2019 北京通州区高三（上）期末

数　　学（理）

2019 年 1 月

考生须知	
	1. 本试卷共 4 页，满分 150 分．考试时长 120 分钟．
	2. 本试卷分为第一部分和第二部分两部分．
	3. 考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效．
	4 ．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\left\{x\middle|x^2-4x+3<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|2x-3>0\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$　　B. $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$　　C. $\left(1,\frac{3}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{3}{2},3\right)$

2. 设向量 $\boldsymbol{a}=\left(-3,4\right)$， $\boldsymbol{b}=\left(0,-2\right)$，则与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 垂直的向量的坐标可以是

A. (3,2)　　B. (3,－2)　　C. (4,6)　　D. (4,－6)

3. 已知 $y=f\left(x\right)$ 是定义在 R 上的奇函数，且当 $x>0$ 时， $f\left(x\right)=2^x-1$，则 $f\left(-2\right)$ 等于

A. -3　　B. $-\frac{11}{4}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. 3

4. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1\left(a>0\right)$ 的右焦点与抛物线 $y^2=12x$ 的焦点重合，则 a 等于

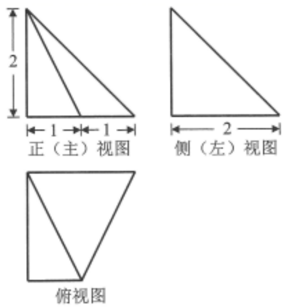
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 已知 x, y 满足不等式组 $\begin{cases}x\geq 1,\\ x-2y+3\geq 0,\\ y\geq x,\end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值等于

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 6

6. 设 $a,b\in\left(1,+\infty\right)$，则“ $a>b$ ”是“ $\log_a b<1$ ”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件



7. 某四棱锥的三视图如图所示，在此四棱锥的侧面中，面积最小的侧面面积为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

8. 设函数 $y=f(x)$ 图象上不同两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 处的切线的斜率分别是 k_A，k_B，规定 $\varphi(A,B)=\dfrac{|k_A-k_B|}{|AB|}$ （$|AB|$ 为线段 AB 的长度）叫做曲线 $y=f(x)$ 在点 A 与点 B 之间的“弯曲度”，给出以下命题：

①函数 $y=\sin x$ 图象上两点 A 与 B 的横坐标分别为 1 和 -1，则 $\varphi(A,B)=0$；

②存在这样的函数，其图象上任意不同两点之间的“弯曲度”为常数；

③设 A，B 是抛物线 $y=x^2$ 上不同的两点，则 $\varphi(A,B)\le 2$；

④设 A，B 是曲线 $y=e^x$（e 是自然对数的底数）上不同的两点，则 $\varphi(A,B)>1$.

其中真命题的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 的共轭复数是______.

10. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=2$，前 n 项和为 S_n，则 $\dfrac{S_4}{a_1}=$______ .

11. 已知角 α 的终边与单位圆 $x^2+y^2=1$ 的交点为 $P\left(x,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $\sin 2\alpha=$______.

12. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^2 的项的系数是______.

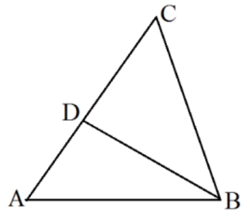
13. 直线 $\begin{cases}x=\sqrt{3}t\\ y=t\end{cases}$（$t$ 为参数）与曲线 $\begin{cases}x=2+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）的公共点个数为______.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ |\ln(x-1)|, & x>1.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=kx-2$ 有且只有一个实数根，则实数 k 的取值范围是______.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 80 分．）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本小题 13 分）

如图，在△ABC 中，$\angle A=\dfrac{\pi}{4}$，$AB=4$，$BC=\sqrt{17}$，点 D 在 AC 边上，且 $\cos\angle ADB=-\dfrac{1}{3}$.



（Ⅰ）求 BD 的长；

（Ⅱ）求△BCD 的面积.

