2023 北京景山学校高三 10 月月考

数　　学

注意事项

（1）请用蓝色或黑色圆珠笔、钢笔或签字笔答卷，不得用铅笔或红笔答卷.

（2）认真审题，字迹工整，卷面整洁.

（3）本试卷共 3 页，共三道大题，21 道小题.考试时间 120 分钟.

（4）请将选择题的答案填涂在机读卡上，其余试题答案填写在答题纸上，在试卷上作答无效.

一、选择题（共 10 小题；共 40 分）

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，则集合 $A\cap \complement_U B$ 是

A. $\{1,3,5,6\}$　　B. $\{1,3,5\}$　　C. $\{1,3\}$　　D. $\{1,5\}$

2. 下列函数在其定义域内既是奇函数又是增函数的是（　）

A. $y=2^x$　　B. $y=x^3+x$　　C. $y=-\dfrac{1}{x}$　　D. $y=-\log_2 x$

3. 已知向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为 120°，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}+2\vec{b}|=$（　）

A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. 1

4. 已知 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，且 $\cos\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\theta$ 的值为（　）

A. $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{6}+1}{6}$　　C. $\dfrac{1-2\sqrt{6}}{6}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{6}$

5. 函数 $f(x)=\lg(x^2-2x-3)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增的一个充分不必要条件是（　）

A. $a>0$　　B. $a>1$　　C. $a>3$　　D. $a>4$

6. 已知某种垃圾的分解率为 v，与时间 t（月）满足函数关系式 $v=ab^t$（其中 a，b 为非零常数），若经过 12 个月，这种垃圾的分解率为 10%，经过 24 个月，这种垃圾的分解率为 20%，那么这种垃圾完全分解，至少需要经过（　）（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）

A. 48 个月　　B. 52 个月　　C. 64 个月　　D. 120 个月

7. 若 $\ln a=-1, e^b=\sqrt{2}, 3c=\ln 3$，则 a,b,c 的大小关系为（　）

A. $a>c>b$　　B. $b>c>a$

C. $c>b>a$　　D. $a>b>c$

8. 已知斐波那契数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，若

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=a_k$，则 $k=$（　）

A. 2022　　B. 2023　　C. 59　　D. 60

9. 在边长为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 的正三角形 ABC 的边 AB、AC 上分别取 M、N 两点，沿线段 MN 折叠三角形，使顶点 A 正好落在边 BC 上，则 AM 的长度的最小值为（　）

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $2-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax}{e^x}+\ln x-x$ 有唯一的极值点 t，则 $f(t)$ 的取值范围是（　）

A. $[-2,+\infty)$　　B. $[-3,+\infty)$　　C. $[2,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11. 函数 $y=\sin^2\left(\pi x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为______.

12. 已知函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x-1}(2<x<4)$，则 $f(x)$ 的值域为______.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^{|\ln x|}, x>0, \\ \dfrac{x+a}{x-1}, x\le 0, \end{cases}$，则 $f(1)=$__________；若 $f(f(-1))=1$，则实数 $a=$__________.

14. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比大于 1，且 $3\lg a_2=-\lg a_{12}$，则使得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积 $T_n>1$ 的 n 的最小值为___________.

15. 已知点 P 是曲线 $y=\sin x+\ln x$ 上任意一点，记直线 OP（O 为坐标原点）的斜率为 k，给出下列四个命题：

①存在唯一点 P 使得 $k=-1$；

②对于任意点 P 都有 $k<0$；

③对于任意点 P 都有 $k<1$；

④存在点 P 使得 $k\ge 1$，

则所有正确的命题的序号为______.

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$a\cos B+\dfrac{1}{2}b=c$，$b=2$，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

（1）求 A；

（2）求 BC 边上的高.

17. 设函数 $f(x)=4\cos x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$，$x\in\mathbf{R}$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调增区间；

（2）当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的值域；

（3）已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象与直线 $y=1$ 有交点，求相邻两个交点间的最短距离.

18. 已知 $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, n\text{为奇数}\\ 2a_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，记 S_n，T_n 分别为数列 $\left\{a_n\right\}$，$\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）证明：当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

19.设函数 $f\left(x\right)=\ln\left(2x+3\right)+x^2$.

（1）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(-1,f\left(-1\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

20. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax-b}{e^x}$ 的一个极值点是 $x=2$.

（1）求 a 与 b 的关系式，并求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）设 $a>0, g(x)=a^2e^{x-2}$，若存在 $x_1,x_2\in[0,3]$，使得 $\left|f\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)\right|<\frac{2}{e^2}$ 成立，求实数 a 的取值范围.

