

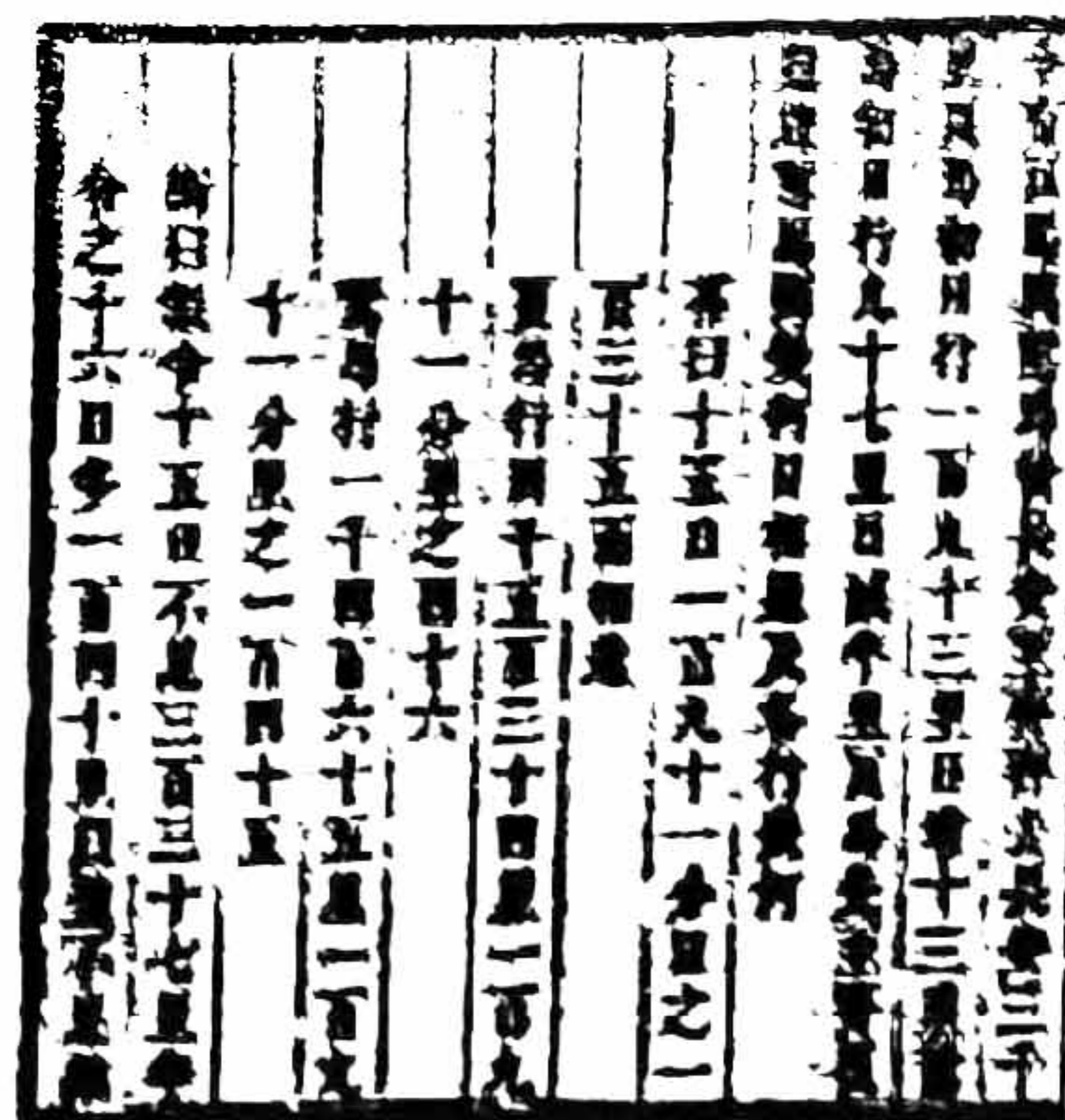
2020--2021 学年度第二学期

北京育才学校高二数学期中考试试卷

(考试时间 120 分钟 满分 150 分)

