南充市高 2024 届高考适应性考试（一诊）

文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将答题卡交回。

一、单项选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为(　　)

A． $x=-1$　　B． $x=1$　　C． $y=-1$　　D． $y=1$

2．当 $1<m<2$ 时，复数 $m-1+(m-2)i$ 在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

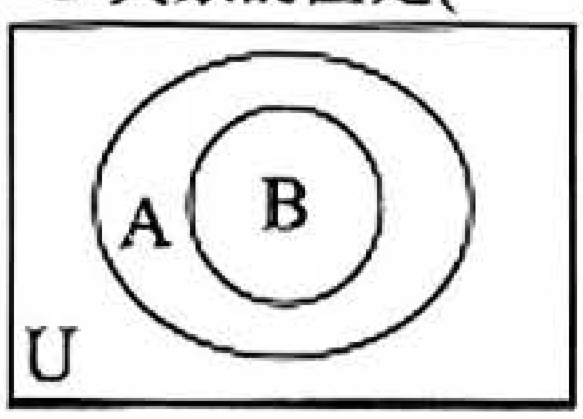
3．已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，则 $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}\right|=$(　　)

A．0　　B． $\sqrt{2}$　　C．2　　D． $2\sqrt{2}$

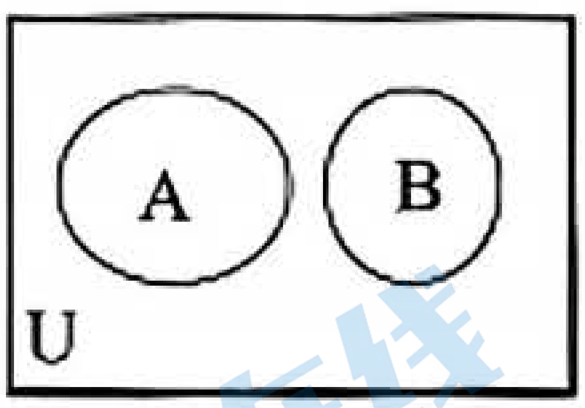
4．已知直线 m，n 和平面 α，$n\subset\alpha$，$m\not\subset\alpha$，则“$m//n$”是“$m//\alpha$”的(　　)条件

A．充分不必要　　B．必要不充分　　C．充分必要　　D．既不充分也不必要

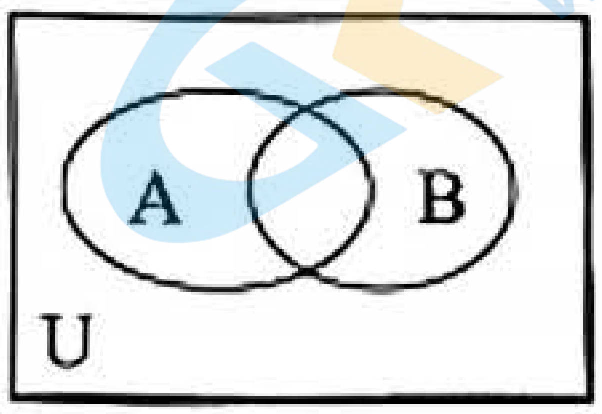
5．已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x\mid\log_3(x-1)>1\}$，$B=\left\{x\mid\frac{x^2}{4}+y^2=1\right\}$，则能表示 A，B，U 关系的图是(　　)



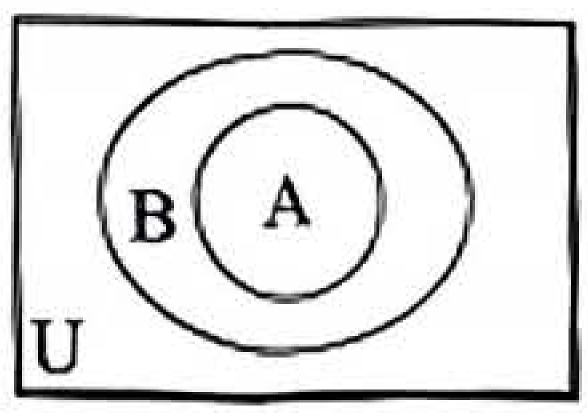
A



B



C



D

6．某商品的地区经销商对 2023 年 1 月到 5 月该商品的销售情况进行了调查，得到如下统计表．发现销售量 y(万件)与时间 x(月)成线性相关，根据表中数据，利用最小二乘法求得 y 与 x 的回归直线方程为：$\hat{y}=0.48x+0.56$．则下列说法错误的是(　　)

A．由回归方程可知 2024 年 1 月份该地区的销售量为 6.8 万件

B．表中数据的样本中心点为(3，2.0)

C． a=2.4

D．由表中数据可知，y 和 x 成正相关

时间 x(月)	1	2	3	4	5
销售量 y(万件)	1	1.6	2.0	a	3

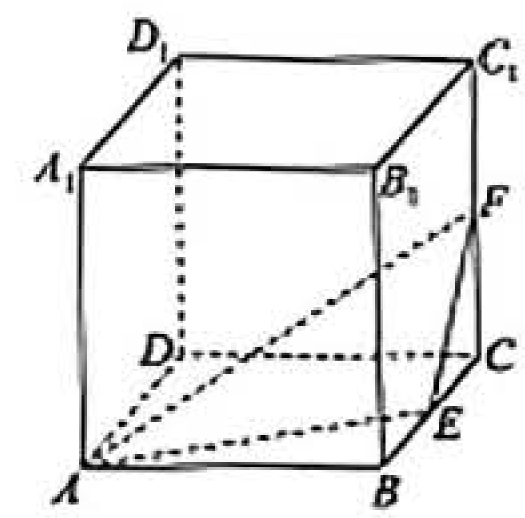
7. 满足约束条件$\begin{cases}x+y-1\le 0\\ x-y+3\le 0\\ x+2\ge 0\end{cases}$的平面区域的面积为(　　)

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. 1　　D. 2

8. 已知α为第二象限角，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha-1$，则$\cos\alpha=$(　　)

A. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$　　C. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

9. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，E，F分别为BC，CC_1的中点，则平面AEF截正方体所得的截面面积为(　　)



A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{9}{2}$　　C. 9　　D. 18

10. 如图1是函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$的部分图象，经过适当的平移和伸缩变换后，得到图2中$g(x)$的部分图象，则(　　)

