昌平区 2020 年高三年级第二次统一练习

数 学 试 卷

（满分 150 分，考试时间 120 分钟）2020. 6

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-2<x<1\},B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则集合 $A\cap B=$

（A）$\{0\}$　　（B）$\{-1,0\}$　　（C）$\{0,1\}$　　（D）$\{-1,0,1\}$

（2）在复平面内，复数 $\mathrm{i}(\mathrm{i}-a)$ 对应的点的坐标为 $(-1,2)$，则实数 $a=$

（A）1　　（B）-1　　（C）2　　（D）-2

（3）在 $(x-2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为

（A）-40　　（B）40　　（C）-80　　（D）80

（4）已知向量 $\boldsymbol{a}=(t,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,2)$.若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则实数 t 的值为

（A）-2　　（B）2　　（C）$-\dfrac{1}{2}$　　（D）$\dfrac{1}{2}$

（5）设 $a=2^{0.3},b=(\dfrac{1}{2})^{-0.5},c=\ln 2$，则

（A）$c<b<a$　　（B）$c<a<b$　　（C）$a<b<c$　　（D）$b<a<c$

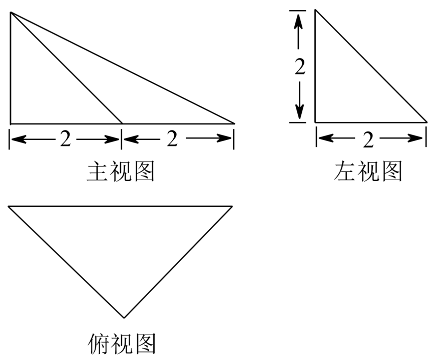
（6）某四面体的三视图如图所示，该四面体四个面的面积中，最大的是

（A）4

（B）8

（C）$2\sqrt{6}$

（D）$4\sqrt{6}$



（7）已知点 P 是双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的一条渐近线 $y=kx(k>0)$ 上一点，F 是双曲线 C 的右焦点，若△OPF 的面积为 5，则点 P 的横坐标为

（A）$\pm\sqrt{5}$　　（B）$\sqrt{5}$　　（C）$\pm 2\sqrt{5}$　　（D）$2\sqrt{5}$

（8）已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，则“函数 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增”是“$0<\omega\le 2$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）点 P 在函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的图象上. 若满足到直线 $y=x+a$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点 P 有且仅有 3 个，则实数 a 的值为

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）3　　（D）4

（10）一次数学考试共有 8 道判断题，每道题 5 分，满分 40 分. 规定正确的画 √，错误的画 ×. 甲、乙、丙、丁四名同学的解答及得分情况如下表所示，则 m 的值为

题号 学生	1	2	3	4	5	6	7	8	得分
甲	×	√	×	√	×	×	√	×	30
乙	×	×	√	√	√	×	×	√	25
丙	√	×	×	×	√	√	√	×	25
丁	×	√	×	√	√	×	√	√	m

（A）35　　（B）30　　（C）25　　（D）20

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）已知 $a>1$，则 $a+\dfrac{4}{a-1}$ 的最小值为________．

（12）设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=3$，$a_{n+1}=a_n-2$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$________.

（13）已知点 M 在抛物线 $y^2=4x$ 上，若以点 M 为圆心的圆与 x 轴和其准线 l 都相切，则点 M 到其顶点 O 的距离为__．

（14） 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们的终边关于原点对称，点 $M(x,-1)$ 在角 β 的终边上.若 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$， 则 $\sin\beta=$________ ； $x=$_____ .

（15）曲线 C: $\sqrt{(x+1)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=3$,点 P 在曲线 C 上．给出下列三个结论：

①曲线 C 关于 y 轴对称；

②曲线 C 上的点的横坐标的取值范围是 $[-2,2]$；

③若 $A(-1,0)$，$B(1,0)$， 则存在点 P，使△ PAB 的面积大于 $\dfrac{3}{2}$.

其中，所有正确结论的序号是________.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

在 ΔABC 中， $\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$.

（Ⅰ）求 $\angle B$；

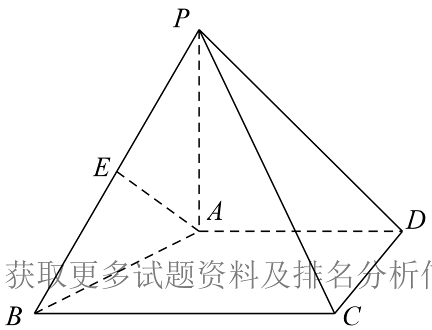
（Ⅱ）若 $b=2$， $c=2a$,求 ΔABC 的面积.