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 在数列  $\{a_n\}$  中， $a_{n+1} = a_n + 2$ ，且  $a_1 = 1$ ，则  $a_4$  等于 ( )  
A. 8                      B. 6                      C. 9                      D. 7
2. 已知  $f(x) = \cos x$ ，则  $f'(x) =$  ( )  
A.  $\sin x$                 B.  $-\sin x$             C.  $\cos x$                 D.  $-\cos x$
3. 将一枚均匀硬币随机掷 3 次，恰好出现 2 次正面向上的概率为 ( )  
A.  $\frac{1}{8}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{3}{8}$                       D.  $\frac{1}{2}$
4. 曲线  $f(x) = x^3 - 2x + 1$  在点  $(1, 0)$  处的切线方程是 ( )  
A.  $x - y - 1 = 0$                 B.  $2x - y - 2 = 0$   
C.  $2x + y - 2 = 0$                 D.  $x + y - 1 = 0$
5. 已知等差数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = 1$ ，公差  $d \neq 0$ ，如果  $a_1, a_2, a_5$  成等比数列，那么  $d$  等于 ( )  
A. 2 或 -2                B. -2                      C. 2                        D. 3
6. 函数  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  在 ( )  
A.  $(-\infty, +\infty)$  内是增函数                B.  $(-1, 1)$  内是增函数，在其余区间内是减函数  
C.  $(-\infty, +\infty)$  内是减函数                D.  $(-1, 1)$  内是减函数，在其余区间内是增函数
7. 《九章算术》的盈不足章第 19 个问题中提到：“今有良马与驽马发长安，至齐。齐去长安三千里。良马初日行一百九十三里，日增一十三里。驽马初日行九十七里，日减半里...”其大意为：“现在有良马和驽马同时从长安出发到齐去。已知长安和齐的距离是 3000 里。良马第一天行 193 里，之后每天比前一天多行 13 里。驽马第一天行 97 里，之后每天比前一天少行 0.5 里...”试问前 4 天，



良马和驽马共走过的路程之和的里数为 ( )