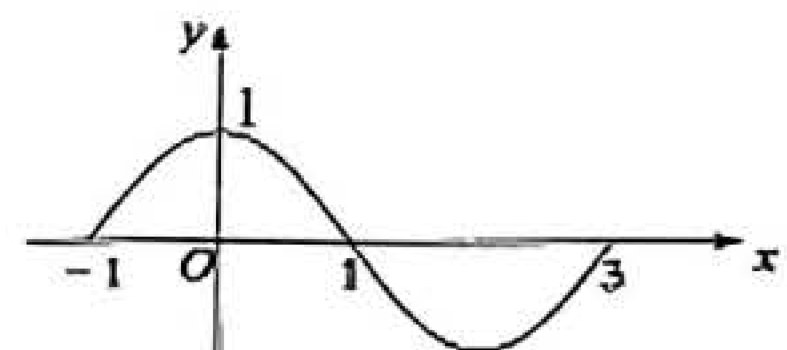


图 1

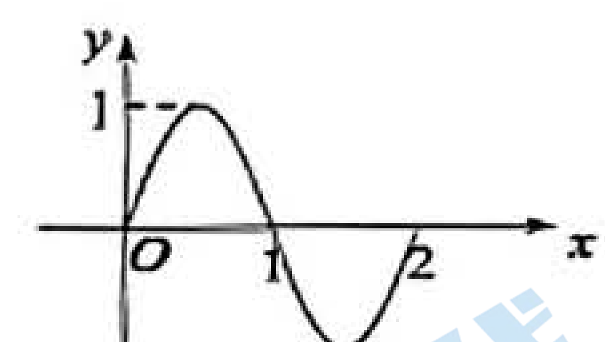


图 2

A. $g(x)=f\left(2x-\frac{1}{2}\right)$

B. $g(x)>\frac{1}{2}$的解集为$\left(\frac{1}{6}+2k,\ \frac{5}{6}+2k\right)$，$k\in Z$

C. $g\left(\frac{2023}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. 方程$g(x)=\log_{\frac{1}{4}}x$有4个不相等的实数解

11. 已知双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左右焦点分别为F_1，F_2，P为双曲线在第一象限上的一点，若$\cos\angle PF_2F_1=\frac{1}{4}$，则$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=$(　　)

A. $\sqrt{15}$　　B. $2\sqrt{15}$　　C. 14　　D. 15

12. 已知函数$f(x)=\left|\ln x-\frac{2}{x}+2\right|-m$ $(0<m<3)$有两个不同的零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，下列关于x_1，x_2的说法正确的有(　　)个

①$\frac{x_2}{x_1}<e^{2m}$　　②$x_1>\frac{2}{m+2}$　　③$x_1x_2>1$

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

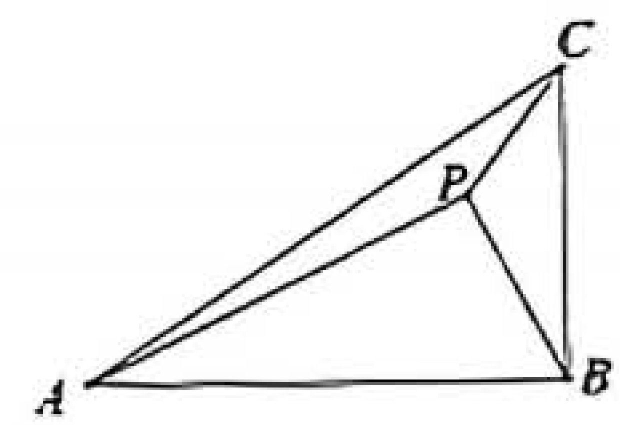
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 等差数列$\{a_n\}$中，S_n为$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_1=3$，$S_3=15$，则 $a_4=$ ________

14. 已知函数 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，且 $f(x)=\begin{cases}2^x-1,(0\le x<3)\\ x-5,(x\ge 3)\end{cases}$，则 $f(f(3))=$ ________.

15. 已知圆台O_1O_2的上下底面半径分别为$\sqrt{3}$和$3\sqrt{3}$，若存在一个球同时与该圆台的上、下底面及侧面都相切，则该圆台的体积为________.

附：圆台体积公式为：$V=\frac{1}{3}\left(S_上+\sqrt{S_上S_下}+S_下\right)h$



16. 如图，在ΔABC中，$\angle ABC=90^\circ$，$AB=3$，$BC=2$，P为ΔABC内的一点，且$PA\perp PB$，$PC=1$，则$\tan\angle BAP=$ ______.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17. 已知数列$\{a_n\}$是首项为 2 的等比数列，公比$q>0$，且a_4是$6a_2$和a_3的等差中项.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{1}{\log_2 a_n\cdot\log_2 a_{n+1}}$，求$\{b_n\}$的前 2023 项和$T_{2023}$.

18. 2023 年秋季，支原体肺炎在我国各地流行，该疾病的主要感染群体为青少年和老年人，某市医院传染病科在该市各医院某段时间就医且年龄在 70 岁以上的老年人中随机抽查了 200 人的情况，并将调查结果整理如下：

	有慢性疾病	没有慢性疾病	合计
未感染支原体肺炎	60	80	140
感染支原体肺炎	40	20	60
合计	100	100	200

（1）是否有 99.5%的把握认为 70 岁以上老人感染支原体肺炎与自身有慢性疾病有关？

（2）现从感染支原体肺炎的 60 位老人中按分层抽样的方式抽出 6 人，再从 6 人中随机抽出 2 人作为医学研究对象并免费治疗，求 2 个人中恰有 1 个人患有慢性疾病的概率.

附表：

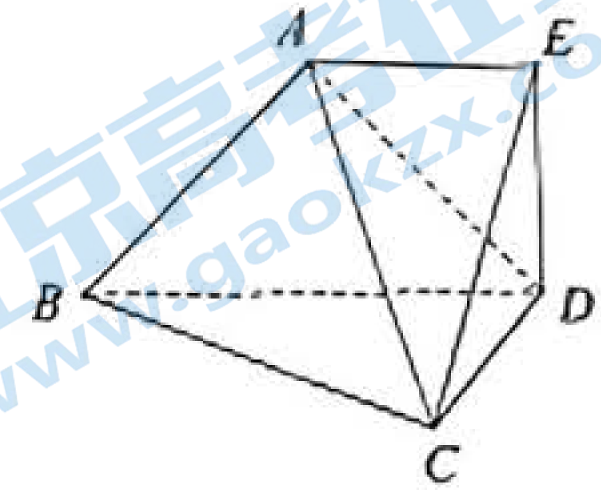
$P(K^2\geqslant k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ （其中 $n=a+b+c+d$）

19. 如图，在四棱锥 $C-ABDE$ 中，$DE\perp$ 平面 BCD，$BD=4$，$DE=2\sqrt{2}$，$AB=AD=2\sqrt{3}$.

