

数 学

2019 年 11 月

命题人：高一年级数学学科备课组

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 100 分，考试用时 100 分钟。考试结束后，将本试卷与答题纸一并交回。祝各位考生考试顺利！

第 I 卷

一、单项选择题（本大题共 15 小题，每小题 3 分，共 45 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。）

1. 若集合 $A = \{0, 1, 2, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ B. $\{0, 4\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{3\}$

2. 命题“对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 \geq 0$ ”的否定为 $()$

- A. 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 < 0$ B. $\exists x \notin \mathbf{R}$, 使得 $x^2 < 0$
C. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0^2 < 0$ D. $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $x_0^2 \geq 0$

3. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则 $()$

- A. $ac > bc$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $a^2 > b^2$ D. $a^3 > b^3$

4. 下列函数中与函数 $y = x$ 是同一函数的是 $()$

- A. $y = |x|$ B. $y = \sqrt[3]{x^3}$ C. $y = \sqrt{x^2}$ D. $y = \frac{x^2}{x}$

5. 函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2-x}$ 的定义域是 $()$

- A. $[-1, +\infty)$ B. $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$ C. $(-\infty, +\infty)$ D. $[-1, 2)$

6. 若函数 $f(x-1) = x^2 + 1$, 则 $f(-1) = ()$

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

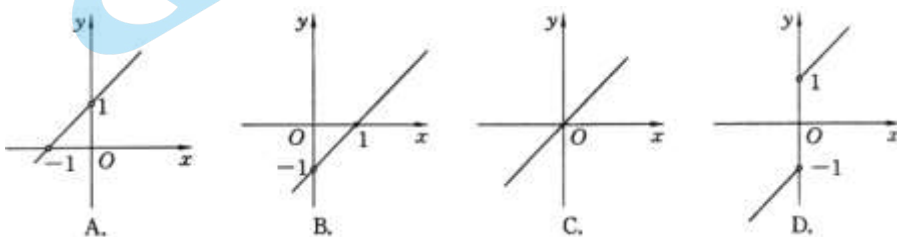
7. 下列函数中，定义域为 \mathbf{R} 的单调递减函数是 $()$

- A. $y = -x^2$ B. $y = \frac{1}{x}$ C. $y = |x|$ D. $y = -2x + 1$

8. “ $a > b$ ”是“ $a > |b|$ ”的 $()$

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 函数 $y = \frac{|x|}{x} + x$ 的图象是 $()$



10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ \frac{2}{x}, & x > 1, \end{cases}$ 则 $f(f(3))$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{13}{9}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 3

11. $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 下列结论中, 不正确的是 ()

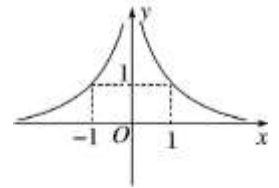
- A. $f(x) + f(-x) = 0$ B. $f(-x) - f(x) = -2f(x)$
C. $f(x) \cdot f(-x) \leq 0$ D. $\frac{f(x)}{f(-x)} = -1$

12. 已知 $f(x) = ax^3 + bx - 4$ 其中 a, b 为常数, 若 $f(-2) = 2$, 则 $f(2)$ 的值等于 ()

- A. -2 B. -4 C. -6 D. -10

13. 幂函数 $y = x^{m^2-4m} (m \in \mathbb{Z})$ 的图象如图所示, 则 m 的值为 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3



14. 函数 $f(x)$ 是定义在 $[-6, 6]$ 上的偶函数, 且在 $[-6, 0]$ 上单调递减, 则一定有 ()

- A. $f(3) + f(4) > 0$ B. $f(-3) - f(-2) < 0$
C. $f(4) - f(-1) > 0$ D. $f(-2) + f(-5) < 0$

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \geq 0, \\ 4x - x^2, & x < 0, \end{cases}$ 若 $f(4-a) > f(a)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(2, +\infty)$
C. $(-\infty, -2)$ D. $(-2, +\infty)$

第 II 卷

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分.)

16. 计算: $(\frac{25}{4})^{\frac{3}{2}} =$ _____.

17. 已知 $a + b > 0, b < 0$, 那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是 _____ (用 “>” 号连接)

18. 若 $x > 0$, 则 $x + \frac{2}{x}$ 的最小值为 _____, 此时 $x =$ _____.

19. 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 在 $x \in [0, 3]$ 上的最大值和最小值分别为 M, N , 则 $M + N =$ _____.

20. $f(x) = x^2 + 2(a-1)x + 2$ 在区间 $(-\infty, -4]$ 上单调递减, 则 a 的取值范围是 _____.

21. 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[-1, 1]$ 上的增函数, 且 $f(x-2) < f(1-x)$, 则 x 的取值范围是 _____.

22. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x) > 0$ 的 x 的取值范围是 _____.

23. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq a, \\ -2x, & x > a \end{cases}$. ①若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 的最大值为 _____;

②若 $f(x)$ 无最大值, 则实数 a 的取值范围是 _____.

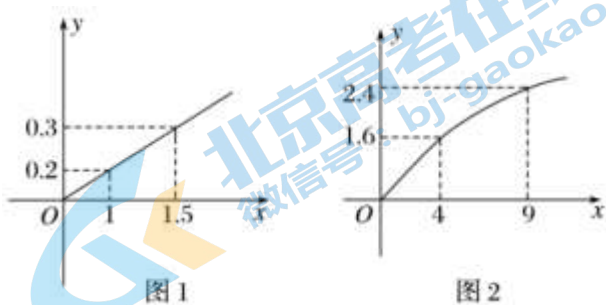
三、解答题：（本大题共3小题，其中第24题8分，第25题11分，第26题12分，共31分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

24. 已知全集 $U = R$ ，集合 $A = \{x | -1 < x < 3\}$ ， $B = \{x | x^2 - 3x + 2 > 0\}$

(1) 求 $A \cap B$;

(2) 求 $(C_U A) \cup B$

25. 某公司计划投资 A 、 B 两种金融产品，根据市场调查与预测， A 产品的利润与投资量成正比例，其关系如图1， B 产品的利润与投资量的算术平方根成正比例，其关系如图2（注：利润与投资量的单位：万元）。



(1) 分别将 A 、 B 两产品的利润表示为投资量的函数关系式；

(2) 该公司已有 10 万元资金，并全部投入 A 、 B 两种产品中，问：怎样分配这 10 万元投资，才能使公司获得最大利润？其最大利润为多少万元？

26. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x+1}$

(1) 用函数单调性的定义证明函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上是增函数；

(2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值和最小值；（第（2）小题直接写出答案即可）

(3) 若对任意 $x \in [1, +\infty)$ ， $f(x) > 2a + 1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围。

2019 北京 22 中学高一（上）期中数学参考答案

一、单项选择题（本大题共15小题，每小题3分，共45分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	D	B	B	A	D	B	D	B	D	D	C	C	A

二、填空题（本大题共8小题，每小题3分，共24分.）

16. $\frac{125}{8}$

17. $a > -b > b > -a$

18. $2\sqrt{2} \quad \sqrt{2}$

19. 9

20. $(-\infty, 5]$

21. $[1, \frac{3}{2})$

22. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ 23. $0; a < 0$

三、解答题：（本大题共3小题，其中第24题8分，第25题11分，第26题12分，共31分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

24. (1) $(-1, 1) \cup (2, 3)$ (2) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

25. 解 (1) 设投资 x 万元，A 产品的利润为 $f(x)$ 万元，B 产品的利润为 $g(x)$ 万元，依题意可设 $f(x) = k_1x$ ， $g(x) = k_2x$.

由图1，得 $f(1) = 0.2$ ，即 $k_1 = 0.2 = \frac{1}{5}$.

由图2，得 $g(4) = 1.6$ ，即 $k_2 \times 4 = 1.6$ ， $\therefore k_2 = \frac{4}{5}$

故 $f(x) = \frac{1}{5}x (x \geq 0)$ ， $g(x) = \frac{4}{5}x (x \geq 0)$.

(2) 设B 产品投入 x 万元，则A产品投入 $10 - x$ 万元，设企业利润为 y 万元，由(1)得 $y = f(10 - x) + g(x) = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}x + 2 (0 \leq x \leq 10)$.

$\therefore y = -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{x} + 2 = -\frac{1}{5}(\sqrt{x} - 2)^2 + \frac{14}{5}, 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{10}$

\therefore 当 $\sqrt{x} = 2$ ，即 $x = 4$ 时， $y_{max} = \frac{14}{5} = 2.8$

26. (1) 证明：设 x_1, x_2 是 $(-1, +\infty)$ 上任意两个实数，且 $x_1 < x_2$ ，
则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1}$

$$= \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$= \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

因为 $-1 < x_1 < x_2$ ，所以 $x_1 - x_2 < 0, x_1 + 1 > 0, x_2 + 1 > 0$

所以 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} < 0$

所以 $f(x_1) < f(x_2)$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是增函数.

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值等于 $\frac{3}{4}$ ，最小值等于 0.

(3) 对任意 $x \in [1, +\infty)$ ， $f(x) > a$ 恒成立，

等价于在区间 $[1, +\infty)$ 上， $f(x)$ 的最小值大于 a 成立.

因为 $f(x)$ 的最小值是 $f(1) = \frac{1}{2}$

所以 $\frac{1}{2} > a$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2})$.