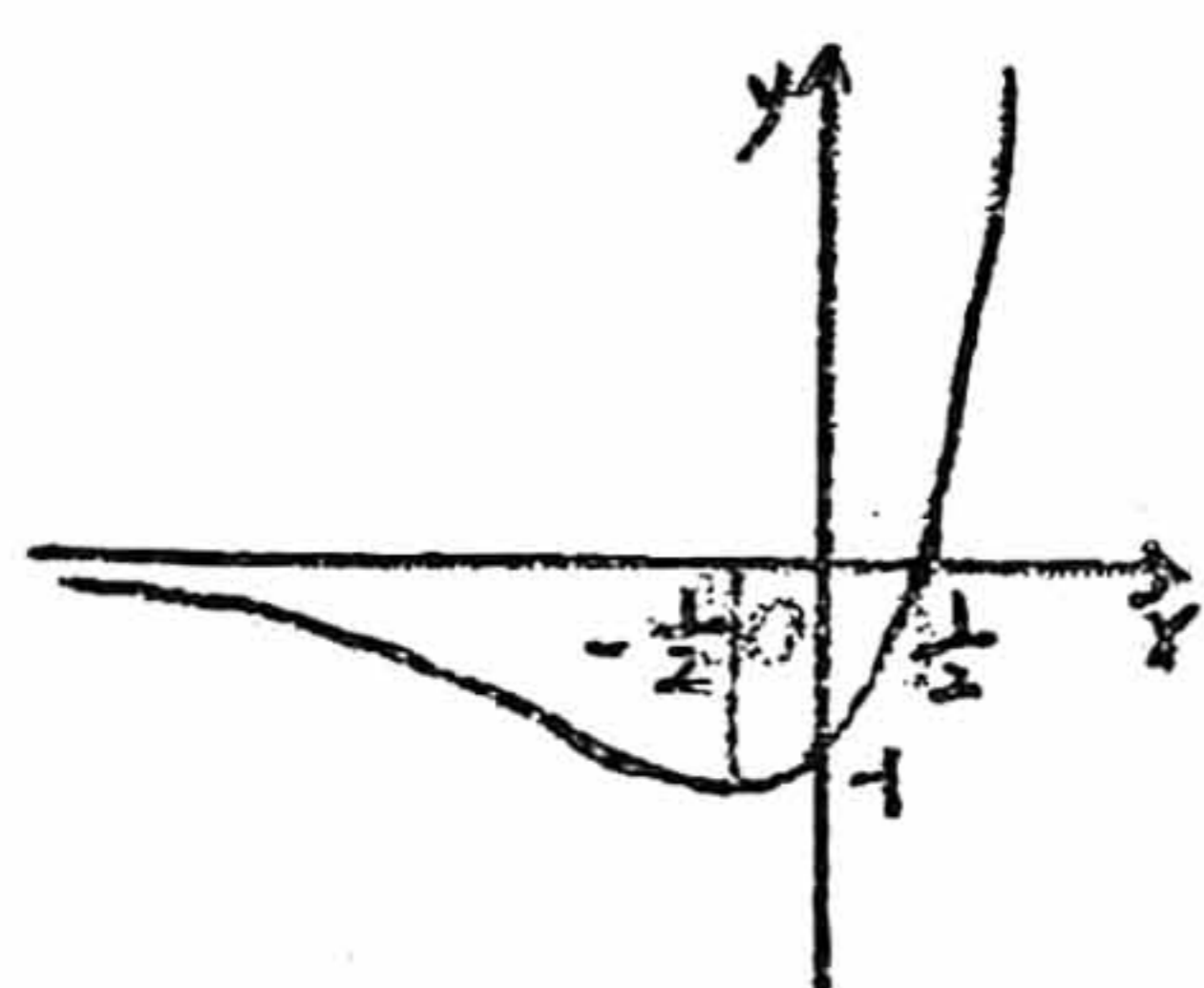
A. 1235

B. 1800

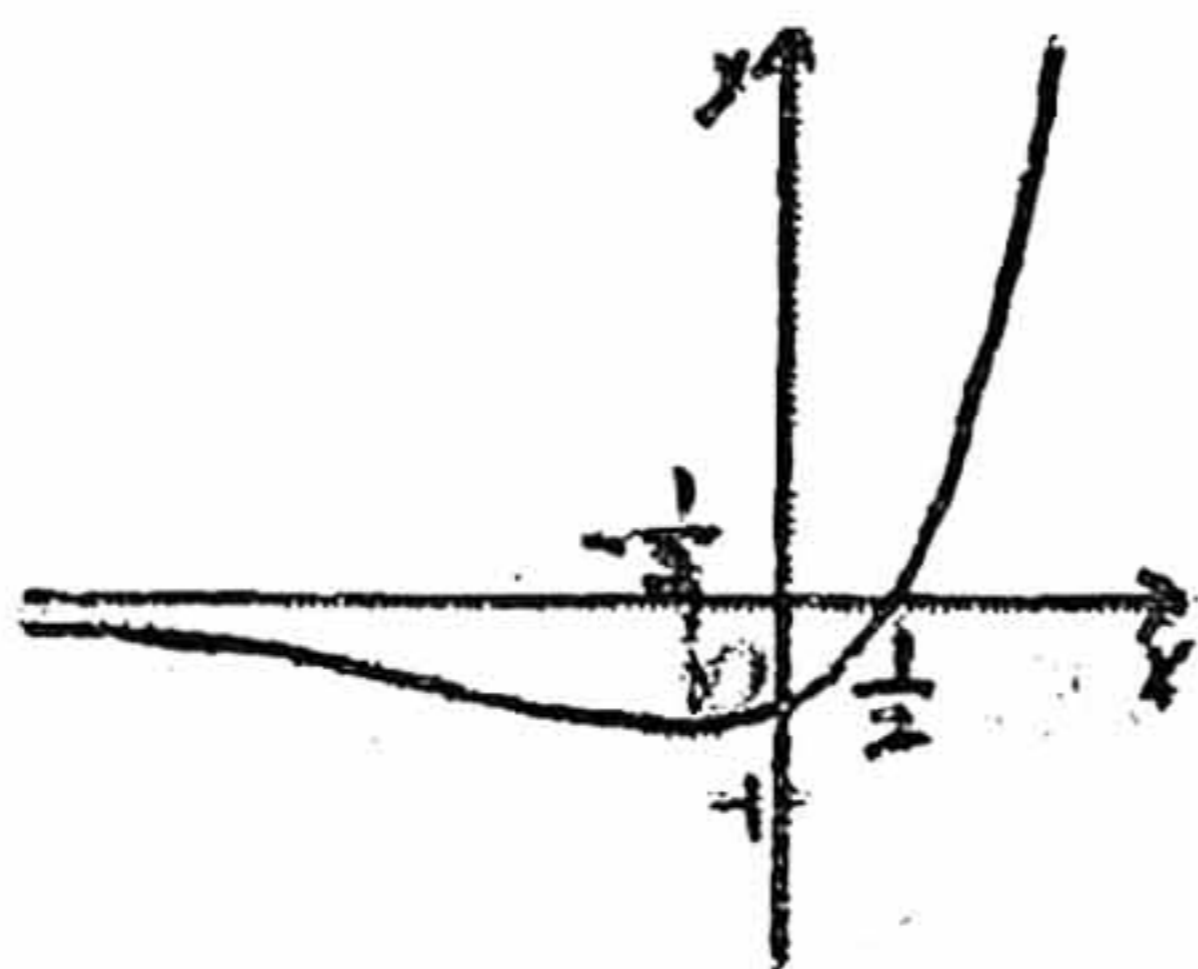