(17)（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA\perp$ 平面 $ABCD$， $PA=AD=CD=2$， $BC=3$，$PC=2\sqrt{3}$， E 为 PB 中点，________ ，求证：四边形 $ABCD$ 是直角梯形，并求直线 AE 与平面 PCD 所成角的正弦值.

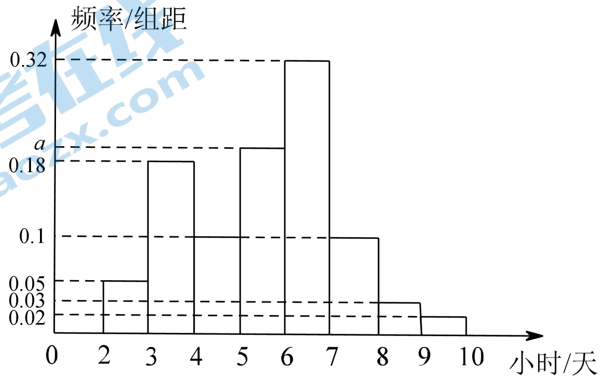
从① $CD\perp BC$；② BC // 平面 PAD 这两个条件中选一个，补充在上面问题中，并完成解答；

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.



（18）（本小题 14 分）

为了认真贯彻落实北京市教委关于做好中小学生延期开学期间“停课不停学”工作要求，各校以教师线上指导帮助和学生居家自主学习相结合的教学模式积极开展工作，并鼓励学生积极开展锻炼身体和课外阅读活动. 为了解学生居家自主学习和锻炼身体的情况，从某校高三年级随机抽取了 100 名学生，获得了他们一天中用于居家自主学习和锻炼身体的总时间分别在 $[2,3),[3,4),[4,5),$L $,[8,9),[9,10)$ （单位：小时）的数据，整理得到的数据绘制成频率分布直方图（如图）.



（Ⅰ）由图中数据求 a 的值，并估计从该校高三年级中随机抽取一名学生，这名学生该天居家自主学习和锻炼身体的总时间在 $[5,6)$ 的概率；

（Ⅱ）为了进一步了解学生该天锻炼身体的情况，现从抽取的 100 名学生该天居家自主学习和锻炼身体的总时间在 $[2,3)$ 和 $[8,9)$ 的人中任选 3 人，求其中在 $[8,9)$ 的人数 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）假设同一时间段中的每个数据可用该时间段的中点值代替，试估计样本中的 100 名学生该天居家自主学习和锻炼身体总时间的平均数在哪个时间段？（只需写出结论）

（19）（本小题 15 分）

已知椭圆 $M:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，椭圆 M 与 y 轴交于 A,B 两点(A 在下方)，且 $|AB|=4$. 过点 $G(0,1)$ 的直线 l 与椭圆 M 交于 C,D 两点（不与 A 重合）.

（Ⅰ）求椭圆 M 的方程；

（Ⅱ）证明：直线 AC 的斜率与直线 AD 的斜率乘积为定值.

（20）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax+a,a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程；

（II）求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（III）当 $x\in(0,2)$ 时，比较 $f(x)$ 与 $-|1-a|$ 的大小.

（21）（本小题 14 分）

已知有限数列 $\{a_n\}$，从数列 $\{a_n\}$ 中选取第 i_1 项、第 i_2 项、…、第 i_m 项 $(i_1<i_2<\dots<i_m)$，顺次排列构成数列 $\{b_k\}$，其中 $b_k=a_{i_k}$，$1\leqslant k\leqslant m$，则称新数列 $\{b_k\}$ 为 $\{a_n\}$ 的长度为 m 的子列．规定：数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是 $\{a_n\}$ 的长度为 1 的子列．若数列 $\{a_n\}$ 的每一子列的所有项的和都不相同，则称数列 $\{a_n\}$ 为完全数列．

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=n,1\le n\le 25,n\in\mathbf{N}^*$.

（Ⅰ）判断下面数列 $\{a_n\}$ 的两个子列是否为完全数列，并说明由；

数列⑴：$3,5,7,9,11$；数列⑵：$2,4,8,16$.