(1) 求证：$AE\parallel$ 平面 BCD；

(2) 若 $BC\perp CD$，且直线 BC 与 AE 所成角为 30°，求点 E 到平面 ABC 的距离.



20. 设函数 $f(x)=(x-1)e^{x}-x-1$（e 为自然对数的底数）

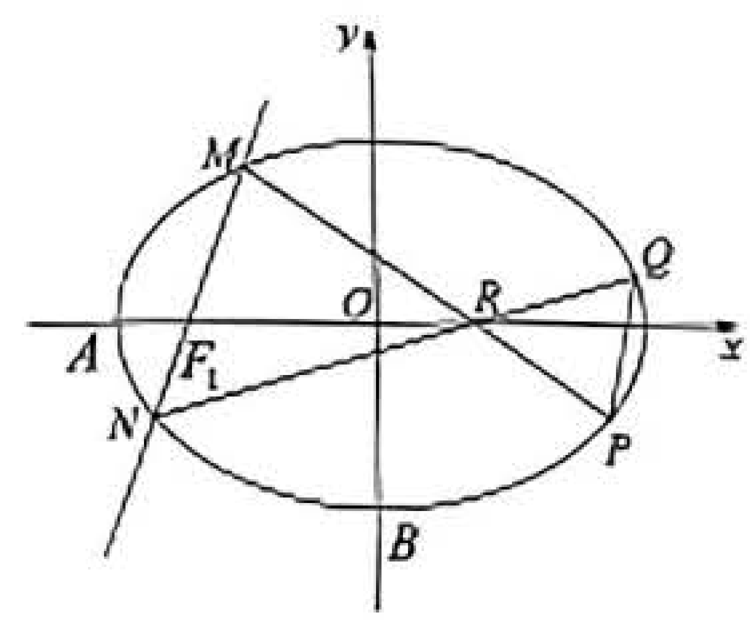
(1) 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形面积；

(2) 证明：$f(x)$ 有且仅有两个零点 x_1，x_2，且 $x_1+x_2=0$.

21. 如图，椭圆 E：$\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的左顶点为 A，下顶点为 B，过左焦点 F_1 且斜率为 k 的直线交椭圆 E 于 M，N 两点.

(1) 求以 O 为圆心且与直线 AB 相切的圆的方程；

(2) 设 $R(1,0)$，连结 MR，NR 并延长分别交椭圆 E 于 P，Q 两点，设 PQ 的斜率为 k'. 则是否存在常数 λ，使得 $k=\lambda k'$ 恒成立？若存在，求出 λ 的值；若不存在，说明理由.



（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分.

22. 在直角坐标系 xOy 中，直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$），把 C_1 绕坐标原点逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到 C_2，以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴，取相同的单位长度建立极坐标系.

(1) 写出 C_1，C_2 的极坐标方程；

(2) 若曲线 C_3 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$，且 C_1 与 C_3 交于点 A，C_2 与 C_3 交于点 B（A，B 与点 O 不重合），求 ΔAOB 面积的最大值.

23. 已知函数 $f(x)=|x-4|-|x+2|$.

(1) 若 $f(x)-a^2+5a\geq 0$ 恒成立，求 a 取值范围；

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为 M，正实数 a，b，c 满足：$a+b+c=M$，求 $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+3}$ 的最大值.

文科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	C	D	D	A	B	A	C	A	B	B	C	D

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡上．

13. $\underline{\ 9\ }$　　14. $\underline{-3}$　　15. $\underline{78\pi}$　　16. $\underline{\frac{1}{2}}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17—21 题必考题，每个试题考生必须作答.第 22、23 题为选考题，考试根据要求作答.

(一)必考题

17．解：(1)$\because$ 数列$\{a_n\}$是等比数列且a_4是$6a_2$和a_3的等差中项

$\therefore 2a_4=6a_2+a_3$　即：$2a_1q^3=6a_1q+a_1q^2$

$\therefore 2q^2-q-6=0$

解得：$q=2$或$q=-\frac{3}{2}$（舍去）……………………………………………………4分

又$\because a_1=2$

$\therefore a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n\ (n\in N^*)$. ……………………………………………………6分

(2):由(1)得$b_n=\frac{1}{\log_2 a_n\cdot\log_2 a_{n+1}}=\frac{1}{\log_2 2^n\cdot\log_2 2^{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ ……………………8分

$$T_{2023}=b_1+b_2+\cdots+b_{2022}+b_{2023}$$
$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023})+(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024})$$
$$=1-\frac{1}{2024}=\frac{2023}{2024}.$$ ……………………………………………………12分

18 解：(1).由题意得$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200(60\times 20-80\times 40)^2}{100\times 100\times 140\times 60}$

$=\frac{200}{21}\approx 9.524>7.879$ ……………………4分

故有 99.5%的把握认为 70 岁以上老人感染支原体肺炎与自身有慢性疾病有关. ……………5分

(2).现从感染支原体肺炎的 60 位老人中按分层抽样的方式抽出 6 人，则抽出的 6 人中有慢性疾病 4 人，无有慢性疾病 2 人. ……………………………………………………6分

设慢性疾病 4 人编号为A_1，A_2，A_3，A_4；无有慢性疾病 2 人编号为B_1，B_2 .

现从 6 人中随机抽出 2 人共 15 种情况.

具体情况如下：

A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，$\underline{\underline{A_1B_1，A_1B_2}}$； A_2A_3，A_2A_4，$\underline{\underline{A_2B_1，A_2B_2}}$； A_3A_4，$\underline{\underline{A_3B_1，A_3B_2}}$

$\underline{\underline{A_4B_1，A_4B_2}}$； B_1B_2 ……………………………………………………………………10分

其中抽出的 2 人中恰有 1 个人患有慢性疾病，共 8 种情况(划线部分即为所示).