21. 已知无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 满足 $a_n=\max\left\{a_{n+1},a_{n+2}\right\}-\min\left\{a_{n+1},a_{n+2}\right\}(n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\{x,y\}$ 表示 x，y 中最大的数，$\min\{x,y\}$ 表示 x，y 中最小的数.

（1）当 $a_1=1$，$a_2=2$ 时，写出 a_4 的所有可能值；

（2）若数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\left\{a_n\right\}$ 中的项；

（3）若 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，是否存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\le M$？如果存在，写出一个满足条件的 M；如果不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题（共 10 小题；共 40 分）

1.【答案】D

【分析】

利用补集和交集的定义可求出集合 $A\cap \complement_U B$.

【详解】$\because$ 集合 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $\complement_U B=\{1,5,6\}$，

因此，$A\cap \complement_U B=\{1,5\}$.

故选：D.

【点睛】本题考查交集与补集的混合运算，熟悉交集和补集的定义是解题的关键，考查计算能力，属于基础题.

2.【答案】B

【分析】

采用逐一验证法，以及幂函数，对数函数，指数函数的性质，可得结果.

【详解】A 错，

$y=2^x$ 是增函数，且为非奇非偶函数

B 正确

C 错

$y=-\dfrac{1}{x}$ 是奇函数，但在定义域中无单调性，

应该为在 $(-\infty,0)$ 递增，在 $(0,+\infty)$ 递增

D 错

$y=-\log_2 x$ 是减函数，且非奇非偶函数

故选：B

【点睛】本题主要判断函数的奇偶性与单调性，重点在于对基础函数性质的辨析，属基础题.

3.【答案】B

【分析】根据模长公式即可求解.

【详解】$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{b}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1+4+4\times1\times1\cos120^\circ}=\sqrt{3}$，

故选：B

4.【答案】A

【分析】根据条件求出 $\sin\left(\theta+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 的值，令 $\sin\theta=\sin(\theta+\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{3})$，按两角差的公式展开，计算即可.

【详解】因为$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}$，所以$\frac{7\pi}{6}<\theta+\frac{2\pi}{3}<\frac{13\pi}{6}$，又$\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}$

又$\cos\frac{13\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{3}$，

所以$\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

则$\sin\theta=\sin(\theta+\frac{2\pi}{3}-\frac{2\pi}{3})$

$=\sin(\theta+\frac{2\pi}{3})\cos\frac{2\pi}{3}-\cos(\theta+\frac{2\pi}{3})\sin\frac{2\pi}{3}$

$=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\times(-\frac{1}{2})-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$，

故选：A.

5.【答案】D

【分析】根据复合函数单调性法则“同增异减”求出$a>3$，对照四个选项，得到正确答案.

【详解】设$g\left(x\right)=x^2-2x-3$，可得函数$g\left(x\right)$在$\left(-\infty,1\right)$单调递减，在$\left(1,+\infty\right)$单调递增，又由函数$y=\lg\left(x^2-2x-3\right)$，满足$x^2-2x-3>0$，解得$x<-1$或$x>3$，根据复合函数的单调性，可得函数$f\left(x\right)$的单调递增区间为$\left(3,+\infty\right)$. $f\left(x\right)=\lg\left(x^2-2x-3\right)$在$\left[a,+\infty\right)$上单调递增$\Leftrightarrow a>3$. 所以对照四个选项，可以得到一个充分不必要条件是：$a>4$.

故选：D

6.【答案】B

【分析】根据已知条件，利用待定系数法求出函数关系式，然后再代入数值计算即可.

【详解】由题意可得$\begin{cases}ab^{12}=0.1\\ab^{24}=0.2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{1}{20}\\b=2^{\frac{1}{12}}\end{cases}$，

所以$v=\frac{1}{20}\cdot2^{\frac{t}{12}}$，

这种垃圾完全分解，即当$v=1$时，有$1=\frac{1}{20}\cdot2^{\frac{t}{12}}$，即$2^t=20^{12}$，

解得$t=\log_2 20^{12}=12\log_2 20=24+12\log_2 5=24+12\times\frac{1-\lg 2}{\lg 2}=52$.

故选：B

7.【答案】A

【分析】由题设 $a=\frac{\ln e}{e}$，$b=\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}$，$c=\frac{\ln 3}{3}$，构造 $\boldsymbol{f(x)=\frac{\ln x}{x}}$ $(x>0)$，利用导数研究其单调性，进而判断 a,b,c 的大小.

