，所以存在常数 M，对于任意的 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$，都有

$|S_1-S_2|+|S_2-S_3|+\cdots+|S_{n-1}-S_n|\leqslant M$，

因为 S_n 是数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，所以 $b_n=\begin{cases}S_1, n=1,\\ S_n-S_{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$

所以 $|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_n|\leq M$，

因为

$|b_1-b_2|+|b_2-b_3|+\cdots+|b_{n-1}-b_n|$

$\leqslant|b_1|+|b_2|+|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_{n-2}|+|b_{n-1}|+|b_{n-1}|+|b_n|$

$=2(|b_2|+|b_3|+\cdots+|b_{n-1}|)+|b_1|+|b_n|$

$\leqslant 2M+|b_1|-|b_n|$

$\leqslant 2M+|b_1|$.

所以数列 $\{b_n\}$ 是 $\mathbf{\Omega}$ 数列. ……………………13 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）