C. 2600

D. 3000

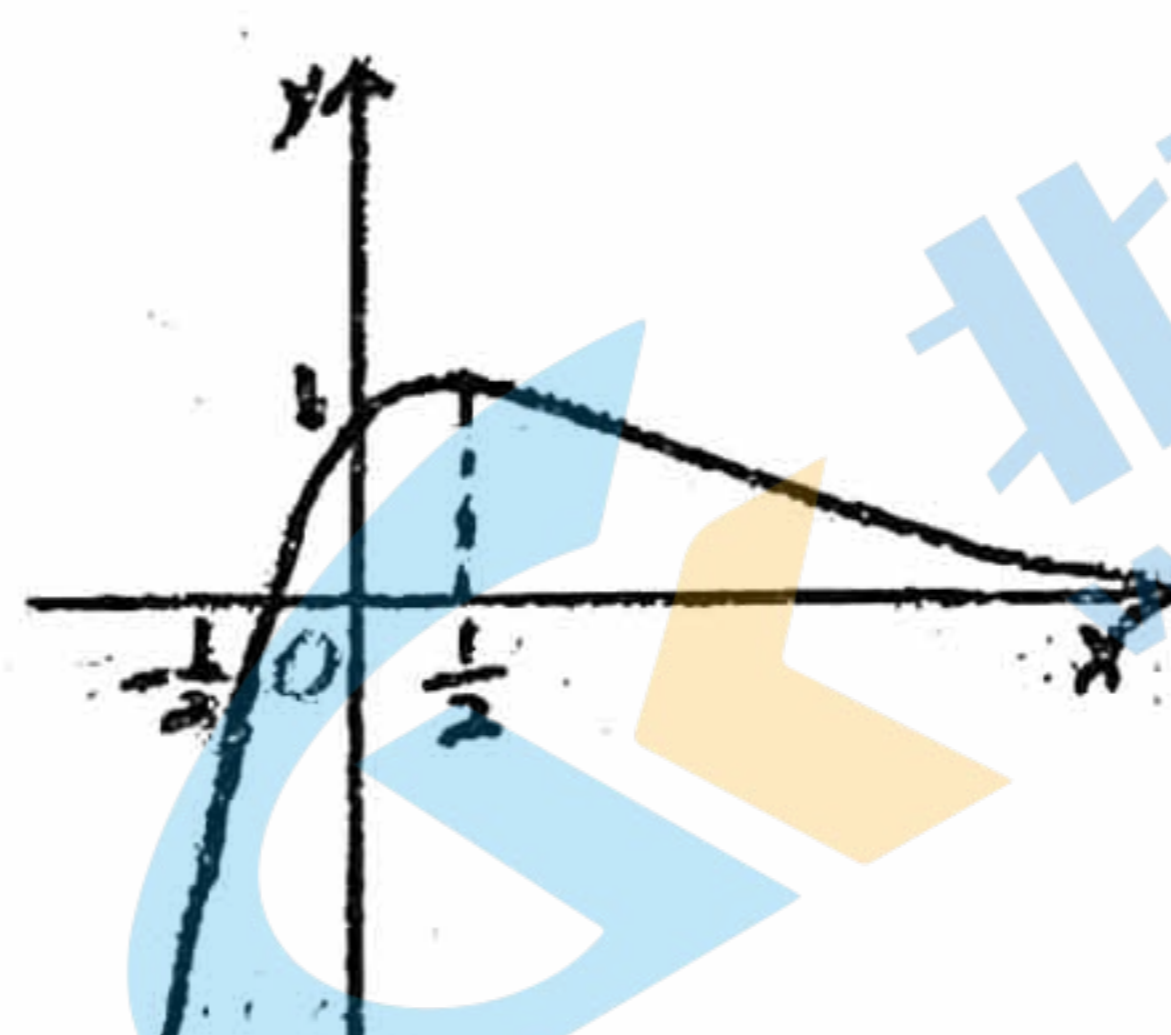
8. 函数  $y = e^x(2x-1)$  的大致图象是 ( )