【详解】由题设知：$a=\frac{\ln e}{e}$，$b=\frac{\ln 2}{2}=\frac{\ln 4}{4}$，$c=\frac{\ln 3}{3}$，

令 $\boldsymbol{f(x)=\frac{\ln x}{x}}$ $(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，易知 $(0,e)$ 上 $f(x)$ 单调递增，

$(e,+\infty)$ 上 $f(x)$ 单调递减，即 $f(e)>f(3)>f(4)=f(2)$，

$\therefore a>c>b$.

故选：A.

【点睛】关键点点睛：构造 $\boldsymbol{f(x)=\frac{\ln x}{x}}$ $(x>0)$，利用导数研究其单调性，进而比较函数值的大小.

8.【答案】D

【分析】根据数列的递推公式化简求解；

【详解】$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{59}$

$a_2+a_3+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=a_4+a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=a_6+a_7+a_9+\cdots+a_{59}$

$a_6+a_7+a_9+\cdots+a_{59}=\cdots\cdots=a_{58}+a_{59}=a_{60}=a_k$，

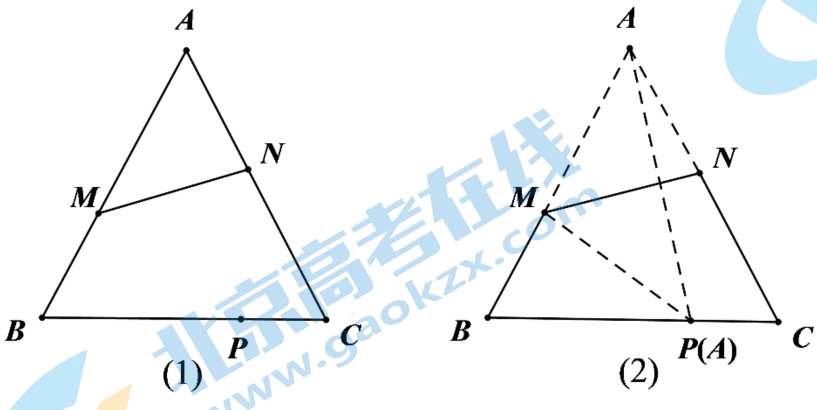
$k=60$.

故选：D.

9.【答案】C

【分析】在图（2）中，连接 PM，由折叠可知 $AM=PM$，根据等边对等角可得 $\angle BAP=\angle APM$，又因为 $\angle BMP$ 为 $\triangle APM$ 的一个外角，设 $\angle BAP=\angle APM=\theta$，可得 $\angle BMP=2\theta$，再设 $AM=PM=x$，根据正弦定理可得出 x 关于 θ 的关系式，结合正弦型函数的有界性可求得 x 的最小值.

【详解】显然 A 、P 两点关于折线 MN 对称，图（2）中，由对称性可得 $AM=PM$，



则有 $\angle BAP=\angle APM$，

设 $\angle BAP=\angle APM=\theta$，则 $\angle BMP=\angle BAP+\angle APM=2\theta$，

设 $AM=PM=x$，则 $BM=\frac{\sqrt{3}}{3}-x$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle APB=\pi-\angle ABP-\angle BAP=\frac{2\pi}{3}-\theta$，

所以，$\angle BPM=\frac{2\pi}{3}-2\theta$，又因为 $\angle PBM=\frac{\pi}{3}$，

在 $\triangle PBM$ 中，由正弦定理可得 $\frac{BM}{\sin\angle BPM}=\frac{PM}{\sin\angle PBM}$，

即 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-x}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)}=\frac{x}{\sin\frac{\pi}{3}}$，所以，$x=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)}$，

因为 $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$，则 $0\le\frac{2\pi}{3}-2\theta\le\frac{2\pi}{3}$，

故当 $\frac{2\pi}{3}-2\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，即当 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 时，$\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)=1$，此时，$x$ 取最小值，

且 $x=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，故 AM 的最小值为 $2-\sqrt{3}$.

故选：C.

10.【答案】A

【分析】由题，将问题转化为 $ax+e^x=0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上无解，进而研究函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}$ 性质可得

$a\geqslant -e$，再求得 $f(t)=f(1)=\frac{a}{e}-1\ge-2$.

【详解】解：求导有 $f'(x)=\frac{1-x}{x\cdot e^x}\left(ax+e^x\right)$，

因为函数 $f(x)=\frac{ax}{e^x}+\ln x-x$ 有唯一的极值点 t，

所以，$f'(x)=\frac{1-x}{x\cdot e^x}\left(ax+e^x\right)=0$ 有唯一正实数根，

因为 $f'(1)=0$，

所以 $ax+e^x=0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上无解，

所以，$-a=\frac{e^x}{x}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上无解，

记 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，则有 $g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，

所以，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增.

