

2023年广州市普通高中毕业班综合测试(一)

数 学

本试卷共5页,22小题,满分150分。考试用时120分钟。

注意事项:1. 答卷前,考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、试室号、座位号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型(A)填涂在答题卡的相应位置上,并在答题卡相应位置上填涂考生号。

2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案,答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内的相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数 $z = 3 - 4i$, 则 $\frac{\bar{z}}{|z|} =$

A. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

B. $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

C. $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

D. $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

2. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 则集合 A 的子集个数为

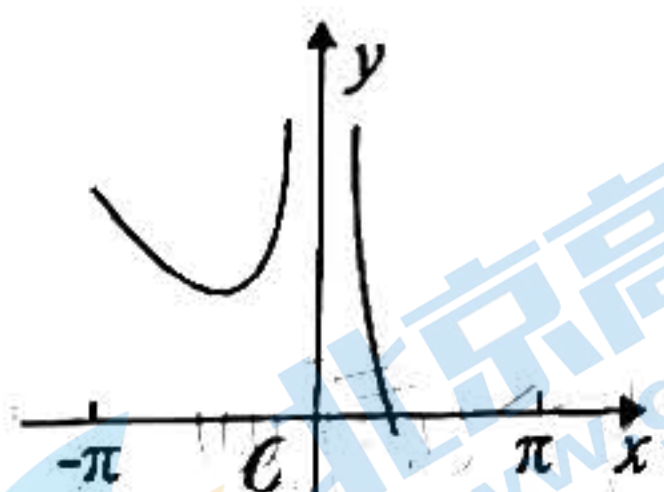
A. 3

B. 4

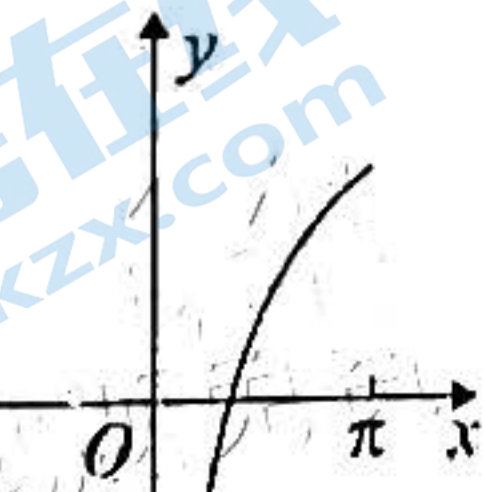
C. 8

D. 16

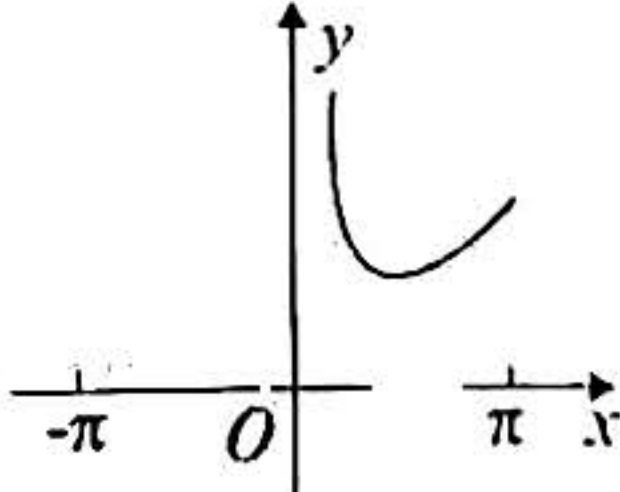
3. 函数 $f(x) = x - \frac{\sin x}{x^3}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图像大致为



