高三数学参考答案、提示及评分细则

1. A　因为 $A=\{x\mid 0<x+1<2\}=\{x\mid -1<x<1\}$，$B=\{x\mid x<0$ 或 $x>2\}$，所以 $A\cap B=\{x\mid -1<x<0\}$. 故选 A.

2. C　$\sin 165^\circ\cos 525^\circ=\sin(180^\circ-15^\circ)\cos(540^\circ-15^\circ)=\sin 15^\circ(-\cos 15^\circ)=-\frac{1}{2}\sin 30^\circ=-\frac{1}{4}$. 故选 C.

3. B　由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 两边平方得 $1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1=4(1-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+1)$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{3}{5}$，又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为单位向量，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的余弦值为 $\frac{3}{5}$. 故选 B.

4. B　由 $(z-3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})=5$，得 $z=\frac{5}{2-\mathrm{i}}+3\mathrm{i}=\frac{5(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}+3\mathrm{i}=2+\mathrm{i}+3\mathrm{i}=2+4\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 故选 B.

5. D　联立 l 与 C 的方程并消去 x，得 $y^2-py+4p=0$. 因为 l 与 C 只有 1 个公共点，所以 $(-p)^2-16p=0$，结合 $p>0$，解得 $p=16$，则 $F(8,0)$，所以 F 到 l 的距离 $d=\frac{|2\times 8-0+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=4\sqrt{5}$. 故选 D.

6. C　展开式中的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r x^{n-r}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=\left(\frac{1}{2}\right)^r\mathrm{C}_n^r x^{n-\frac{3}{2}r}$，所以前三项系数依次为 $\mathrm{C}_n^0,\frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1,\frac{1}{4}\mathrm{C}_n^2$，依题意，有 $\mathrm{C}_n^0+\frac{1}{4}\mathrm{C}_n^2=\mathrm{C}_n^1$，即 $1+\frac{1}{4}\times\frac{n(n-1)}{2}=n$，整理，得 $n^2-9n+8=0$，解得 $n=1$（舍去）或 $n=8$. 由二项式系数的性质可知，展开式中第 5 项的二项式系数最大，即 $T_5=\left(\frac{1}{2}\right)^4\mathrm{C}_8^4 x^{8-\frac{3}{2}\times 4}=\frac{35}{8}x^2$. 故选 C.

7. D　$f(x)=2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)}=2\sqrt{\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}$. 由 $2k\pi\leqslant 3x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$. 故选 D.

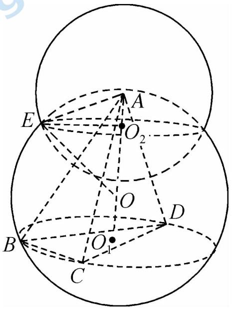
8. A　因为 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，且在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；$\ln 1.04<\ln \mathrm{e}=1<1.04$，即 $\ln 1.04<1.04$；令 $h(x)=\mathrm{e}^x-(x+1)$，当 $x>0$ 时，$h'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，则 $h(x)$ 单调递增，所以 $h(0.04)=\mathrm{e}^{0.04}-(0.04+1)=\mathrm{e}^{0.04}-1.04>h(0)=0$，即 $\mathrm{e}^{0.04}>1.04$，所以 $\mathrm{e}^{0.04}>1.04>\ln 1.04$. 而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故有 $f(\ln 1.04)<f(1.04)<f(\mathrm{e}^{0.04})$，即 $a<b<c$. 故选 A.

9. BC　由 $2a_{n+1}=3a_n-2$，得 $2(a_{n+1}-2)=3(a_n-2)$，因为 $a_1-2=1\neq 0$，所以 $a_2-2\neq 0,a_3-2\neq 0,\cdots,a_n-2\neq 0$，从而 $\frac{a_{n+1}-2}{a_n-2}=\frac{3}{2}$，所以 $\{a_n-2\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列，所以 $a_n-2=1\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$，即 $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+2$. 所以 $a_{2n}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2n-1}+2$，所以 $a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\frac{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{9}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{9}{4}}+2n=\frac{6}{5}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^n-1\right]+2n$，所以 A 错误，B 正确；由 $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}+2$，易知 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，C 正确；当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n>a_3=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2>4$，当 $n=1$ 时，$a_2+\frac{2}{3}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+2=\frac{25}{6}>4$，D 错误. 故选 BC.