故抽出的 2 人中恰有 1 个人患有慢性疾病的概率为 $P=\frac{8}{15}$． ……………………12分

19 解：

(1).方法一：

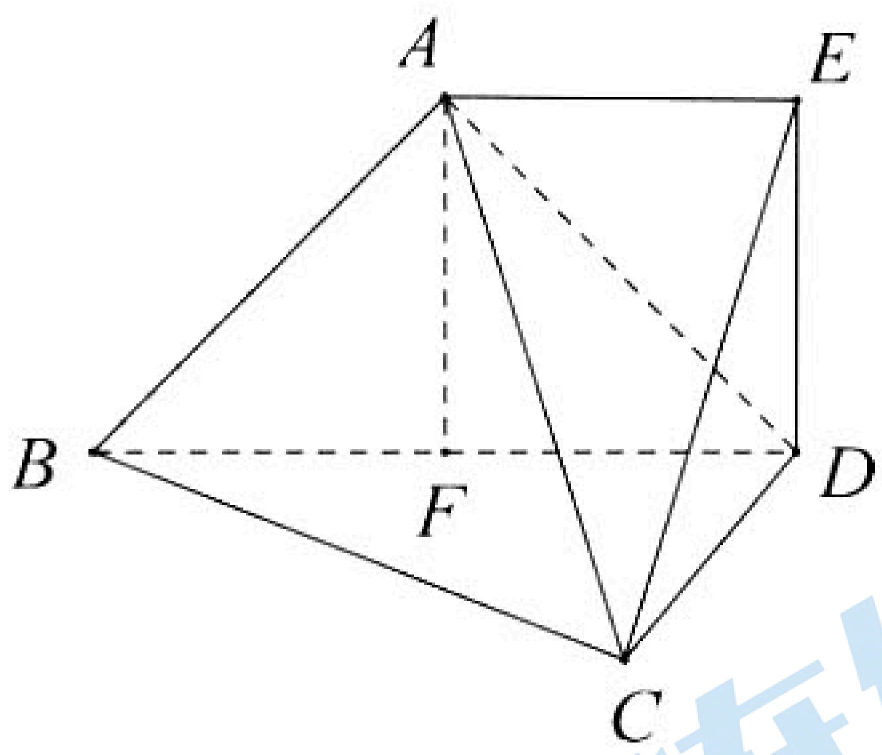
证明：取 BD 的中点 F，连结 AF

$\because AD=AB$

$\therefore AF\perp BD$

$\because BD=4 \quad AD=2\sqrt{3}$

$\therefore DF=2 \quad AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=2\sqrt{2}$ ……………………………2分



