昌平区 2019 年高三年级第二次统一练习

数学试卷(文科)　　　　2019. 5

本试卷共 5 页，共 150 分．考试时长 120 分钟．考生务必将答案作答在答题卡上，在试卷上作答无效．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

（1）已知集合 $U=\{x\in \mathbf{Z}\mid x^2<9\}$，集合 $A=\{-2,2\}$，则 $\complement_U A=$

(A) $\{-1,0,1\}$　　(B) $\{-1,1\}$　　(C) $[-1,1]$　　(D) $(-1,1)$

（2）已知复数 $z=-1+a(1+\mathrm{i})$（i 为虚数单位，a 为实数）在复平面内对应的点位于第二象限，则复数 z 的虚部可以是

(A) $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　(B) $\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{2}$

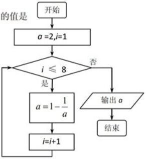
（3）已知某程序框图如图所示，则执行该程序后输出的 a 的值是

(A) -1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(D) 2



（4）已知实数 $x\in \mathbf{R}$，则“$x<0$”是“$\ln(x+1)<0$”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

（5）在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\overrightarrow{AB}=(2,-2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,1)$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=$

(A) -3　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

（6）若 x,y 满足 $\begin{cases}x+y-3\le 0,\\ x-2y-3\ge 0,\\ y\ge m,\end{cases}$ 且 $2x+y$ 的最小值为 1，则实数 m 的值为

(A) -5　　　　(B) -1　　　　(C) 1　　　　(D) 5

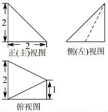
（7）某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的最长棱的长度为

(A) $\sqrt{5}$

(B) $2\sqrt{2}$

(C) $2\sqrt{3}$

(D) 3



（8） 一次数学竞赛，共有6道选择题，规定每道题答对得5分，不答得1分，答错倒扣1分．一个由若干名学生组成的学习小组参加了这次竞赛，这个小组的人数与总得分情况为

(A) 当小组的总得分为偶数时，则小组人数一定为奇数

(B) 当小组的总得分为奇数时，则小组人数一定为偶数

(C) 小组的总得分一定为偶数，与小组人数无关

(D) 小组的总得分一定为奇数，与小组人数无关

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

（9）已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$（α 是实数）的图象经过点 $(2,\sqrt{2})$，则 $f(4)$ 的值为 ______.

（10）为了落实“回天计划”，政府准备在回龙观、天通苑地区各建一所体育文化公园．针对公园中的体育设施需求，某社区采用分层抽样的方法对于21岁至65岁的居民进行了调查．已知该社区21岁至35岁的居民有840人，36岁至50岁的居民有700人，51岁至65岁的居民有560人．若从36岁至50岁的居民中随机抽取了100人，则这次抽样调查抽取的总人数是________.

（11）能说明“设 a,b 为实数，若 $a^2+b^2\neq 0$，则直线 $ax+by-1=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切”为假命题的一组 a,b 的值依次为___________.

（12）等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2+a_5+a_9=a_6+8$，则 $a_5=$_____；若 $a_1=16$，则 $n=$______时，$\{a_n\}$ 的前 n 项和取得最大值.

（13）已知双曲线 $C_1:x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$，若抛物线 $C_2:x^2=2py(p>0)$ 的焦点到双曲线 C_1 的渐近线的距离为1，则抛物线 C_2 的方程为________________.

（14）已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi<0)$ 的最小正周期为 π，且 $f(x)\geq f(\dfrac{\pi}{3})$ 对任意

的实数 x 都成立，则 ω 的值为_____；φ 的最大值为_________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

（15）（本小题 13 分）

在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=8$，且 $a_3+a_5=4a_2$．

（I）求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（II）设各项均为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_4=a_1$，$b_6=a_4$，求数列 $\{b_n-a_n\}$ 的前 n 项和 S_n．

（16）（本小题 13 分）

在△ABC 中，$AC=4$，$BC=4\sqrt{3}$，$\angle BAC=\dfrac{2\pi}{3}$．

（I）求 $\angle ABC$ 的大小；

（II）若 D 为 BC 边上一点，$AD=\sqrt{7}$，求 DC 的长度．

（17）（本小题 13 分）

某学校为了解学生的体质健康状况，对高一、高二两个年级的学生进行了体质测试．现从两个年级学生中各随机选取 20 人，将他们的测试数据，用茎叶图表示如下：

高一		高二
6 4 3	9	0 5 8
7 6 3 2	8	1 4 5 8
9 8 5 2 1	7	2 3 3 9
9 7 7 6 4	6	4 5 7 8
8 3 0	5	0 2 6
	4	0 2

《国家学生体质健康标准》的等级标准如下表．规定：测试数据≥60，体质健康为合格．

等级	优秀	良好	及格	不及格
测试数据	[90,100]	[80,89]	[60,79]	[0,59]