10. BD　由题意，$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，则 $[x+1]=[x]+1$，所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x+3)=\left[\frac{x+3+1}{3}\right]-\left[\frac{x+3}{3}\right]=\left[\frac{x+1}{3}+1\right]-\left[\frac{x}{3}+1\right]=\left[\frac{x+1}{3}\right]+1-\left(\left[\frac{x}{3}\right]+1\right)=\left[\frac{x+1}{3}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]=f(x)$，则函数 $f(x)$ 是以 3 为周期的函数，当

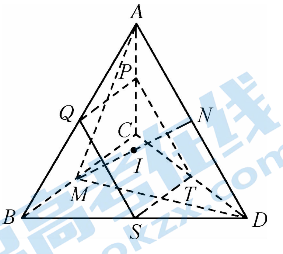
$x\in[0,2)$时，$f(x)=\left[\frac{x+1}{3}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]=0-0=0$；当 $x\in[2,3)$时，$f(x)=\left[\frac{x+1}{3}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]=1-0=1$，则 $f(x)=\begin{cases}0,x\in[0,2),\\1,x\in[2,3),\end{cases}$ 又 $f(x)$是以 3 为周期的函数，则 $f(x)$的值域为$\{0,1\}$，B 和 D 均正确；$f(-1)=f(2)=1$，$f(1)=0$，所以 $f(-1)\neq -f(1)$，故 $f(x)$不是奇函数，A 错误；当 $x\in[0,2)$时，$f(x)=0$，故 $f(x)$在$[0,2)$上无单调性，C 错误. 故选 BD.

11\. AC 对于 A，易算出该正四面体外接球的半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{4}\times 4=\sqrt{6}$，所以该正四面体可以放入半径为$\sqrt{7}$的球内，故 A 正确；



对于 B，由 A 可知四面体外接球的半径 $R=\sqrt{6}$，如图，在$\triangle AEO$ 中，$\cos\angle EAO=\frac{AE^2+AO^2-EO^2}{2AE\cdot AO}=\frac{2^2+(\sqrt{6})^2-(\sqrt{6})^2}{2\times 2\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以 $\sin\angle EAO=\frac{\sqrt{30}}{6}$；在$\triangle EAO_2$ 中，$EO_2=EA\sin\angle EAO_2=2\times\frac{\sqrt{30}}{6}=\frac{\sqrt{30}}{3}$，易知两个球面的交线为圆，其周长为 $2\pi\times\frac{\sqrt{30}}{3}=\frac{2\sqrt{30}}{3}\pi$，故 B 错误；

对于 C，取 BC 的中点 M，连接 AM，DM. 易证 $BC\perp$平面 ADM，所以 $BC\perp AD$；又 $AD//$平面 β，平面 $\beta\cap$平面 $ABD=QS$，所以 $AD//QS$，同理 $AD//PT$，所以 $QS//PT$，同理 $PQ//BC//ST$，所以四边形 $PQST$ 为平行四边形；又$\angle QST$ 是 AD 与 BC 所成的角，所以$\angle QST=90°$，于是四边形 $PQST$ 为矩形，则 C 正确；



对于 D，设 $AP=\lambda AC(0<\lambda<1)$，易证 $PQ//BC$，所以$\frac{PQ}{BC}=\frac{AP}{AC}$，$\frac{PQ}{4}=\lambda$，可得 $QP=4\lambda$，同理可得 $QS=4(1-\lambda)$. 取 AD 中点 N，连接 MN，交平面 $PQST$ 于点 I. 由上面的论证可知 $MN\perp$平面 $PQST$. 因为平面 $PQST$ 与 AD，BC 都平行，所以可得$\frac{MI}{MN}=\frac{PC}{AC}=1-\lambda$，又易知 $MN=2\sqrt{2}$，所以 $MI=2\sqrt{2}(1-\lambda)$，即 C 到平面 $PQST$ 的距离为 $2\sqrt{2}(1-\lambda)$，所以 $V_{C\text{-}PQST}=\frac{1}{3}\cdot 4\lambda\cdot(4-4\lambda)\cdot 2\sqrt{2}(1-\lambda)=\frac{32\sqrt{2}}{3}(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda)$. 令 $f(\lambda)=\lambda^3-2\lambda^2+\lambda$，$f'(\lambda)=3\lambda^2-4\lambda+1=(3\lambda-1)(\lambda-1)$，因为 $f'(\lambda)>0\Leftrightarrow 0<\lambda<\frac{1}{3}$；$f'(\lambda)<0\Leftrightarrow\frac{1}{3}<\lambda<1$，所以 $f(\lambda)_{\max}=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$，所以$(V_{C\text{-}PQST})_{\max}=\frac{128\sqrt{2}}{81}$，故 D 错误. 故选 AC.