（Ⅱ）数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_k\}$ 长度为 m，且 $\{b_k\}$ 为完全数列，证明：m 的最大值为 6；

（III）数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_k\}$ 长度 $m=5$，且 $\{b_k\}$ 为完全数列，求 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\frac{1}{b_4}+\frac{1}{b_5}$ 的最大值.

昌平区 2020 年高三年级第二次统一练习

数学试卷参考答案及评分标准　　2020.6

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题 号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答 案	B	D	C	A	B	C	A	A	C	B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）5　　（12）$S_n=-n^2+4n$　　（13）$\sqrt{5}$

（14）$-\dfrac{1}{3}$；$\pm 2\sqrt{2}$　　（15）①②

（注：第 14 题第一空 3 分,第二空 2 分；第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分.）

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（16）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）在 ΔABC 中，由正弦定理，

因为 $\sqrt{3}a\cos B=b\sin A$，

所以 $\sqrt{3}\sin A\cos B=\sin B\sin A.$ ……………..2 分

因为 $\sin A\neq 0$，

所以 $\sqrt{3}\cos B=\sin B.$

所以 $\tan B=\sqrt{3}.$ ……………..4 分

因为 $0<B<\pi$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}.$ ……………..6 分

（Ⅱ）因为 $b=2$，$c=2a$，由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 可得

$4=a^2+4a^2-2a\times 2a\times\dfrac{1}{2}.$ ……………..8 分

所以 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},c=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}.$ ……………..12 分

所以 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}.$ ……………..14 分

（17）（本小题满分 14 分）

解 1：选择①

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA \perp AD$， $PA \perp CD$． ……………..1 分

因为 $PA = AD = CD = 2$，

所以 $PD = 2\sqrt{2}$．

因为 $PC = 2\sqrt{3}$，

所以 $CD^2 + PD^2 = PC^2$．

所以 $CD \perp PD$． …………….4 分

因为 $PA \cap PD = P$，

所以 $CD \perp$ 平面 PAD． …………….6 分

所以 $CD \perp AD$．

因为 $CD \perp BC$，

所以 $AD // BC$． …………….7 分

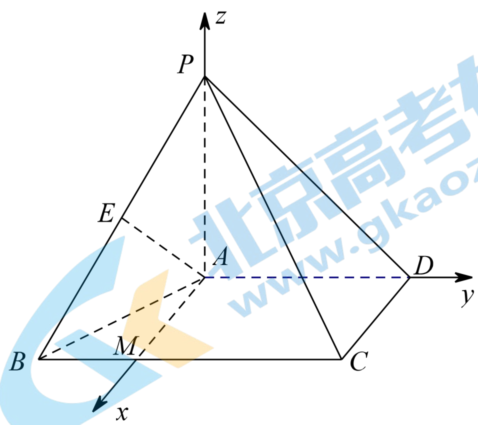
所以四边形 $ABCD$ 是直角梯形.

解 2：选择②

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA \perp AD$， $PA \perp CD$． ……………..1 分

因为 $PA = AD = CD = 2$，



所以 $PD = 2\sqrt{2}$．

因为 $PC = 2\sqrt{3}$，

所以 $CD^2 + PD^2 = PC^2$．

所以 $CD \perp PD$……………..4 分

因为 $PA \cap PD = P$，

所以 $CD \perp$ 平面 PAD．

所以 $CD \perp AD$． …………….6 分

因为 $BC //$ 平面 PAD， $BC \subset$ 平面 $ABCD$， 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $BC // AD$．

所以四边形 $ABCD$ 是直角梯形. …………….7 分

过 A 作 AD 的垂线交 BC 于点 M．

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA \perp AM, PA \perp AD$． …………….8 分

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$． …………….9 分

则 $A(0,0,0),C(2,2,0),D(0,2,0),P(0,0,2)$.

因为 E 为 PB 中点，

所以 $E(1,-\frac{1}{2},1)$.

所以 $\overrightarrow{AE}=(1,-\frac{1}{2},1),\overrightarrow{PC}=(2,2,-2),\overrightarrow{PD}=(0,2,-2)$. ....10 分

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2y-2z=0,\\ 2y-2z=0.\end{cases}$ ....11 分

令 $y=1$, 则 $z=1,x=0$.