16. （本小题 13 分）

北京地铁八通线西起四惠站，东至土桥站，全长 18.964km，共设 13 座车站．目前八通线执行 2014 年 12 月 28 日制订的计价标准，各站间计程票价（单位:元）如下：

四惠		3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5
四惠东			3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5
高碑店				3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
传媒大学					3	3	3	4	4	4	4	5	5
双桥						3	3	3	4	4	4	4	4
管庄							3	3	3	3	4	4	4
八里桥								3	3	3	3	4	4
通州北苑									3	3	3	3	3
果园										3	3	3	3
九棵树											3	3	3
梨园												3	3
临河里													3
土桥													
	四惠	四惠东	高碑店	传媒大学	双桥	管庄	八里桥	通州北苑	果园	九棵树	梨园	临河里	土桥

（Ⅰ）在 13 座车站中任选两个不同的车站，求两站间票价不足 5 元的概率；

（Ⅱ）甲乙二人从四惠站上车乘坐八通线，各自任选另一站下车（二人可同站下车），记甲乙二人乘车购票花费之和为 X 元，求 X 的分布列；

（Ⅲ）若甲乙二人只乘坐八通线，甲从四惠站上车，任选另一站下车，记票价为 ξ 元；乙从土桥站上车，任选另一站下车，记票价为 η 元．试比较 ξ 和 η 的方差 $D\xi$ 和 $D\eta$ 大小．（结论不需要证明）

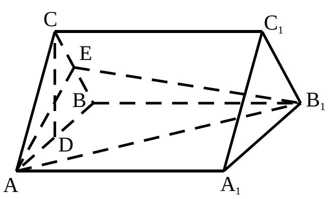
17. （本小题14分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 ABC，$\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形，$AA_1=3$，D，E 分别为 AB，BC 的中点．

（Ⅰ）求证：$CD\perp$ 平面 AA_1B_1B；

（Ⅱ）求二面角 $B-AE-B_1$ 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 B_1C_1 上是否存在一点 M，使 $BM\perp$ 平面 AB_1E？说明理由．



18. （本小题 14 分）

已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $A(0,1)$，且椭圆的离心率为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）斜率为1的直线 l 交椭圆 C 于 $M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$ 两点，且 $x_1>x_2$．若直线 $x=3$ 上存在点 P，使得 ΔPMN 是以 $\angle PMN$ 为顶角的等腰直角三角形，求直线 l 的方程．

19．（本小题 13 分）

已知函数 $f\left(x\right)=a^2\ln x-ax$，其中 $a>0$．

（Ⅰ）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（Ⅱ）设 $g\left(x\right)=x^2-m$，若曲线 $y=f\left(x\right)$，$y=g\left(x\right)$ 有公共点 P，且在点 P 处的切线相同，求 m 的最大值．

20．（本小题 13 分）

一个大于 1 的自然数，除了 1 和它本身外，不能被其他自然数整除，则称这个数为质数．质数的个数是无穷的．设由所有质数组成的无穷递增数列 $\left\{p_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，等差数列 1，3，5，7，…中所有不大于 p_n 的项的和为 $f\left(n\right)$．

（Ⅰ）求 p_5 和 $f\left(5\right)$；

（Ⅱ）判断 S_n 和 $f\left(n\right)$ 的大小，不用证明；

（Ⅲ）设 $\Gamma=k^2\left(k\in N^*\right)$，求证：$\forall n\in N^*$，$\exists\,\Gamma$，使得 $S_n<\Gamma<S_{n+1}$．

长按识别关注

数学试题答案

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	A	B	D	C	B	C

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$　　10．15　　11．$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12．15　　13．1　　14．$\{k|0<k<3\}\cup\{-2\sqrt{2}\}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15．解：（Ⅰ）在 ΔABD 中，因为 $\cos\angle ADB=-\dfrac{1}{3}$，

所以 $\sin\angle ADB=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$． ……………………………………2 分