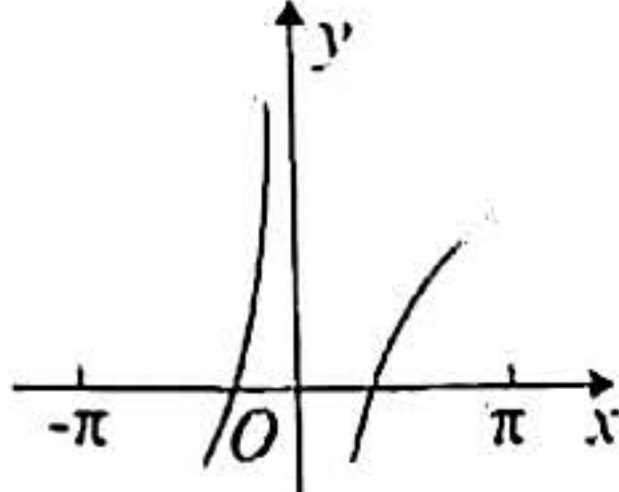
A.



B.



C.



D.

4. 已知 θ 为第一象限角, $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\tan 2\theta =$

- A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. “回文”是古今中外都有的一种修辞手法, 如“我为人人, 人人为我”等. 数学上具有这样特征的一类数称为“回文数”, “回文数”是指从左到右与从右到左读都一样的正整数, 如121, 241142等. 在所有五位正整数中, 有且仅有两位数字是奇数的“回文数”共有

- A. 100个 B. 125个 C. 225个 D. 250个

6. 已知抛物线 C 的顶点为坐标原点 O , 焦点 F 在 x 轴上, 过点 $(2, 0)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$, 线段 PQ 的中点为 M , 则直线 MF 的斜率的最大值为

- A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在球 O 的球面上, $PB = PC = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 4$, $PA = BC = 2$, 则球 O 的表面积为

- A. $\frac{316}{15}\pi$ B. $\frac{79}{15}\pi$ C. $\frac{158}{5}\pi$ D. $\frac{79}{5}\pi$

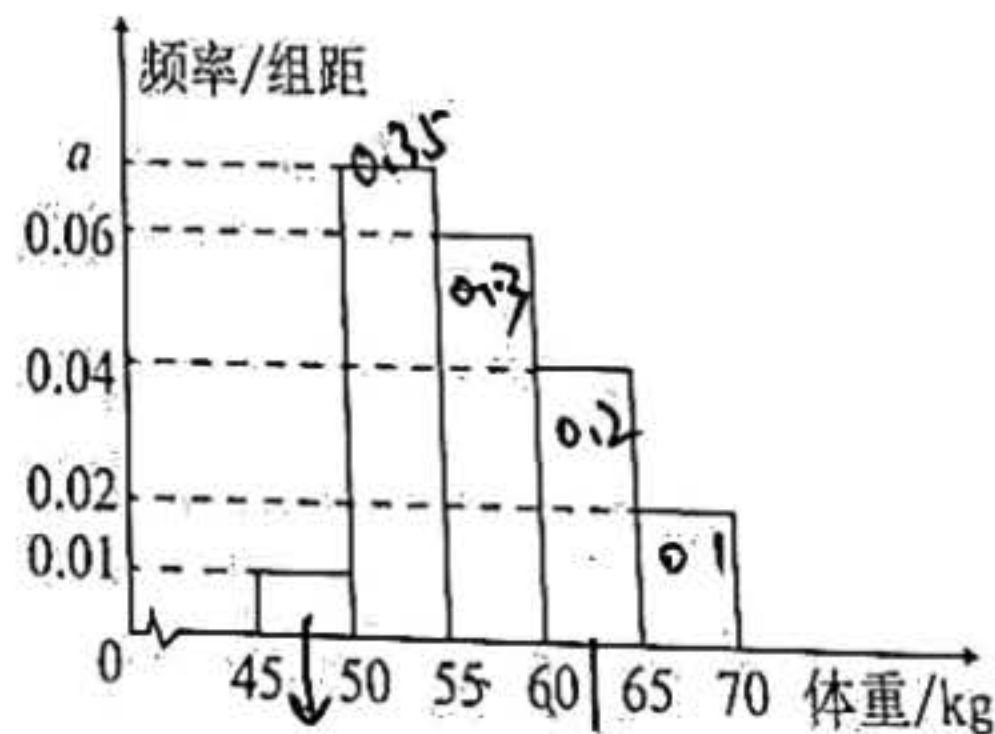
8. 已知 a, b, c 均为正实数, e 为自然对数的底数, 若 $a = be^c$, $|\ln a| > |\ln b|$, 则下列不等式一定成立的是

- A. $a + b < ab$ B. $a^b < b^a$ C. $c < \frac{a-b}{a+b}$ D. $a^2 > c + 1$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.