此时 $x=1$ 时，$g(x)=\frac{e^x}{x}$ 有最小值 $g(1)=e$，

所以，$-a\le e$，即 $a\geqslant -e$，

所以 $f(t)=f(1)=\frac{a}{e}-1\ge -2$，即 $f(t)$ 的取值范围是 $[-2,+\infty)$

故选：A

二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11.【答案】1

【分析】根据二倍角公式化简，即可由周期公式求解.

【详解】$y=\sin^2\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1-\cos\left(2\pi x+\frac{2\pi}{3}\right)}{2}$，

所以最小正周期为 $\frac{2\pi}{2\pi}=1$，

故答案为：1

12.【答案】$[5,6)$

【分析】结合基本不等式和函数单调性进行求解.

【详解】设 $t=x-1,\therefore t\in(1,3),x=t+1$，函数 $f(x)=x+\frac{4}{x-1}(2<x<4)$，

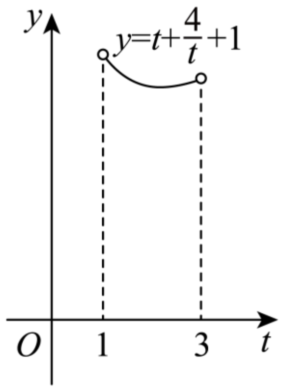
可得 $g(t)=t+\frac{4}{t}+1$，$t\in(1,3)$，根据基本不等式和 $g(x)$ 的图像，

可判断函数在 $(1,2)$ 单调递减，在 $(2,3)$ 单调递增，

$g(2)=5$，$g(1)=6$，$g(3)=\frac{16}{3}$，

所以值域为：$[5,6)$.

故答案为：$[5,6)$



13.【答案】 ①. 1 ②. −1

【分析】将 $x=1$ 直接代入即可求出 $f(1)$ 的值；因为 $f(-1)=\frac{1-a}{2}$，分类讨论满足 $f(f(-1))=f\left(\frac{1-a}{2}\right)=1$ 的 a 值，最后综合讨论结果，可得答案.

【详解】因为 $f(x)=\begin{cases} e^{|\ln x|}, x>0, \\ \frac{x+a}{x-1}, x\le 0, \end{cases}$，所以 $f(1)=e^{|\ln 1|}=e^0=1$.

$f(-1)=\frac{-1+a}{-2}=\frac{1-a}{2}$， $f(f(-1))=f\left(\frac{1-a}{2}\right)$，

当 $0<x<1$ 时， $f(x)=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$， 当 $x\ge 1$ 时， $f(x)=e^{\ln x}=x$，

所以当 $0<\frac{1-a}{2}<1$ 即 $-1<a<1$ 时， $f\left(\frac{1-a}{2}\right)=\frac{2}{1-a}=1\Rightarrow a=-1$，不符合；

当 $\frac{1-a}{2}\ge 1$ 即 $a\le -1$ 时， $f\left(\frac{1-a}{2}\right)=\frac{1-a}{2}=1\Rightarrow a=-1$， 符合；

当 $\frac{1-a}{2}\le 0$ 即 $a\ge 1$ 时， $f\left(\frac{1-a}{2}\right)=\frac{\frac{1-a}{2}+a}{\frac{1-a}{2}-1}=\frac{1+a}{-1-a}=1$， a 无解，不符合.

所以实数 $a=-1$.

故答案为：1； −1

14.【答案】9

【分析】根据等比数列的下标性质，结合等比数列的单调性进行求解即可.

【详解】设公比为 $q(q>1)$，且 $a_n>0$，

由 $3\lg a_2=-\lg a_{12}$， 有 $\lg\left(a_2^3a_{12}\right)=0$， 有 $a_2^3a_{12}=1$， 有 $a_2^2a_7^2=1$，

有 $a_4a_5=1$， 可得 $0<a_1<a_2<a_3<a_4<1<a_5<a_6$.

又由 $T_7=a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7=a_1\left(a_4a_5\right)^3=a_1<1$，

$T_8=a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8=\left(a_4a_5\right)^4=1$，$T_9=a_9T_8=a_9>1$，

故使得数列$\left\{a_n\right\}$的前n项积$T_n>1$的n的最小值为 9.

故答案为：9

15.【答案】①③

【分析】设P的坐标为$\left(t,\sin t+\ln t\right)$，则$k=\dfrac{\sin t+\ln t}{t}$，其中$t>0$，证明出$\ln t\le t-1$，结合$\sin t\le 1$，可判断③④；令$f\left(t\right)=t+\sin t+\ln t$，其中$t>0$，利用导数分析函数$f\left(t\right)$的单调性，结合零点存在定理可判断①；取$t=1$可判断②.