12\. $\frac{6}{25}$ 小张和小李从 5 个景点中各自选择 1 个，共有 $5\times 5=25$ 种可能，5 个景点中有 3 个在洛阳，则他们都选择去洛阳游玩，且不去同一景点的情况有 $3\times 2=6$ 种，故所求概率$P=\frac{6}{25}$.

13\. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$($c=\sqrt{a^2+b^2}$)，解得$|F_2A|=\frac{b^2}{a}$，$\tan\angle AF_1F_2=\frac{|AF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{b^2}{2ac}$，解得$\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，所以渐近线方程为 $y=\pm 2x$，由对称性，不妨取 $y=2x$ 进行计算，弦长$|MN|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{16}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

14\. $2\sqrt{3}\pi$ 设底面半径为 r，则圆锥的高 $h=SO=\sqrt{9-r^2}$，体积 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{9-r^2}=\frac{1}{3}\pi\sqrt{(9-r^2)r^4}$. 令 $t=r^2\in(0,9)$，$f(t)=(9-t)t^2$，则 $f'(t)=-3t^2+18t=-3t(t-6)$，当 $t\in(0,6)$时，$f(t)$单调递增，当 $t\in(6,9)$时，$f(t)$单

调递减；所以当 $t=6$，即 $r=\sqrt{6}$ 时，V 取最大值，此时 $h=\sqrt{9-6}=\sqrt{3}$，$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}\times6\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$.

15.(1)证明：由 $c(\cos B-\cos C)=(c-b)\cos C$，及正弦定理，得

$\cos C(\sin B-\sin C)+\sin C(\cos B-\cos C)=0$， …………………………………… 1 分

即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin C\cos C$，

即 $\sin(B+C)=\sin 2C$. …………………………………… 2 分

因为 $A+C+B=\pi$，所以 $\sin(\pi-A)=\sin 2C$，

即 $\sin A=\sin 2C$. …………………………………… 3 分

因为 $A\in(0,\pi)$，$2C\in(0,2\pi)$，

所以 $A=2C$ 或 $A+2C=\pi$.

因为 $A\neq 2C$，所以 $A+2C=\pi$，又 $A+C+B=\pi$，所以 $B=C$.

故 $\triangle ABC$ 是等腰三角形. …………………………………… 6 分

(2)解：因为 $b=4$，$c=2$，即 $b\neq c$，则 $B\neq C$.

由(1)可得 $A=2C$. …………………………………… 7 分

因为 $\sin A=\sin 2C$，

所以 $\sin A=2\sin C\cos C$.

由正弦定理，得 $a=2c\cos C$. …………………………………… 9 分

因为 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，所以 $a=2c\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

结合 $b=2c=4$，解得 $a=2\sqrt{3}$. …………………………………… 13 分

16.解：(1)由频率分布直方图可知 $5\times(0.01+0.07+x+0.04+0.02)=1$，解得 $x=0.06$. ………… 2 分

因为 $(0.01+0.07+0.06)\times5=0.7<0.75$，$(0.01+0.07+0.06+0.04)\times5=0.9>0.75$，

所以 75%分位数位于[175,180)，设为 m，

则有 $0.7+(m-175)\times0.04=0.75$，解得 $m=176.25$(cm).

故日本成年男性身高的 75%分位数为 176.25 cm. …………………………………… 6 分

(2)由频率分布直方图知，样本中身高低于 175 cm 的中国成年男性人数是 $(0.008+0.016+0.04+0.04)\times5\times400=208$(人)，

样本中身高低于 175 cm 的日本成年男性人数是 $(0.01+0.07+0.06)\times5\times200=140$(人)，

故样本中身高低于 175 cm 的共有 348 人，可得下表：

身高	蛋白质摄入量		合计
	丰富	不丰富	
低于 175 cm	108	240	348
不低于 175 cm	152	100	252
合计	260	340	600

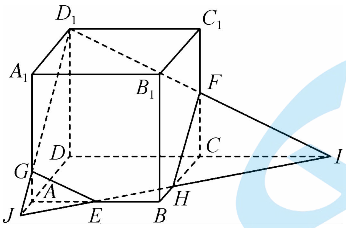
…………………………………… 10 分

零假设 H_0：成年男性身高与蛋白质摄入量之间无关联，则由 2×2 列联表数据可得：

$\chi^2=\dfrac{600\times(108\times100-240\times152)^2}{348\times252\times340\times260}\approx51.040>x_{0.001}=10.828$，

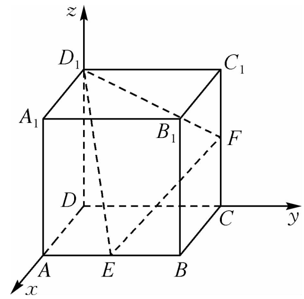
依据 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为成年男性身高与蛋白质摄入量之间有关联. ……… 15 分

17. 解：(1)连接 D_1F 并延长交 DC 延长线于点 I，连接 IE 并延长交 BC 于点 H，交 DA 延长线于点 J，连接 JD_1 交 AA_1 于点 G，



则截面 D_1GEHF 即为所求. …………………………………………………………………………………… 6 分

(2)如图，以 D 为原点，棱 DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $Dxyz$.