9. 某校随机抽取了100名学生测量体重. 经统计, 这些学生的体重数据(单位: kg)全部介于45至70之间, 将数据整理得到如图所示的频率分布直方图, 则

- A. 频率分布直方图中 a 的值为 0.07
 B. 这 100 名学生中体重低于 60 kg 的人数为 60
 C. 据此可以估计该校学生体重的第 78 百分位数约为 62
 D. 据此可以估计该校学生体重的平均数约为 62.5



11. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 对称, 则

A. 函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ 对称

B. 函数 $y = f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有且仅有 2 个极值点

C. 若 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{4}$

D. 若 $f(\alpha - \frac{\pi}{8})f(\beta - \frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}$, 则 $\cos 2(\alpha - \beta) = 1 + \cos 2(\alpha + \beta)$

12. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2$ ($x \geq 0$), $g(x) = ae^{-x}$ ($a > 0$), 点 P, Q 分别在函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像上, O 为坐标原点, 则下列命题正确的是

A. 若关于 x 的方程 $f(x) - g(x) = 0$ 在 $[0, 1]$ 上无解, 则 $a > 3e$

B. 存在 P, Q 关于直线 $y = x$ 对称

C. 若存在 P, Q 关于 y 轴对称, 则 $0 < a \leq 2$

D. 若存在 P, Q 满足 $\angle POQ = 90^\circ$, 则 $0 < a \leq \frac{1}{2\sqrt{2}e}$

13. 平面内到两定点距离之积为常数的点的轨迹称为卡西尼卵形线, 它是 1675 年卡西尼在研究土星及其卫星的运行规律时发现的. 已知在平面直角坐标系 xOy 中, $M(-2, 0), N(2, 0)$, 动点 P 满足 $|PM| \cdot |PN| = 5$, 则下列结论正确的是

A. 点 P 的横坐标的取值范围是 $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$

B. $|OP|$ 的取值范围是 $[1, 3]$

C. $\triangle PMN$ 面积的最大值为 $\frac{5}{2}$

D. $|PM| + |PN|$ 的取值范围是 $[2\sqrt{5}, 5]$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知向量 $a = (1, 2), b = (3, x)$, a 与 $a + b$ 共线, 则 $|a - b| =$ _____

14. 已知 $n \in \mathbb{N}^*$, 将数列 $\{2n - 1\}$ 与数列 $\{n^2 - 1\}$ 的公共项从小到大排列得到新数列

则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{10}} =$ _____

15. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，其导函数为 $f'(x)$ ，若 $xf'(x) - 1 < 0$ ， $f(e) = 2$ ，则关于 x 的不等式 $f(e^x) < \frac{x}{e^x} + 1$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ 。

16. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E, F 分别是棱 BC, CC_1 的中点，点 P 是侧面 ADD_1A_1 上的动点，且 $PC_1 \perp$ 平面 AEF ，则点 P 的轨迹长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 P 到直线 AF 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 。（第一个空 2 分，第二个空 1 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n + 2^n = 2a_n + 1$ 。