于是 $\vec{n}=(0,1,1)$. ....12 分

设直线 AE 与平面 PCD 所成的角为 α，

所以 $\sin\alpha=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{AE}\rangle|=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{-\frac{1}{2}\times1+1\times1}{\sqrt{2}\times\frac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

所以直线 AE 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$. ....14 分

(18)（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $(0.05+0.1+0.18+a+0.32+0.1+0.03+0.02)\times1=1$，

所以 $a=0.2$. ....2 分

因为 $0.2\times1\times100=20$，

所以居家自主学习和锻炼身体总时间该天在 $[5,6)$ 的学生有 20 人. ....3 分

所以从该校高三年级中随机抽取一名学生，这名学生该天居家自主学习和锻炼身体总时间在 $[5,6)$ 的概率为 $\dfrac{20}{100}=0.2$. ....5 分

（Ⅱ）由图中数据可知该天居家自主学习和锻炼身体总时间在 $[2,3)$ 和 $[8,9)$ 的人分别有 5 人和 3 人. ....6 分

所以 X 的所有可能取值为 0,1,2,3. ....7 分

$P(X=0)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{5}{28}$，$P(X=1)=\dfrac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\dfrac{15}{28}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$. ....9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

所以 X 的期望 $E(X)=0\times\frac{5}{28}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{15}{56}+3\times\frac{1}{56}=\frac{9}{8}$. …………11 分

（III）样本中的 100 名学生该天居家自主学习和锻炼身体总时间的平均数在 $[5,6)$.

…14 分

(19)（本小题满分 15 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5},\\ 2b=4,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\sqrt{5},\\ b=2,\\ c=1.\end{cases}$ …………….3 分

即椭圆的方程为 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. …………….5 分

（Ⅱ）法一

由题意，直线 l 的斜率存在.

当 $k=0$ 时，直线 l 的方程为 $y=1$.

代入椭圆方程有 $x=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$.

则 $C(-\frac{\sqrt{15}}{2},1),D(\frac{\sqrt{15}}{2},1)$.

所以 $k_{AC}=\frac{-2-1}{\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{-6}{\sqrt{15}},k_{AD}=\frac{-2-1}{-\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{6}{\sqrt{15}}$.

所以 $k_{AC}\cdot k_{AD}=\frac{-6}{\sqrt{15}}\times\frac{6}{\sqrt{15}}=-\frac{12}{5}$. …………….8 分

当 $k\neq 0$ 时，则直线 l 的方程为 $y=kx+1$.

由 $\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得 $(4+5k^2)x^2+10kx-15=0$. …………….9 分

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{10k}{4+5k^2}, x_1x_2=-\dfrac{15}{4+5k^2}$．　　　　…………10 分

又 $A(0,-2)$，

所以 $k_{AC}=\dfrac{y_1+2}{x_1}$，$k_{AD}=\dfrac{y_2+2}{x_2}$．　　　　……………11 分

因为 $k_{AC}\cdot k_{AD}=\dfrac{y_1+2}{x_1}\bullet\dfrac{y_2+2}{x_2}=\dfrac{(kx_1+3)(kx_2+3)}{x_1x_2}$

$$=\frac{k^2x_1x_2+3k(x_1+x_2)+9}{x_1x_2}=k^2+\frac{3k(x_1+x_2)+9}{x_1x_2}$$

$$=k^2+\frac{3k(-\frac{10k}{4+5k^2})+9}{\frac{-15}{4+5k^2}}=k^2+\frac{-30k^2+36+45k^2}{-15}=-\frac{12}{5}.$$

即直线 AC 的斜率与直线 AD 的斜率乘积为定值．　　　　……………15 分

法二

设直线 l 的斜率为 k，则直线 l 的方程为 $y=kx+1$．　　　　……………6 分

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，得 $(4+5k^2)x^2+10kx-15=0$．　　　　……………7 分

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\dfrac{10k}{4+5k^2}, x_1x_2=-\dfrac{15}{4+5k^2}$．　　　　……………9 分

又 $A(0,-2)$，

所以 $k_{AC}=\dfrac{y_1+2}{x_1}$，$k_{AD}=\dfrac{y_2+2}{x_2}$．　　　　……………11 分

因为 $k_{AC}\cdot k_{AD}=\dfrac{y_1+2}{x_1}\bullet\dfrac{y_2+2}{x_2}=\dfrac{(kx_1+3)(kx_2+3)}{x_1x_2}$

$$=\frac{k^2x_1x_2+3k(x_1+x_2)+9}{x_1x_2}=k^2+\frac{3k(x_1+x_2)+9}{x_1x_2}$$

$$=k^2+\frac{3k(-\frac{10k}{4+5k^2})+9}{\frac{-15}{4+5k^2}}=k^2+\frac{-30k^2+36+45k^2}{-15}=-\frac{12}{5}.$$

即直线 AC 的斜率与直线 AD 的斜率乘积为定值．　　　　……………15 分

(20)（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+1$.