【详解】设点P的坐标为$\left(t,\sin t+\ln t\right)$，则$k=\dfrac{\sin t+\ln t}{t}$，其中$t>0$，

令$p\left(t\right)=t-\ln t-1$，其中$t>0$，则$p'\left(t\right)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$，

由$p'\left(t\right)<0$可得$0<t<1$，由$p'\left(t\right)>0$可得$t>1$，

所以，函数$p\left(t\right)$的减区间为$\left(0,1\right)$，增区间为$\left(1,+\infty\right)$，

所以，$p\left(t\right)\ge p\left(1\right)=0$，即$t-1-\ln t\ge 0$，即$\ln t\le t-1$，

又因为$\sin t\le 1$，当且仅当$t=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$时，等号成立，

所以，$k=\dfrac{\sin t+\ln t}{t}<\dfrac{1+t-1}{t}=1$，故③对，④错；

对于①，令$\dfrac{\sin t+\ln t}{t}=-1$，可得$t+\sin t+\ln t=0$，

令$f\left(t\right)=t+\sin t+\ln t$，其中$t>0$，则$f'\left(t\right)=1+\cos t+\dfrac{1}{t}>0$，

所以，函数$f\left(t\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，

因为$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)=\dfrac{1}{e^2}+\sin\dfrac{1}{e^2}-2<0$，$f\left(1\right)=1+\sin 1>0$，

所以，存在唯一的实数$t_0\in\left(\dfrac{1}{e^2},1\right)$，使得$f\left(t_0\right)=0$，

故存在唯一点P使得$k=-1$，①对；

对于②，当$t=1$时，$k=\dfrac{\sin 1+\ln 1}{1}=\sin 1>0$，②错.

故答案为：①③.

【点睛】方法点睛：利用导数解决函数零点问题的方法：

（1）直接法：先对函数求导，根据导数的方法求出函数的单调区间与极值，根据函数的基本性质作出图

象，然后将问题转化为函数图象与x轴的交点问题，突出导数的工具作用，体现了转化与化归思想、数形结合思想和分类讨论思想的应用；

（2）构造新函数法：将问题转化为研究两函数图象的交点问题；

（3）参变量分离法：由 $f(x)=0$ 分离变量得出 $a=g(x)$，将问题等价转化为直线 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象的交点问题.

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16.【答案】（1） $A=\frac{\pi}{3}$

（2） $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$

【分析】（1）根据已知以及余弦定理可得，$b^2+c^2-a^2=bc$，然后根据余弦定理得出$\cos A$的值，进而得出答案；

（2）根据三角形面积公式结合已知可求出$c=\sqrt{3}+1$，进而由余弦定理求得$a=\sqrt{6}$，即可得出答案.

【小问 1 详解】

根据已知以及余弦定理可得，$a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{1}{2}b=c$，

整理可得，$b^2+c^2-a^2=bc$，

所以由余弦定理可得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$.

又$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

由已知结合三角形面积公式可得，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}c=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，

所以，$c=\sqrt{3}+1$.

根据余弦定理可得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2-2\times2\times\left(\sqrt{3}+1\right)\times\frac{1}{2}=6$，

所以，$a=\sqrt{6}$.

设 BC 边上的高为h，则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah$，

即$\frac{\sqrt{6}}{2}h=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，解得$h=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

17.【答案】（1） $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$

（2）$\left[-\sqrt{3},2\right]$

（3）$\dfrac{\pi}{3}$

【分析】（1）先根据两角差正弦公式、二倍角公式、倍角公式将函数 $f\left(x\right)$ 化为 $f\left(x\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，再根据正弦函数的单调性求解；

（2）利用（1）中结论，结合三角函数性质即可求其值域；

（3）由题意可得方程 $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，解方程出交点坐标，再根据交点间距离求最小值.

【小问 1 详解】

由 $f\left(x\right)=4\cos x\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}=4\cos x\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}$

$=2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x+\sqrt{3}$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$

$=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，解得 $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$，

$\therefore$ 函数 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间是 $\left[-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$.

【小问 2 详解】

$\because x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\therefore -\dfrac{\pi}{3}\le 2x-\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{2\pi}{3}$，

$\therefore -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\le\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)\le 1$，即 $-\sqrt{3}\le f\left(x\right)\le 2$，

$\therefore f\ \ x$ 的值域是 $\left[-\sqrt{3},2\right]$.