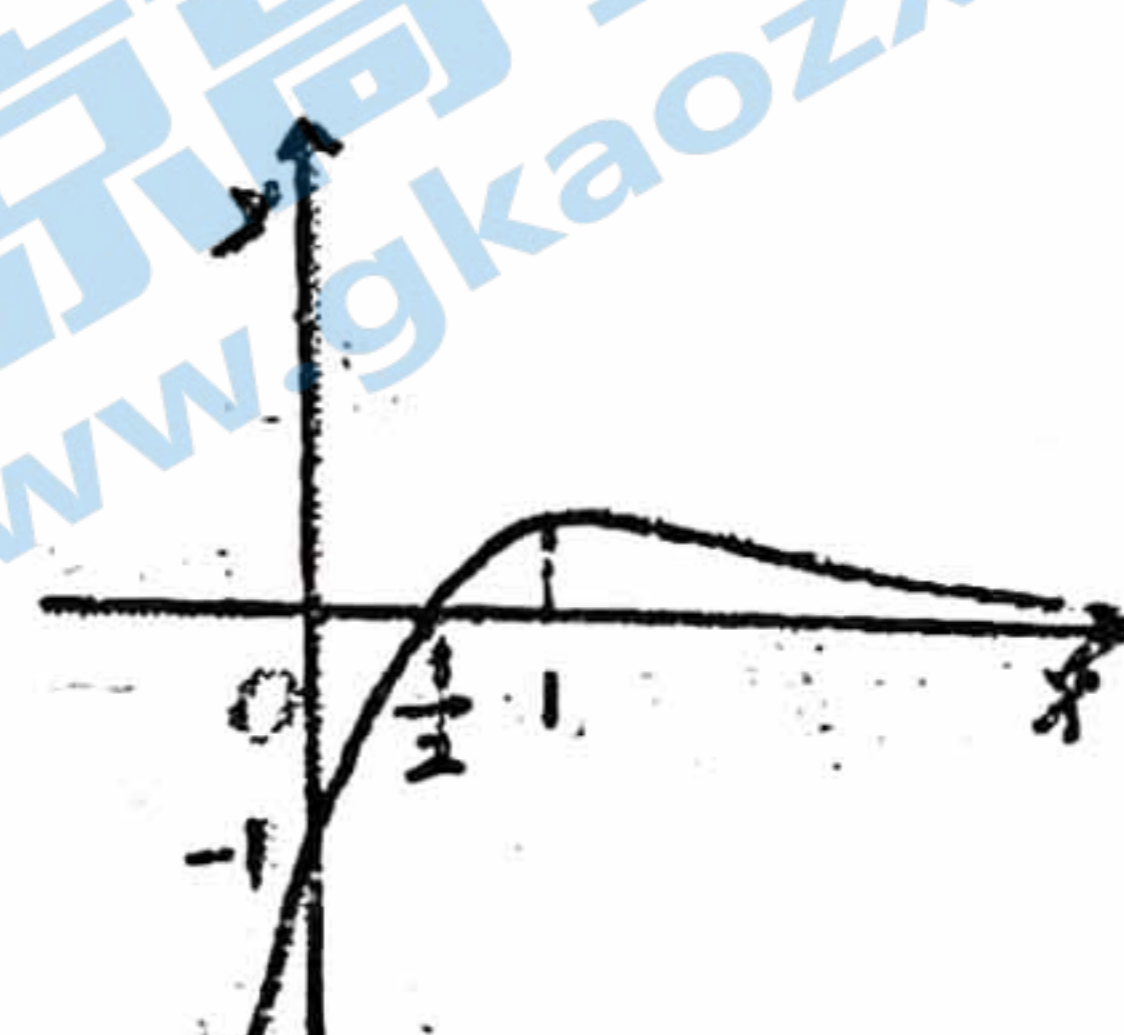
A.



B.



C.



D.

9. 甲、乙、丙、丁 4 个人进行网球比赛, 首先甲、乙一组, 丙、丁一组进行比赛, 两组的胜者进入决赛, 决赛的胜者为冠军、败者为亚军. 4 个人相互比赛的胜率如右表所示, 表中的数字表示所在行选手击败其所在列选手的概率.