（I）从该校高二年级学生中随机选取一名学生，试估计这名学生体质健康合格的概率；

（II）从两个年级等级为优秀的样本中各随机选取一名学生，求选取的两名学生的测试数据平均数大于 95 的概率；

（III）设该校高一学生测试数据的平均数和方差分别为 $\overline{X_1},S_1^2$，高二学生测试数据的平均

数和方差分别为$\overline{X_2}, S_2^2$，试估计$\overline{X_1}$与$\overline{X_2}$、S_1^2与S_2^2的大小．（只需写出结论）

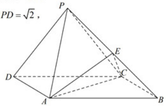
（18）（本小题 14 分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，平面$PCD\perp$平面$ABCD$，$AB=2$，$BC=1$，$PC=PD=\sqrt{2}$，E为PB中点．

（I）求证：$PD//$平面ACE；

（II）求证：$PD\perp$平面PBC；

（III）求三棱锥$E-ABC$的体积．



（19）（本小题 13 分）

已知椭圆$G:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，经过点$B(0,1)$．设椭圆$G$的右顶点为$A$，过原点$O$的直线$l$与椭圆$G$交于$P,Q$两点（点$Q$在第一象限），且与线段$AB$交于点$M$．

（I）求椭圆G的标准方程；

（II）是否存在直线l，使得ΔBOP的面积是ΔBMQ的面积的3倍？若存在，求直线l的方程；若不存在，请说明理由．

（20）（本小题 14 分）

已知函数$f(x)=[x^2+(a+1)x+1]e^x$．

（I）若曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与x轴平行，求a的值；

（II）若$f(x)$在$x=-1$处取得极大值，求a的取值范围；

（III）当$a=2$时，若函数$g(x)=mf(x)-1$有3个零点，求m的取值范围．（只需写出结论）

昌平区 2019 年高三年级第二次统一练习

数学试卷(文科)参考答案

一、选择题(共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分)

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	A	D	A	B	C	B	D	C

二、填空题(共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

(9)　2　　(10)　300　　(11)　1,1 (答案不唯一)

(12)　4 : 6　　(13)　$x^2=8y$　　(14)　$2;-\frac{5\pi}{3}$

三、解答题(共 6 小题，共 80 分)

(15)（共 13 分）

解：(Ⅰ) 设数列$\{a_n\}$的公差为d，由已知$\begin{cases}a_1+d=8,\\ a_1+2d+a_1+4d=4(a_1+d)\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a_1=4,\\ d=4\end{cases}$，所以$a_n=4n(n\in \mathbf{N}^*)$.　　…. 5 分

(Ⅱ) 设数列$\{b_n\}$的公比为q，由已知$\begin{cases}b_4=4,\\ b_6=16\end{cases}$，解得$\begin{cases}b_1=\frac{1}{2},\\ q=2\end{cases}$或$\begin{cases}b_1=-\frac{1}{2},\\ q=-2\end{cases}$（舍），

所以$b_n=\frac{1}{2}\times 2^{n-1}=2^{n-2}$，所以$b_n-a_n=2^{n-2}-4n$.

$S_n=(2^{-1}-4)+(2^0-8)+(2^1-12)+\cdots+(2^{n-2}-4n)$

$=(2^{-1}+2^0+2^1+\cdots+2^{n-2})-(4+8+12+\cdots+4n)$

$=\frac{\frac{1}{2}(1-2^n)}{1-2}-\frac{(4+4n)n}{2}=\frac{1}{2}(2^n-1)-2n^2-2n=2^{n-1}-\frac{1}{2}-2n^2-2n(n\in \mathbf{N}^*)$.

…. 13 分

(16)（共 13 分）

解：(Ⅰ) 在$\triangle ABC$中，由正弦定理得$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，

所以$\sin\angle ABC=\frac{4\sin\frac{2\pi}{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

因为$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，所以$\angle ABC\in(0,\frac{\pi}{3})$，所以$\angle ABC=\frac{\pi}{6}$.　　…. 6 分

(Ⅱ) 在$\triangle ABC$中，$\angle C=\pi-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

在$\triangle ADC$中，由余弦定理$AD^2=AC^2+DC^2-2AC\cdot DC\cos\angle C$，

得$7=16+DC^2-8DC\cos\frac{\pi}{6}$，即$DC^2-4\sqrt{3}DC+9=0$，

解得$DC=3\sqrt{3}$，或$DC=\sqrt{3}$．经检验，都符合题意．　　　…. 13 分

(17)（共 13 分）

解：（I）高二年级学生样本中合格的学生数为：$3+4+4+4=15$，

样本中学生体质健康合格的频率为$\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$．

所以从该校高二年级学生中随机选取一名学生，估计这名学生体质健康合格的概率为$\frac{3}{4}$．

…. 4 分

（II）设等级为优秀的样本中高一年级测试数据是93,94,96的学生分别为a_1,a_2,a_3，高二年级测试数据是90,95,98的学生分别为b_1,b_2,b_3.选取的两名学生构成的基本事件空间为