【小问 3 详解】

依题意可得，$2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$，即 $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ 或 $2x-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$，$k\in Z$，

$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ 或 $x=\dfrac{7\pi}{12}+k\pi$，$k\in Z$，

故函数 $f\left(x\right)$ 的图像与直线 $y=1$ 的两个相邻交点间的最短距离为 $\frac{\pi}{3}$.

18. 【答案】(1) $a_n=2n+3$;

(2) 证明见解析.

【分析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，用 a_1,d 表示 S_n 及 T_n，即可求解作答.

(2) 方法 1，利用 (1) 的结论求出 S_n，b_n，再分奇偶结合分组求和法求出 T_n，并与 S_n 作差比较作答;

方法 2，利用 (1) 的结论求出 S_n，b_n，再分奇偶借助等差数列前 n 项和公式求出 T_n，并与 S_n 作差比较作答.

【小问 1 详解】

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，而 $b_n=\begin{cases}a_n-6,n=2k-1\\2a_n,n=2k\end{cases},k\in\mathrm{N}^*$,

则 $b_1=a_1-6,b_2=2a_2=2a_1+2d,b_3=a_3-6=a_1+2d-6$,

于是 $\begin{cases}S_4=4a_1+6d=32\\T_3=4a_1+4d-12=16\end{cases}$，解得 $a_1=5,d=2$，$a_n=a_1+(n-1)d=2n+3$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2n+3$.

【小问 2 详解】

方法 1：由 (1) 知，$S_n=\frac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，$b_n=\begin{cases}2n-3,n=2k-1\\4n+6,n=2k\end{cases},k\in\mathrm{N}^*$,

当 n 为偶数时，$b_{n-1}+b_n=2(n-1)-3+4n+6=6n+1$,

$T_n=\frac{13+(6n+1)}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$,

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=(\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n)-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n(n-1)>0$，因此 $T_n>S_n$,

当 n 为奇数时，$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\frac{3}{2}(n+1)^2+\frac{7}{2}(n+1)-[4(n+1)+6]=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5$,

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5)-(n^2+4n)=\frac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，因此 $T_n>S_n$,

所以当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

方法 2：由 (1) 知，$S_n=\frac{n(5+2n+3)}{2}=n^2+4n$，$b_n=\begin{cases}2n-3,n=2k-1\\4n+6,n=2k\end{cases},k\in\mathrm{N}^*$,

当 n 为偶数时，

$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)=\frac{-1+2(n-1)-3}{2}\cdot\frac{n}{2}+\frac{14+4n+6}{2}\cdot\frac{n}{2}=\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n$,

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=(\frac{3}{2}n^2+\frac{7}{2}n)-(n^2+4n)=\frac{1}{2}n(n-1)>0$，因此 $T_n>S_n$，

当 n 为奇数时，若 $n\geq 3$，则

$$T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_n)+(b_2+b_4+\cdots+b_{n-1})=\frac{-1+2n-3}{2}\cdot\frac{n+1}{2}+\frac{14+4(n-1)+6}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$$

$=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5$，显然 $T_1=b_1=-1$ 满足上式，因此当 n 为奇数时，$T_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5$，

当 $n>5$ 时，$T_n-S_n=(\frac{3}{2}n^2+\frac{5}{2}n-5)-(n^2+4n)=\frac{1}{2}(n+2)(n-5)>0$，因此 $T_n>S_n$，

所以当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

19.【答案】（1） $y=1$

（2） $f(x)_{\min}=\ln 2+\frac{1}{4}$，$f(x)_{\max}=\frac{1}{16}+\ln\frac{5}{2}$

【分析】（1）求出函数的导函数，即可求出切线的斜率，从而求出切线方程；

（2）求出函数的单调区间，从而列出表格，计算出极小值与端点处的函数值，即可得到函数的最值.

【小问 1 详解】

因为 $f(x)=\ln(2x+3)+x^2$，所以 $f(-1)=\ln(-2+3)+(-1)^2=1$，

又 $f'(x)=\frac{2}{2x+3}+2x$，所以 $f'(-1)=\frac{2}{-2+3}+2\times(-1)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $y=1$；

【小问 2 详解】

$\because f(x)=\ln(2x+3)+x^2$，$\therefore$ 函数的定义域为 $\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$，

$f'(x)=\frac{2}{2x+3}+2x=\frac{2(2x+1)(x+1)}{2x+3}$，令 $f' \quad x \quad >0$，解得 $-\frac{3}{2}<x<-1$ 或 $x>-\frac{1}{2}$，

令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<-\frac{1}{2}$，

对 $x\in\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right]$ 列表如下：

x	$-\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$	$-\frac{1}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	+	
$f(x)$	$\frac{9}{16}+\ln\frac{3}{2}$	单调递减	极小值 $\ln 2+\frac{1}{4}$	单调递增	$\frac{1}{16}+\ln\frac{5}{2}$