因为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，所以 $D_1(0,0,2)$，$E(2,1,0)$，$F(0,2,1)$，$B_1(2,2,2)$.

$\overrightarrow{D_1E}=(2,1,-2)$，$\overrightarrow{D_1F}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{D_1B_1}=(2,2,0)$. ………………………………… 9 分

设平面 D_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1E}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1F}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+y-2z=0,\\ 2y-z=0,\end{cases}$

取 $y=2$，得平面 D_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(3,2,4)$. ………………………………………………………… 12 分

设点 B_1 到平面 EFD_1 的距离为 d，则 $d=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1B_1}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|2\times3+2\times2+0\times4|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}}=\dfrac{10\sqrt{29}}{29}$，

故点 B_1 到平面 EFD_1 的距离为 $\dfrac{10\sqrt{29}}{29}$. ………………………………………………………… 15 分

18. 解：(1)因为 C 的长轴长为 $4e$，所以 $2a=4e$，$e=\dfrac{a}{2}$，

由 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}$ 得 $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{a^2}{4}$，$4b^2=4a^2-a^4$，……………………………………… 3 分

把 $A\left(1,\dfrac{a}{2}\right)$ 代入 C 的方程得 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{a^2}{4b^2}=1$，即 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{4-a^2}=1$，…………………………… 5 分

解得 $a^2=2$，所以 $4b^2=4a^2-a^4=4$，解得 $b^2=1$，

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………………………………………………………………………… 7 分

(2)法一：设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由题意可知，点 Q 既是 OP 的中点，又是 MN 的中点，

所以 $\begin{cases}\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{x_1+x_2}{2},\\ \dfrac{y_0}{2}=\dfrac{y_1+y_2}{2},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=x_1+x_2,\\ y_0=y_1+y_2,\end{cases}$ ……………………………………………… 9 分

因为点 P 在 C 上，所以 $\frac{(x_1+x_2)^2}{2}+(y_1+y_2)^2=1$，

整理得 $\frac{x_1^2}{2}+y_1^2+\frac{x_2^2}{2}+y_2^2+x_1x_2+2y_1y_2=1$，

因为 M,N 在 C 上，所以 $\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1$，$\frac{x_2^2}{2}+y_2^2=1$，$x_1x_2+2y_1y_2=-1$. …………………… 12 分

将 $x_1x_2+2y_1y_2=-1$ 两边平方，得 $x_1^2x_2^2+4y_1^2y_2^2=1-4x_1x_2y_1y_2$，

又 $(x_1^2+2y_1^2)(x_2^2+2y_2^2)=4$，展开，得 $x_1^2x_2^2+4y_1^2y_2^2+2x_1^2y_2^2+2x_2^2y_1^2=4$，

所以 $1-4x_1x_2y_1y_2+2x_1^2y_2^2+2x_2^2y_1^2=4$，

所以 $x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2=\frac{3}{2}$， …………………… 15 分

又 $\overrightarrow{OM}^2\cdot\overrightarrow{ON}^2-(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2$

$=x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2=\frac{3}{2}$.

所以 $\overrightarrow{OM}^2\cdot\overrightarrow{ON}^2-(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})^2$ 为定值 $\frac{3}{2}$. …………………… 17 分

法二（通性通法）：当 $MN\perp x$ 轴且 MN 在 y 轴右侧时，显然 $P(\sqrt{2},0)$，$Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$N\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{OM}^2\cdot\overrightarrow{ON}^2-(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})^2=\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}-\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{2}$； …………………… 9 分

同理，当 $MN\perp x$ 轴且 MN 在 y 轴左侧时，$\overrightarrow{OM}^2\cdot\overrightarrow{ON}^2-(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})^2=\frac{3}{2}$. …………………… 10 分

当 MN 与 x 轴不垂直时，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

则 $\Delta=16k^2m^2-4(2k^2+1)(2m^2-2)>0$，化简，得 $2k^2+1>m^2$. …………………… 12 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{-4km}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{2k^2+1}$. …………………… 13 分