$\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_3,b_3)\}$，总数为9，

选取的测试数据平均数大于 95 的两名学生构成的基本事件空间为

$\{(a_1,b_3),(a_2,b_3),(a_3,b_2),(a_3,b_3)\}$，总数为4，

所以从两个年级等级为优秀的样本中各随机选取一名学生，选取的两名学生的测试数据平均数大于 95 的概率为$\frac{4}{9}$．　　　…. 9 分

（III）$\overline{X_1}>\overline{X_2},S_1^2<S_2^2$．　　　…. 13 分

(18)（共 14 分）

证明：（I）连结BD交AC于点F，连结EF．

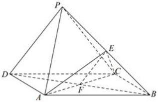
因为底面$ABCD$是矩形，

所以F为BD中点．

又因为E为PB中点，所以$EF\parallel PD$．

因为$PD\not\subset$平面ACE，$EF\subset$平面ACE，

所以$PD\parallel$平面ACE．　…. 4 分



（II）因为底面$ABCD$为矩形，所以$BC\perp CD$．

又因为平面$PCD\perp$平面$ABCD$，

$BC\subset$平面$ABCD$,平面$PCD\cap$平面$ABCD=CD$，

所以$BC\perp$平面PCD．

因为$PD\subset$平面PCD，所以$BC\perp PD$.

因为$PC=PD=\sqrt{2},CD=AB=2,$

所以$PC^2+PD^2=CD^2$，即$PD\perp PC$.

因为$BC\cap PC=C,BC,PC\subset$平面PBC，

所以$PD\perp$平面PBC. ….9分

（III）因为底面$ABCD$是矩形，

所以$AD//BC$.

因为$AD\not\subset$平面PBC，$BC\subset$平面PBC，

所以$AD//$平面PBC.

由（II）得，$PD\perp$平面PBC，

所以$V_{E\text{-}ABC}=V_{A\text{-}EBC}=V_{D\text{-}EBC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}S_{\Delta PBC}\cdot PD=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\frac{1}{6}$.

所以三棱锥$E-ABC$的体积为$\frac{1}{6}$. ….14分

(19)（共13分）

解：（I）由题意可知：$\begin{cases}b=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3}\end{cases}$.

所以椭圆G的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ….5分

（II）设$Q(x_0,y_0)$，则$P(-x_0,-y_0)$，易知$0<x_0<2$，$0<y_0<1$.

若使ΔBOP的面积是ΔBMQ的面积的3倍，只需使得$|OQ|=3|MQ|$，

即$\overline{OM}=\frac{2}{3}\overline{OQ}=(\frac{2}{3}x_0,\frac{2}{3}y_0)$，即$M(\frac{2}{3}x_0,\frac{2}{3}y_0)$.

由$A(2,0)$，$B(0,1)$，所以直线AB的方程为$x+2y-2=0$.

点M在线段AB上，所以$\frac{2}{3}x_0+\frac{4}{3}y_0-2=0$，整理得$x_0=3-2y_0$，①

因为点Q在椭圆G上，所以$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，②

把①式代入②式可得$8y_0^2-12y_0+5=0$，因为判别式小于零，该方程无解.

所以，不存在直线l，使得ΔBOP的面积是ΔBMQ的面积的3倍. ….13分

(20) （共14分）

解：函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=[x^2+(a+3)x+a+2]e^x$.

（Ⅰ）因为曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与x轴平行，

所以$f'(0)=(a+2)e^0=0$，解得$a=-2$.

此时$f(0)=1\neq 0$，所以a的值为-2. ….5分

（Ⅱ）因为$f'(x)=[x^2+(a+3)x+a+2]e^x=(x+1)[x+(a+2)]e^x$，

① 若$a<-1$，$-(a+2)>-1$，

则当$x\in(-\infty,-1)$时，$x+1<0, x+(a+2)<x+1<0$, 所以$f'(x)>0$；

当$x\in(-1,-(a+2))$时，$x+1>0, x+(a+2)<0$, 所以$f'(x)<0$.

所以$f(x)$在$x=-1$处取得极大值.

② 若$a\geq -1$，$-(a+2)\leq -1$，

则当$x\in(-1,0)$时，$x+1>0, x+(a+2)\geq x+1>0$,

所以$f'(x)>0$.

所以-1不是$f(x)$的极大值点 .

综上可知，a的取值范围为$(-\infty,-1)$. ….10分

（Ⅲ）$m>\frac{e^4}{5}$. ….14分