$\because DE\perp$ 平面BCD

$\therefore DE\perp BD$

$\because DE=2\sqrt{2}$

$\therefore AF\,//\,DE$，$AF=DE$

$\therefore$四边形$FDEA$为矩形 ……………………………………………………4分

$\therefore AE\,//\,BD$

$\because AE\not\subset$ 平面$BCD \quad BD\subset$ 平面BCD

$\therefore AE\,//$ 平面BCD ……………………………………………………6分

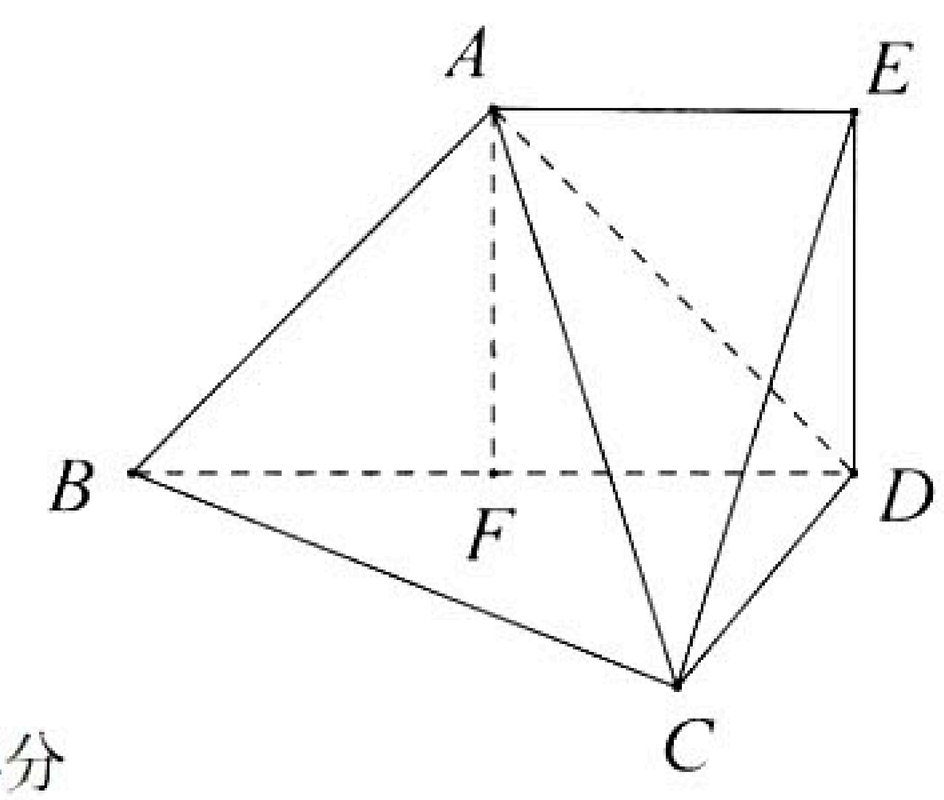
方法二：

证明：取 BD 的中点 F，连结 AF

$\because AD=AB=2\sqrt{3}$，$BD=4$

$\therefore AF\perp BD$

$\therefore AF=\sqrt{AD^2-DF^2}=2\sqrt{2}$ ……………………………2分



$\because DE\perp$ 平面BCD，$DE\subset$ 平面$ABDE$

$\therefore$ 平面$ABDE\perp$ 平面BCD

$\because AF\subset$ 平面$ABDE$，平面$ABDE\cap$ 平面$BCD=BD$

$\therefore AF\perp$ 平面BCD ……………………………………………4分

$\therefore AF // DE$，$AF = DE$

$\therefore$四边形$FDEA$为矩形 ……………………………………………………5分

$\therefore AE // BD$

$\because AE \not\subset$平面BCD　$BD \subset$平面BCD

$\therefore AE //$平面BCD ……………………………………………………………6分

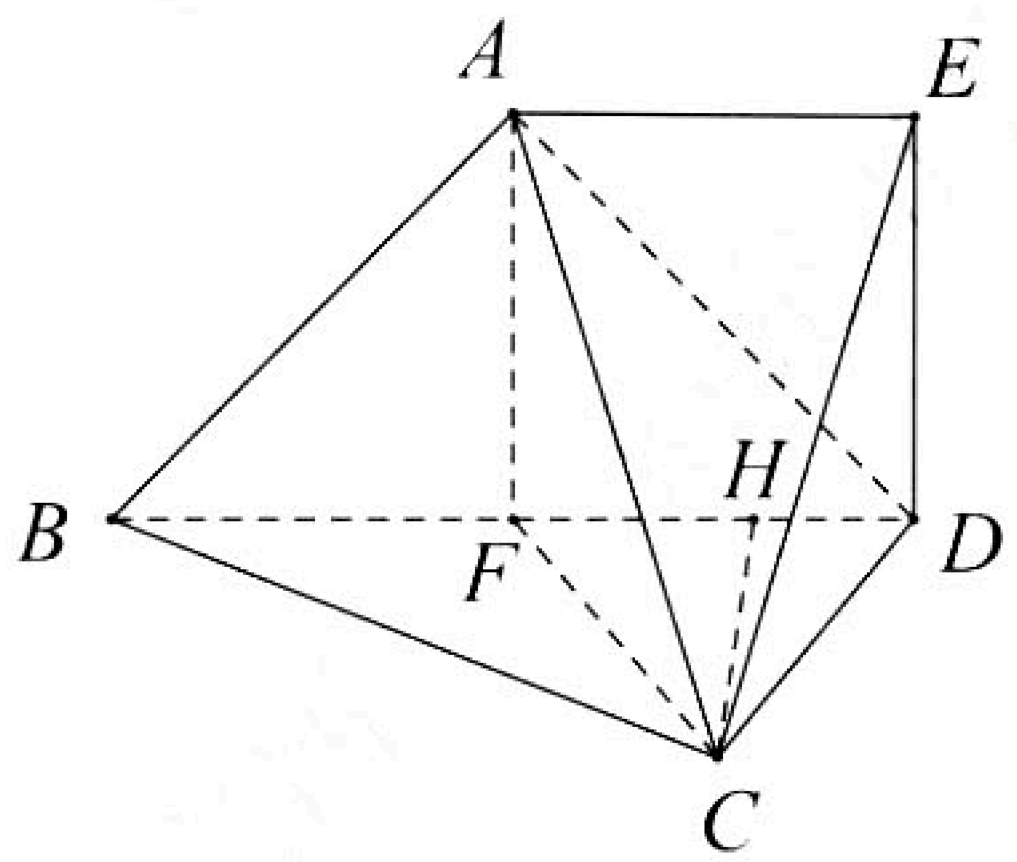
(2). $\because AE // BD$，直线 BC 与 AE 所成角为 $30°$

$\therefore \angle CBD = 30°$

$\because BC \perp CD$，$BD = 4$

$\therefore BC = 2\sqrt{3}$，$CD = 2$ ………………………………………………………7分

过C 作 BD的垂线交 BD 于 H



$\therefore CH \perp BD$

$\because DE \perp$平面BCD，$CH \subset$平面BCD

$\therefore DE \perp CH$

又$BD \cap DE = D$

$\therefore CH \perp$平面$ABDE$

在 ΔBCD 中，由$S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{2} BC \times CD = \dfrac{1}{2} BD \times CH$，得$CH = \sqrt{3}$

又 $S_{\Delta BAE} = S_{\Delta DAE} = \dfrac{1}{2} AE \times DE = 2\sqrt{2}$

$\therefore V_{C-BAE} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta BAE} \times CH = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ ……………………………………………9分

$\because AF // DE$，$DE \perp$平面BCD

$\therefore AF \perp$平面BCD

$\therefore AF \perp CF$

又$CF = \dfrac{1}{2} BD = 2$，$AF = 2\sqrt{2}$

$\therefore AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = 2\sqrt{3}$

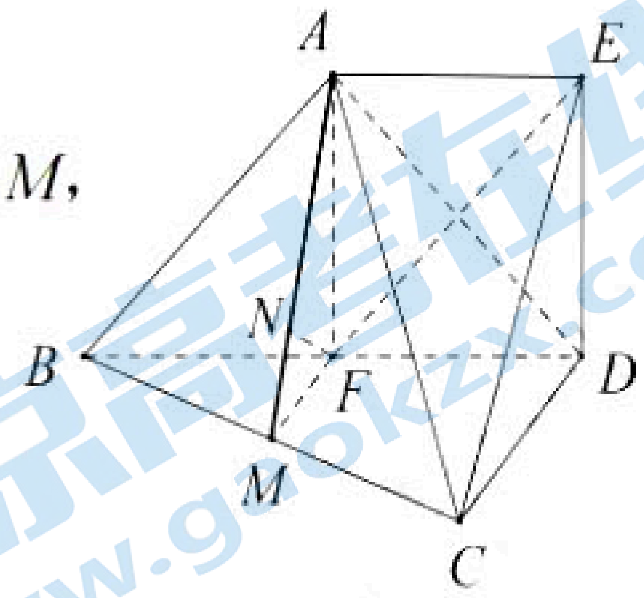
$\therefore \Delta ABC$ 为等边三角形，$S_{\Delta ABC} = 3\sqrt{3}$ ……………………………………………………11分

设点 E 到平面 ABC 的距离为 h，由$V_{E-ABC} = V_{C-BAE}$ 得：$h = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

故点 E 到平面 ABC 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ……………………………………………12分

注：以下方法酌情给分

由EF // 平面ABC知，E、F到平面ABC的距离相等，如右图，取BC中点M，



过F作$FN\perp AM$于N，则可证$FN\perp$平面ABC，即E到平面ABC的距离等于FN.