那么甲得冠军且丙得亚军的概率是 ( )

A. 0.21

B. 0.15

C. 0.105

D. 0.045

	甲	乙	丙	丁
甲	:	0.3	0.3	0.8
乙	0.7	:	0.6	0.4
丙	0.7	0.4	:	0.5
丁	0.2	0.6	0.5	:

10. 函数  $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$  的图象如图所示, 且  $f(x)$  在  $x = x_0$  与  $x = 1$  处取得极值, 给出下列判断:

①  $c > 0$ ;

②  $f(1) + f(-1) > 0$ ;

③ 函数  $y = f'(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上是增函数.

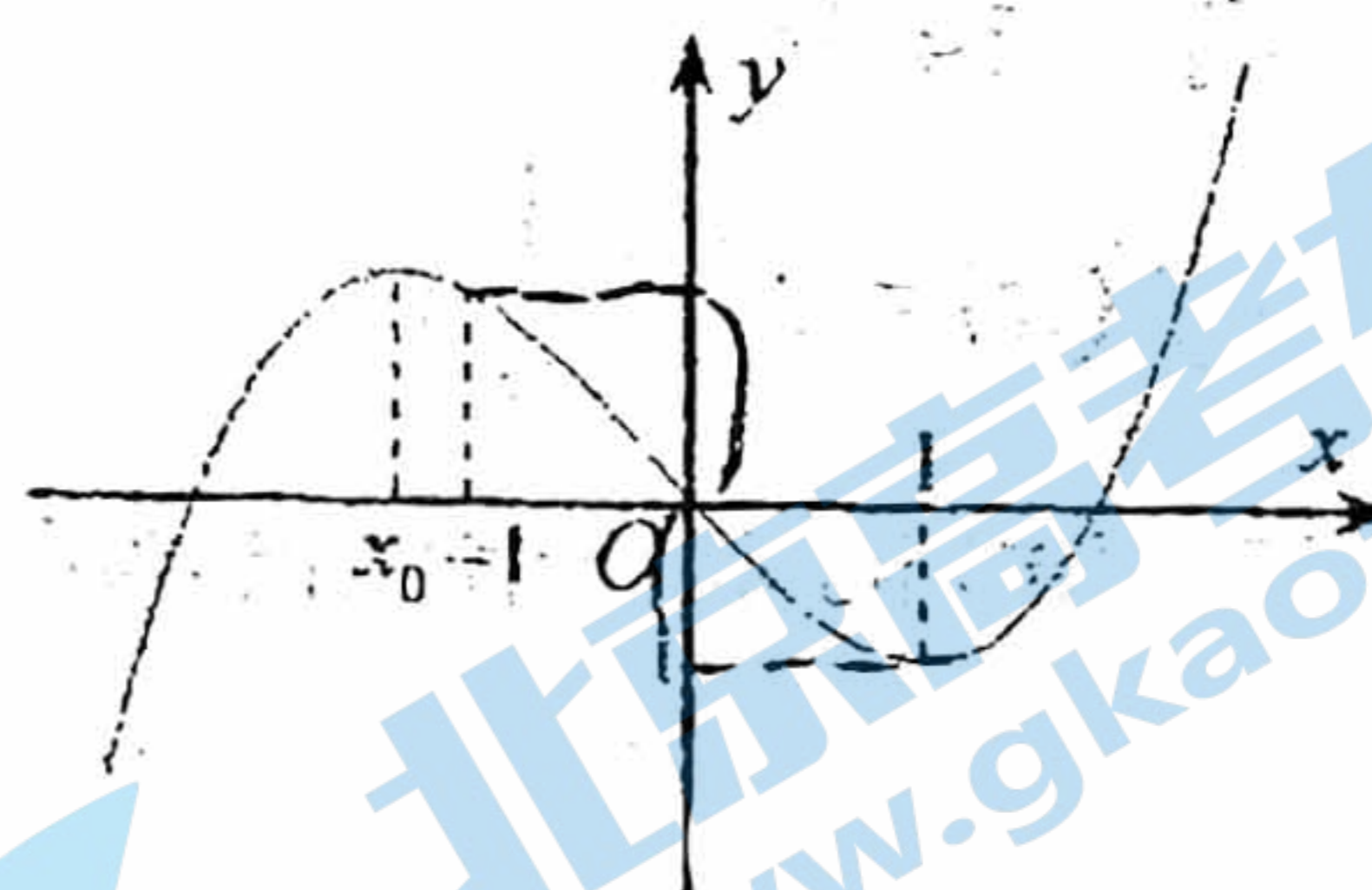
其中正确的判断是 ( )

A. ①③

B. ②

C. ②③

D. ①②



二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 把答案填在题中横线上.