因为 $f'(x)=x^2-1$， ……………1 分

所以 $f'(0)=-1$. ……………2 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $x+y-1=0$. ……………4 分

（II）定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $f'(x)=x^2-a, a\in\mathbf{R}$.

①当 $a=0$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立.

所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. ……………5 分

②当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立.

所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. ……………6 分

③当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，则 $x=-\sqrt{a}$ 或 $x=\sqrt{a}$. ……………7 分

所以当 $f'(x)>0$ 时，$x<-\sqrt{a}$ 或 $x>\sqrt{a}$；

当 $f'(x)<0$ 时，$-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$. ……………8 分

所以函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{a})$ 和 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(-\sqrt{a},\sqrt{a})$ 上单调递减. ……………9 分

综上可知，当 $a\leq 0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{a})$ 和 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(-\sqrt{a},\sqrt{a})$ 上单调递减.

（III）法一：由（II）可知，

（1）当 $a\leq 0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

所以当 $x\in(0,2)$ 时，$f_{\min}(x)>f(0)=a$.

因为 $-|1-a|=-(1-a)=a-1$，

所以 $f(x)>-|1-a|$.　　　　　　　　　　　　　　　　……………10 分

（2）当 $a>0$ 时，函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{a})$ 和 $(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(-\sqrt{a},\sqrt{a})$ 上单调递减.

①当 $0<\sqrt{a}\le 1$，即 $0<a\le 1$ 时，$-|1-a|\le 0$.

所以当 $x\in(0,2)$ 时，

函数 $y=f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递减，$(\sqrt{a},2)$ 上单调递增，

$$
\begin{aligned}
f_{\min}(x)&=f(\sqrt{a})\\
&=\frac{1}{3}(\sqrt{a})^3-a\sqrt{a}+a\\
&=a(-\frac{2}{3}\sqrt{a}+1)>0
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)>-|1-a|$.　　　　　　　　　　　　　　　　……………11 分

②当 $1<\sqrt{a}<2$，即 $1<a<4$ 时，$-|1-a|=1-a<0$.

由上可知 $f_{\min}(x)=f(\sqrt{a})=a(-\frac{2}{3}\sqrt{a}+1)$，

因为 $a(-\frac{2}{3}\sqrt{a}+1)-(1-a)=2a-\frac{2a\sqrt{a}}{3}-1$，

设 $g(x)=2x-\frac{2x\sqrt{x}}{3}-1,(1<x<4)$.

因为 $g'(x)=2-\sqrt{x}>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(1,4)$ 上单调递增.

所以 $g(x)>g(1)=\frac{1}{3}>0$.

所以 $a(-\frac{2}{3}\sqrt{a}+1)-(1-a)=2a-\frac{2a\sqrt{a}}{3}-1>0$

所以 $f(x)>-|1-a|$.　　　　　　　　　　　　　　　　……………13 分

③当 $\sqrt{a}\ge 2$，即 $a\ge 4$ 时，$-|1-a|=1-a<0$.

因为函数 $y=f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 上单调递减，

所以当 $x\in(0,2)$ 时，$f_{\min}(x)=f(2)=\dfrac{8}{3}-a>1-a$.

所以 $f(x)>-|1-a|$.

综上可知，当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)>-|1-a|$. ....14 分

（III）法二：

因为 $f(x)-(-|1-a|)=f(x)+|1-a|$，

①当 $a\le 1$ 时，

因为 $x\in(0,2)$，

所以 $-ax\ge -x$.

所以 $f(x)+|1-a|=f(x)+1-a=\dfrac{1}{3}x^3-ax+1>\dfrac{1}{3}x^3-x+1$ . ...10 分

②当 $a>1$ 时，

$f(x)+|1-a|=f(x)+a-1=\dfrac{1}{3}x^3-ax+2a-1=\dfrac{1}{3}x^3+a(2-x)-1$

因为 $x\in(0,2)$，

所以 $a(2-x)\ge(2-x)$.

所以 $f(x)+|1-a|=\dfrac{1}{3}x^3+a(2-x)-1>\dfrac{1}{3}x^3+(2-x)-1=\dfrac{1}{3}x^3-x+1$ .. 11 分

设 $g(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x+1$.