20 解：(1).由题意 $f'(x)=xe^x-1$， 得$f'(0)=-1$ ……………………1分

又$f(0)=-2$

故切线方程为 $y+2=-x$，即$x+y+2=0$ ……………………………3分

令$x=0$得$y=-2$； 令$y=0$得$x=-2$

$\therefore$ 三角形面积$S=\dfrac{1}{2}\times|-2|\times|-2|=2$ ……………………………5分

(2).方法一：

由题意得 $f'(x)=xe^x-1$，显然 $x\le 0$时，$f'(x)<0$ ………………………6分

又$x>0$时，令$\mu(x)=f'(x)=xe^x-1$

$\therefore \mu'(x)=(x+1)e^x>0$，故$\mu(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

$\therefore f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

又 $f'(0)=-1<0$，$f'(1)=e-1>0$，故$\exists x_0\in(0,1)$使得$f'(x_0)=0$

$\therefore$ 当$x<x_0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当$x>x_0$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增 …………8分

又$f(-2)=-\dfrac{3}{e^2}+1>0$，$f(-1)=-\dfrac{2}{e}<0$，$f(1)=-2<0$，$f(2)=e^2-3>0$

所以 $f(x)$ 有且仅有两个零点 x_1，x_2，且$x_1\in(-2,-1)$，$x_2\in(1,2)$ ……………………10分

由$f(x_1)=(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1=0$ 知，$f(-x_1)=(-x_1-1)e^{-x_1}+x_1-1=\dfrac{(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1}{e^{x_1}}=0$ 也成立

又由$x_1\in(-2,-1)$知$x_1\ne -x_1$

$\therefore -x_1=x_2$ 即$x_1+x_2=0$ ………………………………………12分

方法二：

$\because f(1)=-2\ne 0$

$\therefore x=1$不是方程$f(x)=0$的根

令$g(x)=e^x-\dfrac{x+1}{x-1}$，则$f(x)=0\Leftrightarrow g(x)=0$ ……………………6分

又$g'(x)=e^x+\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$，$g(x)$的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

$\therefore g(x)$在$(-\infty,1)$单调递增，在$(1,+\infty)$单调递增 ……………………7分

$\because g(-2)=\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{1}{3}<0$，$g(-\dfrac{3}{2})=\dfrac{1}{e^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1}{5}>0$

$g(\dfrac{3}{2})=e^{\frac{3}{2}}-5<0$，$g(2)=e^2-1>0$

$\therefore g(x)$有且仅有两个零点x_1，x_2，且$x_1\in(-2,-\dfrac{3}{2})$，$x_2\in(\dfrac{3}{2},2)$ ……………………9分

所以$f(x)$有且仅有两个零点x_1，x_2，且$x_1\in(-2,-\dfrac{3}{2})$，$x_2\in(\dfrac{3}{2},2)$……………………10分

若$f(x_1)=(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1=0$．则 $f(-x_1)=(-x_1-1)e^{-x_1}+x_1-1=\dfrac{(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1}{e^{x_1}}=0$

$\because x_1\in(-2,-\dfrac{3}{2})$

$\therefore -x_1\neq x_1$

$\therefore -x_1=x_2$ 即$x_1+x_2=0$ ……………………12分

方法三：

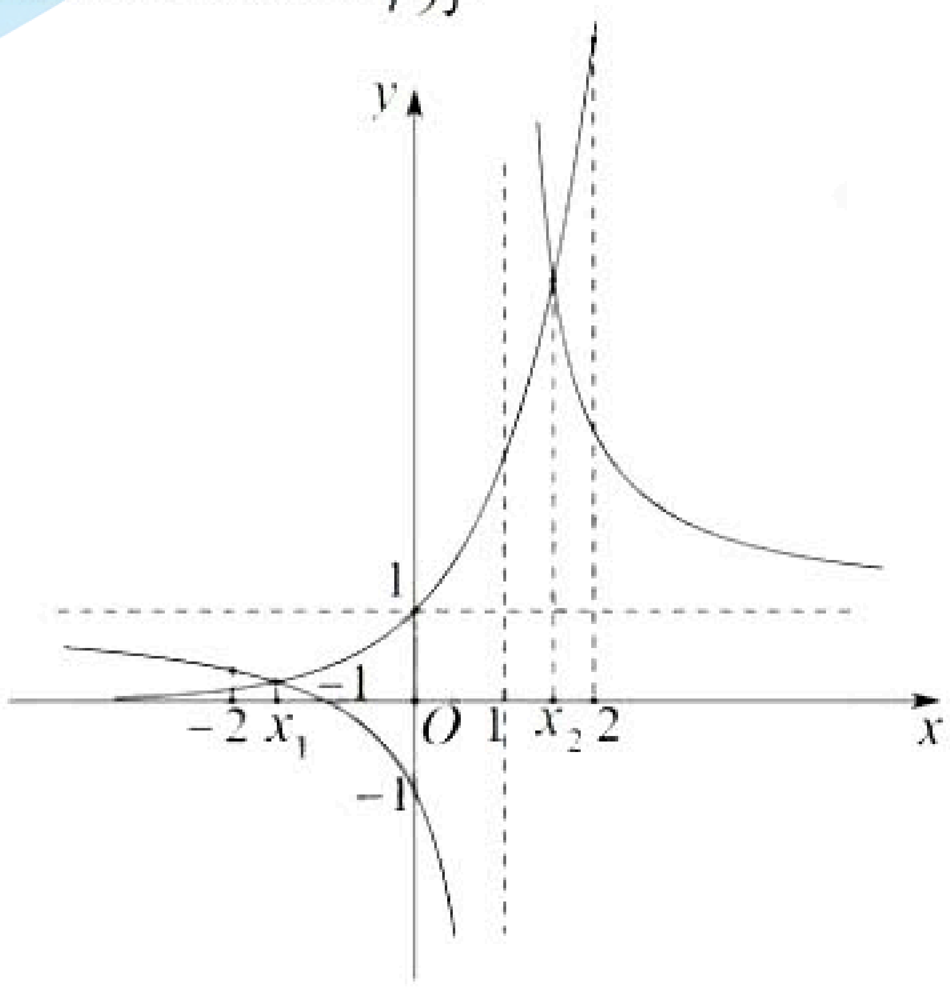
$\because f(1)=-2\neq 0$

$\therefore$由$f(x)=0$ 得：$e^x=\dfrac{x+1}{x-1}$

$\therefore f(x)$的零点就是函数$h(x)=e^x$与函数$\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$图象交点的横坐标 ……………………6分

$h(x)$与$\varphi(x)$的图象如右图所示：

$h(x)$在R上单调递增，$\varphi(x)$在$(-\infty,1)$，$(1,+\infty)$是减函数 ……………………7分



$\because h(-2)=\dfrac{1}{e^2}$，$\varphi(-2)=\dfrac{1}{3}$，$h(-2)<\varphi(-2)$

$h(-1)=\dfrac{1}{e}$，$\varphi(-1)=0$，$h(-1)>\varphi(-1)$

$h(\dfrac{3}{2})=e^{\frac{3}{2}}$，$\varphi(\dfrac{3}{2})=5$，$h(\dfrac{3}{2})<\varphi(\dfrac{3}{2})$