11. 设  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_5 + a_6 = 2$ , 则  $S_{10} =$  \_\_\_\_\_.

12. 已知函数  $f(x) = \ln(2x+1)$ , 则  $f'(1) =$  \_\_\_\_\_.

13. 离散型随机变量  $\xi$  的分布列为:

$\xi$	1	2	3
$p$	$p_1$	$p_2$	$\frac{1}{4}$

且  $E\xi = 2$ , 则  $p_1 =$  \_\_\_\_\_;  $p_2 =$  \_\_\_\_\_.

14. 等比数列满足如下条件:①  $a_1 < 0$ ; ② 数列  $\{a_n\}$  单调递增, 试写出满足上述所有条件的一个数列的通项公式  $a_n =$  \_\_\_\_\_.

15. 研究函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  的性质, 完成下面两个问题:

① 将  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(5)$  按从小到大排列为 \_\_\_\_\_;

② 若方程  $f(x) = m$  有两个不同的实根, 则实数  $m$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

16. (本小题满分 13 分)

甲、乙两个篮球运动员互不影响地在同一位置投球, 命中率分别为  $\frac{1}{2}$  与  $p$ , 且乙投球 2 次均未命中的概率为  $\frac{1}{16}$ .

(I) 求甲投球 2 次, 至少命中 1 次的概率;

(II) 若甲、乙两人各投球 2 次, 求两人共命中 3 次的概率.

17. (本小题满分 14 分)

已知函数  $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$

(I) 求函数  $f(x)$  的单调增区间和减区间;

(II) 当  $x \in [-1, 2]$  时, 求函数  $y = f(x)$  的最值和最值点.

18. (本小题满分 14 分)

已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ , \_\_\_\_\_, 其中  $n \in \mathbf{N}^*$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 设  $b_n = 2^{a_n}$ , 求证: 数列  $\{b_n\}$  是等比数列;

(III) 求数列  $\{a_n + b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

从 ① 前  $n$  项和  $S_n = n^2 + n$ , ②  $a_{n+1} - 2 = a_n$ , ③  $a_4 = 8$  且  $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ , 这三个条件中任选一个, 补充在上面的问题中并作答.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

高二数学试卷 第 3 页共 4 页

19. (本小题满分 14 分)

流行性感冒多由病毒引起, 据调查, 空气月平均相对湿度过大或过小时, 都有利于一些病毒繁殖和传播. 科学测定, 当空气月平均相对湿度大于 65% 或小于 40% 时, 有利于病毒繁殖和传播. 下表记录了某年甲、乙两个城市 12 个月的空气月平均相对湿度.

	第一季度			第二季度			第三季度			第四季度		
	1月	2月	3月	4月	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月	12月
甲地	54%	39%	46%	54%	56%	67%	64%	66%	78%	72%	72%	59%
乙地	38%	34%	31%	42%	54%	66%	69%	65%	62%	70%	$a\%$	$b\%$

(I) 从上表 12 个月中, 随机取出 1 个月, 求该月甲地空气月平均相对湿度有利于病毒繁殖和传播的概率;

(II) 从上表第一季度和第二季度的 6 个月中随机取出 2 个月, 记这 2 个月中甲、乙两地空气月平均相对湿度都有利于病毒繁殖和传播的月份的个数为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望;

(III) 若  $a+b=108$ , 设乙地上表 12 个月的空气月平均相对湿度的中位数为  $M$ , 求  $M$  的最大值和最小值. (只需写出结论)

20. (本小题满分 15 分)

已知函数  $f(x) = ax - \ln x$ . ( $a \in \mathbb{R}$ )

(I) 当  $a = 2$  时, 求曲线  $y = f(x)$  的在点  $x = 1$  处的切线方程;

(II) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(III) 若  $f(x) \geq 0$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

21. (本小题满分 15 分)

已知函数  $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$ .

(I) 求函数  $f(x)$  的极值;

(II) 求证: 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f(x) > -\frac{1}{2}x^2 + 1$ ;

(III) 当  $x > 0$  时, 若曲线  $y = f(x)$  在曲线  $y = ax^2 + 1$  的上方, 求实数  $a$  的取值范围.