又$\frac{1}{16}+\ln\frac{5}{2}-\left(\frac{9}{16}+\ln\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{5}{2}-\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\ln\frac{5}{3}-\frac{1}{2}$，且$\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}\approx 2.778>\mathrm{e}$，

所以$\frac{5}{3}>\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$，即$\ln\frac{5}{3}>\ln\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$，

所以$\frac{1}{16}+\ln\frac{5}{2}>\frac{9}{16}+\ln\frac{3}{2}$，

故函数$f(x)$在区间$\left[-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right]$上的$f(x)_{\min}=\ln 2+\frac{1}{4}$，$f(x)_{\max}=\frac{1}{16}+\ln\frac{5}{2}$.

20.【答案】(1) $b=a\neq -2$；当$a<-2$时，单调递增区间为$(2,-a)$，单调递减区间为$(-\infty,2)$和$(-a,+\infty)$；当$a>-2$时，单调递增区间为$(-a,2)$，单调递减区间为$(-\infty,-a)$和$(2,+\infty)$；(2)$(0,3)$.

【分析】(1)根据极值点的导数为零求出a与b的关系式，然后再验证导数为零的点不一定是极值点；

(2)求函数$f(x)$和$g(x)$在区间$[0,3]$上的最大值和最小值，并把存在性问题转换为最值问题，即把存在$x_1,x_2\in[0,3]$，使得$|f(x_1)-g(x_2)|<\frac{2}{e^2}$成立，转化为存在$x_1,x_2\in[0,3]$，使得$-\frac{2}{e^2}<f(x_1)-g(x_2)<\frac{2}{e^2}$成立.

【详解】(1)因为$f(x)=\frac{x^2+ax-b}{e^x}$，

所以$f'(x)=\frac{(2x+a)e^x-(x^2+ax-b)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-x^2+(2-a)x+a+b}{e^x}$，

因为函数$f(x)=\frac{x^2+ax-b}{e^x}$的一个极值点是$x=2$，所以$f'(2)=0$，即$b=a$；

所以$f'(x)=\frac{-x^2+(2-a)x+2a}{e^x}=\frac{-(x-2)(x+a)}{e^x}$，

①当$a=-2$时，$f'(x)=\frac{-(x-2)^2}{e^x}\leq 0$，所以函数$f(x)$在$R$上单调递减，此时函数没有极值点，不符合题意；

②当$a<-2$时，令$f'(x)=0$得$x=2$或$x=-a$，列表如下：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,-a)$	$-a$	$(-a,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘		↗		↘

满足$x=2$是函数$f(x)$的极值点；

③当 $a>-2$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=2$ 或 $x=-a$，列表如下：

x	$(-\infty,-a)$	$-a$	$(-a,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

满足 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点.

所以 $b=a\neq -2$；

所以当 $a<-2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2,-a)$，单调递减区间为 $(-\infty,2)$ 和 $(-a,+\infty)$；

当 $a>-2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-a,2)$，单调递减区间为 $(-\infty,-a)$ 和 $(2,+\infty)$.

(2)由（1）知，$f(x)=\dfrac{x^2+ax-a}{e^x}$，

且 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增，在 $(2,3)$ 单调递减，

又因为 $f(0)=-a<0$，$f(3)=\dfrac{9+2a}{e^3}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上的最大值为 $f(2)=\dfrac{4+a}{e^2}$，最小值为 $f(0)=-a$.

又当 $a>0$ 时，函数 $g(x)=a^2e^{x-2}$ 在 $[0,3]$ 单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $[0,3]$ 上的最大值为 $g(3)=a^2e$，最小值为 $g(0)=\dfrac{a^2}{e^2}$.

因为存在 $x_1,x_2\in[0,3]$，使得 $\left|f(x_1)-g(x_2)\right|<\dfrac{2}{e^2}$ 成立，

即存在 $x_1,x_2\in[0,3]$，使得 $-\dfrac{2}{e^2}<f(x_1)-g(x_2)<\dfrac{2}{e^2}$ 成立，

即 $\begin{cases}-a-a^2e<\dfrac{2}{e^2}\\ \dfrac{4+a}{e^2}-\dfrac{a^2}{e^2}>-\dfrac{2}{e^2}\end{cases}$，又因为 $a>0$，所以解得 $0<a<3$，

所以实数 a 的取值范围为 $(0,3)$.