由正弦定理 $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}$， ……………………………………3 分

所以 $BD=\dfrac{AB\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=\dfrac{4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=3$． ……………………………………5 分

（Ⅱ）因为 $\angle ADB+\angle CDB=\pi$，

所以 $\cos\angle CDB=\cos(\pi-\angle ADB)=-\cos\angle ADB=\dfrac{1}{3}$． ……………………6 分

所以 $\sin\angle CDB=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$． ……………………………………7 分

在 ΔBCD 中，由余弦定理 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle CDB$， ……8 分

得 $17=9+CD^2-2\times 3CD\times\dfrac{1}{3}$，

解得 $CD=4$ 或 $CD=-2$（舍）． ……………………………………11 分

所以 ΔBCD 的面积 $S=\dfrac{1}{2}BD\cdot CD\cdot\sin\angle CDB$

$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$ . ...13 分

16．解：（Ⅰ）记两站间票价不足 5 元为事件 A，

在 13 座车站中任选两个不同的车站，基本事件总数为 $C_{13}^{2}=78$ 个，事件 A 中基本事件数为 78-15=63.

所以两站间票价不足 5 元的概率 $P(A)=\frac{21}{26}$ . ...3 分

（Ⅱ）记甲乙花费金额分别为 a 元，b 元.

X 的所有可能取值为 6，7，8，9，10. ....4 分

$P(X=6)=P(a=3,b=3)=\frac{1}{9}$， ....5 分

$P(X=7)=P(a=3,b=4)+P(a=4,b=3)=\frac{1}{6}$， ....6 分

$P(X=8)=P(a=3,b=5)+P(a=5,b=3)+P(a=4,b=4)=\frac{49}{144}$， ....7 分

$P(X=9)=P(a=5,b=4)+P(a=4,b=5)=\frac{5}{24}$， ....8 分

$P(X=10)=P(a=5,b=5)=\frac{25}{144}$ . ...9 分

所以 X 的分布列为

X	6	7	8	9	10
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{49}{144}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{25}{144}$

. . . . 10 分

（Ⅲ）$D\xi=D\eta$ . ...13 分

17．（Ⅰ）证明：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

因为 $AA_1\perp$ 底面 ABC，$CD\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp CD$ . ...1 分

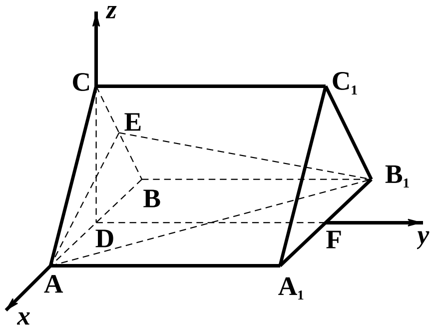
又 ΔABC 为等边三角形，D 为 AB 的中点，

所以 $CD\perp AB$ . ...2 分

因为 $AB\cap AA_1=A$，

所以 $CD\perp$ 平面 AA_1B_1B； ....3 分

（II）解：取 A_1B_1 中点 F，连结 DF，则



因为 D， F 分别为 AB， A_1B_1 的中点，

所以 $DF \perp AB$．

由（I）知 $CD \perp AB$， $CD \perp DF$，

如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$． …………4 分

由题意得 $A(1,0,0)$， $B(-1,0,0)$， $C(0,0,\sqrt{3})$， $A_1(1,3,0)$，

$B_1(-1,3,0)$，$C_1(0,3,\sqrt{3})$，$D(0,0,0)$，$E\left(-\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{3}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{AB_1}=(-2,3,0)$． ……………………………………5 分

设平面 AB_1E 法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{3}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\\ -2x_1+3y_1=0.\end{cases}$

令 $x_1=1$，则 $y_1=\frac{2}{3}$， $z_1=\sqrt{3}$． 即 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,\frac{2}{3},\sqrt{3}\right)$． ……………………6 分