(1) 求 a_1 ，并证明数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 是等差数列；

(2) 若 $2a_n^2 < S_{2n}$ ，求正整数 n 的所有取值。

18. (12 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2}b$ 。

(1) 证明： $\sin A + \sin C = 2 \sin B$ ；

(2) 若 $b = 2, \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

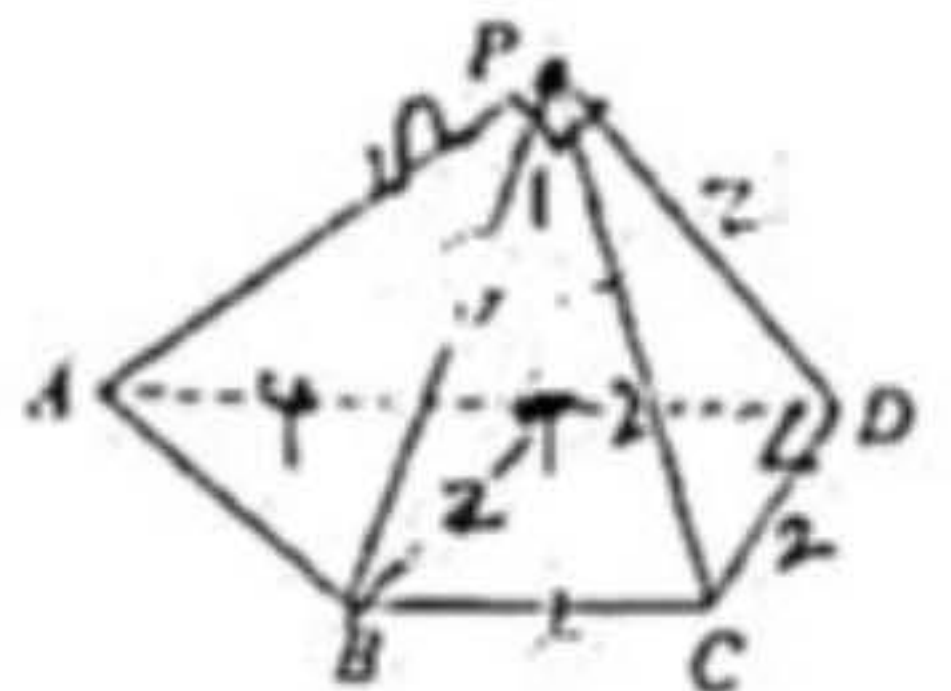
19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，

$BC \parallel AD, CD \perp AD, AD = 2CD = 2BC = 4, PB = 2\sqrt{3}$ 。

(1) 求证： $AD \perp PB$ ；

(2) 求平面 PAB 与平面 $ABCD$ 夹角的正弦值。



为了拓展学生的知识面，提高学生对科学的兴趣，学校组织学生参加航空航天科普知识答题竞赛，每位参赛学生答题若干次，答题赋分方法如下：第1次答题，答对得20分，答错得10分；从第2次答题开始，答对则获得上一次答题得分的两倍，答错得10分。学生甲参加答题竞赛，每次答对的概率为 $\frac{3}{4}$ ，各次答题结果互不影响。

(1) 求甲前3次答题得分之和为40分的概率；

(2) 记甲第 i 次答题所得分数 $X_i (i \in \mathbb{N}^*)$ 的数学期望为 $E(X_i)$ 。

① 写出 $E(X_{i+1})$ 与 $E(X_i)$ 满足的等量关系式（直接写出结果，不必证明）；

② 若 $E(X_i) > 100$ ，求 i 的最小值。

21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，以 C 的短轴为直径的圆与直线 $y = ax + 6$ 相切。

(1) 求 C 的方程；

(2) 直线 $l: y = k(x-1) (k \neq 0)$ 与 C 相交于 A, B 两点，过 C 上的点 P 作 x 轴的平行线交线段 AB 于点 Q ，直线 OP 的斜率为 $k' (O$ 为坐标原点)， $\triangle APQ$ 的面积为 S_1 ， $\triangle BPQ$ 的面积为 S_2 ，若 $|AP| \cdot S_2 = |BP| \cdot S_1$ ，判断 $k \cdot k'$ 是否为定值？并说明理由。

22. (12分)

已知 $a > 0$ ，函数 $f(x) = (1 - ax)(e^x - 1)$ 。

(1) 若 $a = 1$ ，证明：当 $x > 0$ 时， $f(x) < \ln(x+1)$ ；

(2) 若函数 $h(x) = \ln(x+1) - f(x)$ 存在极小值点 x_0 ，证明： $f(x_0) \geq 0$ 。

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