$h(2)=e^2$，$\varphi(2)=3$，$h(2)>\varphi(2)$

所以$f(x)$有且仅有两个零点x_1，x_2，且$x_1\in(-2,-1)$，$x_2\in(\dfrac{3}{2},2)$ ……………………10分

若$f(x_1)=(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1=0$，则 $f(-x_1)=(-x_1-1)e^{-x_1}+x_1-1=\dfrac{(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1}{e^{x_1}}=0$

$\because x_1\in(-2,-1)$

$\therefore -x_1\neq x_1$

$\therefore -x_1=x_2$ 即$x_1+x_2=0$ ……………………12分

方法四：

在$f(x)=(x-1)e^x-x-1$中，令$e^x=t$，则$x=\ln t$

$\therefore f(x)$可化为$g(t)=(\ln t-1)t-\ln t-1=(t-1)\ln t-t-1$

由$t=e^x$是R上的增函数可知：

证明$f(x)$有且仅有两个零点即证明$g(t)$有且仅有两个零点 ……………………6分

$\because g'(t)=\ln t-\dfrac{1}{t}$，$g'(t)$在$(0,+\infty)$是增函数

由$g'(1)=-1$，$g'(e)=1-\dfrac{1}{e}>0$ 知：$\exists t_0\in(1,e)$使得$g'(t_0)=\ln t_0-\dfrac{1}{t_0}=0$

$\therefore t\in(0,t_0)$时，$g'(t)<0$, $g(t)$在$(0,t_0)$是减函数

$t\in(t_0,+\infty)$时，$g'(t)>0$, $g(t)$在$(t_0,+\infty)$是增函数 ……………………8分

又$g(\dfrac{1}{e^2})=1-\dfrac{3}{e^2}>0$，$g(\dfrac{1}{e})=-\dfrac{2}{e}<0$

$g(e)=-2<0$，$g(e^2)=e^2-3>0$

$\therefore g(t)$有且仅有两个零点t_1，t_2，且$t_1\in(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e})$，$t_2\in(e,e^2)$

所以$f(x)$有且仅有两个零点x_1，x_2，且$x_1=\ln t_1\in(-2,-1)$，$x_2=\ln t_2\in(1,2)$ ……………10分

若$f(x_1)=(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1=0$，则 $f(-x_1)=(-x_1-1)e^{-x_1}+x_1-1=\dfrac{(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1}{e^{x_1}}=0$

$\because x_1\in(-2,-1)$

$\therefore -x_1\neq x_1$

$\therefore -x_1=x_2$ 即$x_1+x_2=0$ ……………………12分

方法五：

在$f(x)=(x-1)e^x-x-1$中，由$f(0)=-2\neq 0$知：$x=0$不是$f(x)$的零点

令$e^x=t$，则$x=\ln t\ (t\neq 1)$

$\therefore f(x)=0\Leftrightarrow \ln t-\dfrac{t+1}{t-1}=0$ ……………………………………………6分

$\therefore$要证明$f(x)$有且仅有两个零点即证明$g(t)=\ln t-\dfrac{t+1}{t-1}$有且仅有两个零点

又$g'(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{2}{(t-1)^2}>0$ 且$g(t)$的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$

$\therefore g(t)$在$(0,1)$和$(1,+\infty)$单调递增 ……………………………………………8分

又$g(\dfrac{1}{e^2})=\dfrac{e^2-3}{1-e^2}<0$，$g(\dfrac{1}{e})=\dfrac{2}{e-1}>0$

$g(e)=\dfrac{2}{1-e}<0$，$g(e^2)=\dfrac{e^2-3}{e^2-1}>0$

$\therefore g(t)$有且仅有两个零点t_1，t_2，且$t_1\in(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{1}{e})$，$t_2\in(e,e^2)$

所以$f(x)$有且仅有两个零点x_1，x_2，且$x_1=\ln t_1\in(-2,-1)$，$x_2=\ln t_2\in(1,2)$ ……………10分

若$f(x_1)=(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1=0$．则 $f(-x_1)=(-x_1-1)e^{-x_1}+x_1-1=\dfrac{(x_1-1)e^{x_1}-x_1-1}{e^{x_1}}=0$

$\because x_1\in(-2,-1)$

$\therefore -x_1\neq x_1$

$\therefore -x_1=x_2$ 即$x_1+x_2=0$ ……………………12分

21 解：(1).由$A(-\sqrt{5},0)$，$B(0,-1)$得直线AB的方程为：$x+\sqrt{5}y+\sqrt{5}=0$ ……………2分

故原点到直线AB的距离$d=\dfrac{|\sqrt{5}|}{\sqrt{1+5}}=\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

$\because$直线AB与圆O相切

$\therefore$圆的半径$r=d=\sqrt{\dfrac{5}{6}}$ ……………………4分

故以O为圆心且与AB相切的圆的方程为：$x^2+y^2=\dfrac{5}{6}$ ……………………5分

方法一：

(2).由题意可知$F_1(-2,0)$，故MN方程为：$y=k(x+2)$ ……………………6分

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

则直线MP的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)$

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{5}+y^2=1\\ y=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x-1)\end{cases}$ 得:$[5y_1^2+(x_1-1)^2]x^2-10y_1^2x+5y_1^2-5x_1^2+10x_1-5=0\cdots\cdots(*)$

又$M(x_1,y_1)$在椭圆E上，故$\dfrac{x_1^2}{5}+y_1^2=1$，即$5y_1^2=5-x_1^2$

代入(*)式整理得：$(3-x_1)x^2-5y_1^2x+5x_1-3x_1^2=0$ ……………………8分

显然$3-x_1\neq 0$，$\Delta>0$

$\therefore x_1\cdot x_P=\dfrac{5x_1-3x_1^2}{3-x_1}$

$\therefore x_P=\dfrac{3x_1-5}{x_1-3}$， $y_P=\dfrac{y_1}{x_1-1}(x_P-1)=\dfrac{2y_1}{x_1-3}=\dfrac{2k(x_1+2)}{x_1-3}$