平面 BAE 法向量 $\overrightarrow{AA_1}=(0,3,0)$． ……………………………………………………7 分

因为 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=(0,3,0)\cdot\left(1,\frac{2}{3},\sqrt{3}\right)=2$， $\left|\overrightarrow{AA_1}\right|=3$， $|\boldsymbol{n}_1|=\sqrt{1+\frac{4}{9}+3}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$，

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{AA_1},\boldsymbol{n}_1\right\rangle=\frac{\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}_1}{\left|\overrightarrow{AA_1}\right||\boldsymbol{n}_1|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$． ……………………………………………8 分

由题意知二面角 $B-AE-B_1$ 为锐角，所以它的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$． ………………9 分

（III）解：在线段 B_1C_1 上不存在点 M，使 $BM\perp$ 平面 AB_1E． 理由如下．

假设线段 B_1C_1 上存在点 M，使 $BM\perp$ 平面 AB_1E． 则

$\exists\lambda\in[0,1]$，使得 $\overrightarrow{B_1M}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$．

因为 $\overrightarrow{B_1C_1}=(1,0,\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{B_1M}=(\lambda,0,\sqrt{3}\lambda)$． ………………………………10 分

又 $\overrightarrow{BB_1}=(0,3,0)$，所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=(\lambda,3,\sqrt{3}\lambda)$． ……………………11 分

由（Ⅱ）可知，平面 AB_1E 法向量 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,\frac{2}{3},\sqrt{3}\right)$，

$BM\perp$ 平面 AB_1E，当且仅当 $\overrightarrow{BM}\parallel\boldsymbol{n}_1$，

即 $\exists\mu\in R$，使得 $\overrightarrow{BM}=\mu\cdot\boldsymbol{n}_1=\left(\mu,\frac{2}{3}\mu,\sqrt{3}\mu\right)$． ……………………………………12 分

所以 $\begin{cases}\lambda=\mu,\\ 3=\frac{2}{3}\mu,\\ \sqrt{3}\lambda=\sqrt{3}\mu.\end{cases}$ 解得 $\lambda=\frac{9}{2}\notin[0,1]$． ……………………………………13 分

这与 $\lambda\in[0,1]$ 矛盾．

所以在线段 B_1C_1 上不存在点 M，使 $BM\perp$ 平面 AB_1E． ……………………………14 分

18．解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases}b=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ ……………………………………………3 分

解得 $a^2=3$．

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$． ……………………………………………4 分

（Ⅱ）设直线 l 的方程为 $y=x+m$，$P(3,y_P)$， ……………………………………5分

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1,\\ y=x+m\end{cases}$ 得 $4x^2+6mx+3m^2-3=0$． ……………………………………7分

令 $\Delta=36m^2-48m^2+48>0$，得 $-2<m<2$． ……………………………………8 分

$x_1+x_2=-\frac{3}{2}m$，$x_1x_2=\frac{3}{4}(m^2-1)$． ……………………………………………9 分

因为 ΔPMN 是以 $\angle PMN$ 为顶角的等腰直角三角形，

所以 NP 平行于 x 轴． ……………………………………………10分

过 M 做 NP 的垂线，则垂足 Q 为线段 NP 的中点．

设点 Q 的坐标为 (x_Q,y_Q)，则 $x_Q=x_M=x_1=\frac{x_2+3}{2}$． ……………………………12分

由方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{3}{2}m, \\ x_1x_2=\dfrac{3}{4}(m^2-1), \\ x_1=\dfrac{x_2+3}{2}, \end{cases}$ 解得 $m^2+2m+1=0$，即 $m=-1$． ……………13分

而 $m=-1\in(-2,2)$，

所以直线 l 的方程为 $y=x-1$． ……………………………………………………14 分

19．解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$． ……………………………………………1 分

$f'(x)=\dfrac{a^2}{x}-a=\dfrac{a(a-x)}{x}$ $(a>0)$． ………………………………………………2 分

令 $f'(x)=0$，得 $x=a$． ……………………………………………………3 分

当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,a)$，单调递减区间为 $(a,+\infty)$； ……………………5 分