因为 $g'(x)=x^2-1=(x+1)(x-1)$，

所以当 $g'(x)>0$ 时，$x<-1$ 或 $x>1$，

当 $g'(x)<0$ 时，$-1<x<1$. ....12 分

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,2)$ 上单调递增. ....13 分

所以 $g_{\min}(x)=g(1)=\dfrac{1}{3}>0$.

所以当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)>-|1-a|$. ....14 分

(21)（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）数列⑴不是 $\{a_n\}$ 的完全数列；数列⑵是 $\{a_n\}$ 的完全数列. ....2 分

理由如下：

数列⑴：3,5,7,9,11 中，因为 3+9=5+7=12，所以数列⑴不是 $\{a_n\}$ 的完全数列；

数列⑵：$2,4,8,16$ 中，所有项的和都不相等，数列⑵是 $\{a_n\}$ 的完全数列．….4 分

（Ⅱ）假设数列 $\{b_k\}$ 长度为 $m\geqslant 7$，不妨设 $m=7$，各项为 $b_1<b_2<b_3<\cdots<b_7$．

考虑数列 $\{b_k\}$ 的长度为 $2,3,\cdots,7$ 的所有子列，一共有 $2^7-1-7=120$ 个．

记数列 $\{b_k\}$ 的长度为 $2,3,\cdots,7$ 的所有子列中，各个子列的所有项之和的最小值为

a，最大值为 A．

所以 $a=b_1+b_2$， $A=b_1+b_2+25+24+23+22+21=b_1+b_2+115$．

所以其中必有两个子列的所有项之和相同．

所以假设不成立．

再考虑长度为 6 的子列：12，18，21，23，24，25，满足题意．

所以子列 $\{b_k\}$ 的最大长度为 6． ....9 分

（Ⅲ）数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{b_k\}$ 长度 $m=5$，且 $\{b_k\}$ 为完全数列，且各项为

$b_1<b_2<b_3<\cdots<b_5$．

所以，由题意得，这 5 项中任意 i $(1\leqslant i\leqslant 5)$ 项之和不小于 2^i-1．

即对于任意的 $1\leqslant i\leqslant 5$，有 $b_1+b_2+\cdots+b_i\geqslant 2^i-1$，

即 $b_1+b_2+\cdots+b_i\geqslant 1+2+4+\cdots+2^{i-1}$．

对于任意的 $1\leqslant i\leqslant 5$， $(b_1-1)+(b_2-2)+\cdots+(b_i-2^{i-1})\geqslant 0$，

设 $c_i=b_i-2^{i-1}$（$(i=1,2,3,4,5)$），则数列 $\{c_i\}$ 的前 j 项和 $D_j\geqslant 0$ $(j=1,2,3,4,5)$．

下面证明：$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_3}+\dfrac{1}{b_4}+\dfrac{1}{b_5}\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}$．

因为 $(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16})-(\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_3}+\dfrac{1}{b_4}+\dfrac{1}{b_5})$

$=(1-\dfrac{1}{b_1})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{b_2})+(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{b_3})+(\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{b_4})+(\dfrac{1}{16}-\dfrac{1}{b_5})$

$=\dfrac{b_1-1}{b_1}+\dfrac{b_2-2}{2b_2}+\dfrac{b_3-4}{4b_3}+\dfrac{b_4-8}{8b_4}+\dfrac{b_5-16}{16b_5}$

$=\dfrac{D_1}{b_1}+\dfrac{D_2-D_1}{2b_2}+\dfrac{D_3-D_2}{4b_3}+\dfrac{D_4-D_3}{8b_4}+\dfrac{D_5-D_4}{16b_5}$

$=D_1(\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{2b_2})+D_2(\dfrac{1}{2b_2}-\dfrac{1}{4b_3})+D_3(\dfrac{1}{4b_3}-\dfrac{1}{8b_4})+D_4(\dfrac{1}{8b_4}-\dfrac{1}{16b_5})+\dfrac{D_5}{16b_5}\geqslant 0$，

所以 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\frac{1}{b_4}+\frac{1}{b_5}\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}$，当且仅当

$b_i=2^{i-1}\ (i=1,2,3,4,5)$ 时，等号成立.

所以 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\frac{1}{b_4}+\frac{1}{b_5}$ 的最大值为 $\frac{31}{16}$. ……………14 分

关于我们