故$P\left(\dfrac{3x_1-5}{x_1-3},\dfrac{2k(x_1+2)}{x_1-3}\right)$ ……………………9分

同理：$Q\left(\dfrac{3x_2-5}{x_2-3},\dfrac{2k(x_2+2)}{x_2-3}\right)$；

$$\therefore k'=\frac{\dfrac{2k(x_1+2)}{x_1-3}-\dfrac{2k(x_2+2)}{x_2-3}}{\dfrac{3x_1-5}{x_1-3}-\dfrac{3x_2-5}{x_2-3}}=\frac{2k[(x_1+2)(x_2-3)-(x_2+2)(x_1-3)]}{(3x_1-5)(x_2-3)-(3x_2-5)(x_1-3)}$$

$$=\frac{2k(5x_2-5x_1)}{4x_2-4x_1}=\frac{5k}{2}$$ ……………………11分

故$k'=\dfrac{5k}{2}$，即$k=\dfrac{2}{5}k'$

所以：存在常数$\lambda=\dfrac{2}{5}$满足题意 ……………………12分

方法二：

由题意可知$F_1(-2,0)$，故MN方程为：$y=k(x+2)$ ……………………6分

设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$P(x_3,y_3)$，$Q(x_4,y_4)$

设$\overrightarrow{MR}=t\overrightarrow{RP}$

$\therefore(1-x_1,-y_1)=t(x_3-1,y_3)$

$\begin{cases}1-x_1=t(x_3-1)\\ -y_1=ty_3\end{cases}$ 得:$\begin{cases}x_1+tx_3=1+t\\ y_1+ty_3=0\end{cases}$ ……(*) ……………………7分

$\because \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{5}+y_1^2=1 \cdots\cdots ① \\ \dfrac{x_3^2}{5}+y_3^2=1 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 由① $-$ ② $\times t^2$得：$\dfrac{x_1^2-t^2x_3^2}{5}+y_1^2-t^2y_3^2=1-t^2$

$\therefore \dfrac{(x_1+tx_3)(x_1-tx_3)}{5}+(y_1+ty_3)(y_1-ty_3)=1-t^2$

将(*)带入上式得：$\dfrac{(1+t)(x_1-tx_3)}{5}+0=1-t^2$ 即：$x_1-tx_3=5-5t$ …………………9分

又$\because x_1+tx_3=1+t$

$\therefore x_1=3-2t$，$x_3=3-\dfrac{2}{t}$

$\therefore y_3=-\dfrac{1}{t}y_1=-\dfrac{1}{t}k(x_1+2)=k(2-\dfrac{5}{t})$

设 $\overrightarrow{NR}=\mu\overrightarrow{RQ}$，同理可得：

$x_4=3-\dfrac{2}{\mu}$，$y_4=k(2-\dfrac{5}{\mu})$ ………………………………10分

$\therefore k'=\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\dfrac{k(2-\frac{5}{t})-k(2-\frac{5}{\mu})}{(3-\frac{2}{t})-(3-\frac{2}{\mu})}=\dfrac{5k(\frac{1}{t}-\frac{1}{\mu})}{2(\frac{1}{t}-\frac{1}{\mu})}=\dfrac{5}{2}k$ ……………………11分

故 $k'=\dfrac{5k}{2}$，即 $k=\dfrac{2}{5}k'$

所以：存在常数 $\lambda=\dfrac{2}{5}$ 满足题意 ……………………12分

22.解：(1).显然 C_1 是过原点且倾斜角为 α 的直线 ……………………1分

$\therefore C_1$ 的极坐标方程为 $\theta=\alpha$ $(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}，\rho\in R)$ ……………………3分

C_2 的极坐标方程为 $\theta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}$ $(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}，\rho\in R)$. …………………5分

(2).由 $\begin{cases}\rho=8\sin\theta \\ \theta=\alpha\end{cases}$ 得 A 的极坐标为 $(8\sin\alpha，\alpha)$

由 $\begin{cases}\rho=8\sin\theta \\ \theta=\alpha+\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 得 B 的极坐标为 $\left(8\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{2})，\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $\left(8\cos\alpha，\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)$. ……7分

$\therefore |OA|=8\sin\alpha$，$|OB|=8\cos\alpha$ ………………8分

$\therefore \Delta AOB$ 的面积为：$S=\dfrac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=32\sin\alpha\cos\alpha=16\sin2\alpha$ …………………9分

又 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\therefore \alpha = \frac{\pi}{4}$时，$\Delta AOB$ 面积的最大值为 16. ……………………10分

23.解：(1) $f(x) = |x-4| - |x+2| = \begin{cases} 6 & x < -2 \\ -2x+2 & -2 \le x < 4 \\ -6 & x \ge 4 \end{cases}$ ………………2分

$\therefore$ 当$x \ge 4$时，$f(x)_{\min} = -6$ ……………………………………………3分

$\because f(x) - a^2 + 5a \ge 0$ 恒成立

$\therefore -6 - a^2 + 5a \ge 0$ 即 $a^2 - 5a + 6 \le 0$

$\therefore 2 \le a \le 3$

故 a 的取值范围为$[2,3]$. ………………………………5分

(2) 由(1)知：$M = 6$. 即$a + b + c = 6$ ……………………6分

法 1：

$\therefore (\sqrt{a+1} + \sqrt{b+2} + \sqrt{c+3})^2$

$= a+1+b+2+c+3+2\sqrt{(a+1)(b+2)} + 2\sqrt{(a+1)(c+3)} + 2\sqrt{(b+2)(c+3)}$

$\le a+b+c+6+(a+1)+(b+2)+(a+1)+(c+3)+(b+2)+(c+3)$

$= 3(a+b+c)+18 = 36$ ……………………………………………………………………8分

当且仅当$\begin{cases} \sqrt{a+1} = \sqrt{b+2} = \sqrt{c+3} \\ a+b+c=6 \end{cases}$，即$\begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$时等号成立 ……………………9分

$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+2} + \sqrt{c+3}$ 的最大值为 6. ……………………10分

法 2：（柯西不等式）

$\because a > 0 \quad b > 0 \quad c > 0$

$\therefore (\sqrt{a+1} \cdot 1 + \sqrt{b+2} \cdot 1 + \sqrt{c+3} \cdot 1)^2$

$\le \left[(\sqrt{a+1})^2 + (\sqrt{b+2})^2 + (\sqrt{c+3})^2 \right] \cdot (1^2 + 1^2 + 1^2)$

$= (a+b+c+6) \times 3 = 36$ ……………………………………………8分

当且仅当$\begin{cases} \frac{\sqrt{a+1}}{1} = \frac{\sqrt{b+2}}{1} = \frac{\sqrt{c+3}}{1} \\ a+b+c=6 \end{cases}$，即$\begin{cases} a=3 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$时等号成立 ……………………9分

$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+2} + \sqrt{c+3}$ 的最大值为 6. ……………………10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！