【点睛】有关不等式的恒成立与存在性问题，可按如下规则转化：

一般地，已知函数 $y=f(x),x\in[a,b]$，$y=g(x),x\in[c,d]$

(1)若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\forall x_2\in[c,d]$，总有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\max}<g(x)_{\min}$；

(2)若 $\forall x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\max}<g(x)_{\max}$；

(3)若 $\exists x_1\in[a,b]$，$\exists x_2\in[c,d]$，有 $f(x_1)<g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\min}<g(x)_{\min}$；

(4) 若 $\forall x_1 \in [a,b]$，$\exists x_2 \in [c,d]$，有 $f(x_1)=g(x_2)$，则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集 .

21. 【答案】(1) $\{1,3,5\}$

(2) 证明见解析 (3) 不存在，理由见解析

【分析】(1) 根据定义知 $a_n \ge 0$，讨论 $a_3 > 2$、$a_3 < 2$ 及 a_3, a_4 大小求所有 a_4 可能值；

(2) 由 $a_n \ge 0$，假设存在 $n_0 \in \mathrm{N}^*$ 使 $a_n \le a_{n_0}$，进而有 $a_{n_0} \le \max\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} \le a_{n_0}$，可得 $\min\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} = 0$，即可证结论；

(3) 由题设 $a_n \ne a_{n+1}\ (n=2,3,\cdots)$，令 $S=\{n \mid a_n > a_{n+1}, n \ge 1\}$，讨论 $S=\varnothing$、$S \ne \varnothing$ 求证 $a_n > M$ 即可判断存在性.

【小问 1 详解】

由 $a_n = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}\} - \min\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \ge 0$，$a_1 = \max\{2, a_3\} - \min\{2, a_3\} = 1$，

若 $a_3 > 2$，则 $a_3 - 2 = 1$，即 $a_3 = 3$，此时 $a_2 = \max\{3, a_4\} - \min\{3, a_4\} = 2$，

当 $a_4 > 3$，则 $a_4 - 3 = 2$，即 $a_4 = 5$；

当 $a_4 < 3$，则 $3 - a_4 = 2$，即 $a_4 = 1$；

若 $a_3 < 2$，则 $2 - a_3 = 1$，即 $a_3 = 1$，此时 $a_2 = \max\{1, a_4\} - \min\{1, a_4\} = 2$，

当 $a_4 > 1$，则 $a_4 - 1 = 2$，即 $a_4 = 3$；

当 $a_4 < 1$，则 $1 - a_4 = 2$，即 $a_4 = -1$（舍）；

综上，a_4 的所有可能值为 $\{1,3,5\}$.

【小问 2 详解】

由（1）知：$a_n \ge 0$，则 $\min\{a_{n+1}, a_{n+2}\} \ge 0$，

数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，故存在 $n_0 \in \mathrm{N}^*$ 使 $a_n \le a_{n_0}$，$(n=1,2,3,\cdots)$，

由 $a_{n_0} = \max\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} - \min\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} \le \max\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} \le a_{n_0}$，

所以 $\min\{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}\} = 0$，故存在 $k \in \{n_0+1, n_0+2\}$ 使 $a_k = 0$，

所以 0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

【小问 3 详解】

不存在，理由如下：由 $a_n > 0 (n=1,2,3,\cdots)$，则 $a_n \ne a_{n+1}\ (n=2,3,\cdots)$，

设 $S=\{n \mid a_n > a_{n+1}, n \ge 1\}$，

若 $S=\varnothing$，则 $a_1 \leqslant a_2$，$a_i < a_{i+1}\ (i=2,3,\cdots)$，

对任意 $M>0$，取 $n_1 = [\dfrac{M}{a_1}] + 2$（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），

当 $n > n_1$ 时，$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_3 - a_2) + a_2$

$=a_{n-2}+a_{n-3}+\ldots+a_1+a_2\ge(n-1)a_1>M$；

若 $S\ne\varnothing$，则 S 为有限集，

设 $m=\max\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\ge1\}$， $a_{m+i}<a_{m+i+1}\ (i=1,2,3,\cdots)$，

对任意 $M>0$，取 $n_2=[\dfrac{M}{a_{m+1}}]+m+1$（$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数），

当 $n>n_2$ 时， $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\ldots+(a_{m+2}-a_{m+1})+a_{m+1}$

$=a_{n-2}+a_{n-3}+\ldots+a_m+a_{m+1}\ge(n-m)a_{m+1}>M$；

综上，不存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\le M$．

【点睛】关键点点睛：第三问，首选确定 $a_n\ne a_{n+1}\ (n=2,3,\cdots)$，并构造集合 $S=\{n\,|\,a_n>a_{n+1},n\ge1\}$，讨论 $S=\varnothing$ 、 $S\ne\varnothing$ 研究存在性.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！