设 $Q(x_0,y_0)$，则 $x_0=\frac{-2km}{2k^2+1}$，$y_0=kx_0+m=\frac{m}{2k^2+1}$，

所以 $P\left(\frac{-4km}{2k^2+1},\frac{2m}{2k^2+1}\right)$，代入 $x^2+2y^2=2$，得 $\left(\frac{-4km}{2k^2+1}\right)^2+2\left(\frac{2m}{2k^2+1}\right)^2=2$，

化简，得 $4m^2=2k^2+1$，适合 $2k^2+1>m^2$. …………………… 15 分

$\overrightarrow{OM}^2\cdot\overrightarrow{ON}^2-(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2=x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2-2x_1x_2y_1y_2$

$=(x_1y_2-x_2y_1)^2=[x_1(kx_2+m)-x_2(kx_1+m)]^2=m^2(x_1-x_2)^2=m^2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$

$=m^2\left[\left(\frac{-4km}{2k^2+1}\right)^2-4\times\frac{2m^2-2}{2k^2+1}\right]$

$=\frac{8m^2(2k^2+1-m^2)}{(2k^2+1)^2}=\frac{8m^2(4m^2-m^2)}{(4m^2)^2}=\frac{3}{2}$.

综上，$\overrightarrow{OM}^2\cdot\overrightarrow{ON}^2-(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON})^2$ 为定值 $\frac{3}{2}$. …………………… 17 分

19.(1)解：法一：因为 $f(x)=\frac{a(x+1)}{e^x}+\ln x$，

所以 $f'(x)=-\frac{ax}{e^x}+\frac{1}{x}=\frac{x}{e^x}\left(\frac{e^x}{x^2}-a\right)(x>0)$，…………………………………………………… 2 分

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；…………………………………………………… 3 分

若 $a>0$，令 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$，则 $g'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$，

$x\in(0,2)$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；$x\in(2,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $x=2$ 是 $g(x)$ 的极小值点，所以 $g(x)\geqslant g(2)=\frac{e^2}{4}-a$，…………………………………………………… 5 分

所以当 $\frac{e^2}{4}-a\geqslant 0$，即 $0<a\leqslant\frac{e^2}{4}$ 时，$g(x)\geqslant 0$，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

综上，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{e^2}{4}\right]$. …………………………………………………… 7 分

法二：因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x>0$ 时 $f'(x)=-\frac{ax}{e^x}+\frac{1}{x}\geqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{e^x}{x^2}$，…………………………………………………… 2 分

设 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$，

所以 $x\in(0,2)$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$x\in(2,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(2)=\frac{e^2}{4}$，…………………………………………………… 5 分

所以 $a\leqslant\frac{e^2}{4}$，即 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{e^2}{4}\right]$. …………………………………………………… 7 分

(2)证明：由(1)知 x_1,x_2 是方程 $\frac{e^x}{x^2}-a=0$ 的两个不同正根，所以 $\frac{e^{x_1}}{x_1^2}-a=\frac{e^{x_2}}{x_2^2}-a=0$，

经验证，x_1,x_2 分别是 $f(x)$ 的极小值点，极大值点，

$a(x_1^2+x_2^2)=e^{x_1}+e^{x_2}>2e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，…………………………………………………… 9 分

下面证明 $x_1+x_2>1$.

由 $\frac{e^{x_1}}{x_1^2}=\frac{e^{x_2}}{x_2^2}$，得 $e^{x_1-x_2}=\frac{x_1^2}{x_2^2}$，

两边取对数，得 $x_1-x_2=2(\ln x_1-\ln x_2)$，即 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}$，

则 $x_1+x_2=2\times\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\ln\frac{x_1}{x_2}=2\times\frac{\frac{x_1}{x_2}+1}{\frac{x_1}{x_2}-1}\ln\frac{x_1}{x_2}$，

设 $\frac{x_1}{x_2}=t$，则 $t>1$，则要证 $x_1+x_2>1$，即证 $2\times\frac{t+1}{t-1}\ln t>1$，…………………………………………………… 13 分

即证 $2\ln t-1+\frac{2}{t+1}>0$.

设 $h(t)=2\ln t-1+\frac{2}{t+1}(t>1)$，则 $h'(t)=\frac{2}{t}-\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{2(t^2+t+1)}{t(t+1)^2}>0$，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，从而 $h(t)>h(1)=0$，

于是 $x_1+x_2>1$ 成立，

故 $a(x_1^2+x_2^2)>2\sqrt{e}$. …………………………………………………… 17 分