（Ⅱ）设点 P 的横坐标为 $x_0(x_0>0)$，则 $f(x_0)=a^2\ln x_0-ax_0$，$g(x_0)=x_0^2-m$．

因为 $f'(x)=\dfrac{a^2}{x}-a$，$g'(x)=2x$，所以 $f'(x_0)=\dfrac{a^2}{x_0}-a$，$g'(x_0)=2x_0$． …………6 分

由题意得 $\begin{cases} a^2\ln x_0-ax_0=x_0^2-m, & ① \\ \dfrac{a^2}{x_0}-a=2x_0. & ② \end{cases}$ ……………………………………7 分

由②得 $x_0=\dfrac{a}{2}$ 或 $x_0=-a$（舍）． ……………………………………………8 分

所以 $m=\dfrac{3}{4}a^2-a^2\ln\dfrac{a}{2}$ $(a>0)$． ………………………………………………9 分

设 $h(t)=\dfrac{3}{4}t^2-t^2\ln\dfrac{t}{2}(t>0)$，则

$h'(t)=\dfrac{1}{2}t(1-4\ln\dfrac{t}{2})(t>0)$． ……………………………………………10 分

令 $h'(t)=0$，得 $t=2e^{\frac{1}{4}}$． …………………………………………………11 分

当 $0<t<2e^{\frac{1}{4}}$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 单调递增；

当 $t>2e^{\frac{1}{4}}$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减.

所以$h(t)$在$(0，+\infty)$的最大值为$h(2e^{\frac{1}{4}})=2e^{\frac{1}{2}}$，

即m的最大值为$2e^{\frac{1}{2}}$. ……………………………………………13 分

20．解：（Ⅰ）$p_5=11$，

$f(5)=1+3+5+7+9+11=36$； ……………………………………………2 分

（Ⅱ）当$n=1$时，$S_1=2$，$f(1)=1$，$S_1>f(1)$；

当$n=2$时，$S_2=2+3=5$，$f(2)=1+3=4$，$S_2>f(2)$；

当$n=3$时，$S_3=2+3+5=10$，$f(3)=1+3+5=9$，$S_3>f(3)$；

当$n=4$时，$S_4=2+3+5+7=17$，$f(4)=1+3+5+7=16$，$S_4>f(4)$.

所以当$n\le 4$时，$S_n>f(n)$.

当$n=5$时，$S_5=2+3+5+7+11=28$，$f(5)=1+3+5+7+9+11=36$，$S_5<f(5)$.

不难看出，当$n\ge 5$时，$S_n<f(n)$. ……………………………………6 分

（Ⅲ）因为$S_1=2$，$S_2=5$，$S_3=10$，$S_4=17$，$S_5=28$，

所以当$n=1$时，$\Gamma=2^2$，使得$S_1<\Gamma<S_2$；

当$n=2$时，$\Gamma=3^2$，使得$S_2<\Gamma<S_3$；

当$n=3$时，$\Gamma=4^2$，使得$S_3<\Gamma<S_4$；

当$n=4$时，$\Gamma=5^2$，使得$S_4<\Gamma<S_5$

所以$n\le 4$时，命题成立. ……………………………………………………8 分

当$n\ge 5$时，设k是使得$k^2\le S_n$成立的最大自然数，只需证$(k+1)^2<S_{n+1}$.

………………………………9 分

因为$S_n\ge k^2=\dfrac{k(1+2k-1)}{2}=1+3+5+\cdots+(2k-1)$， ………………………10 分

$f(n)=1+3+5+\cdots+p_n$，

由（Ⅱ）可知，当$n\ge 5$时，$S_n<f(n)$， ……………………………………11 分

所以$p_n>2k-1$，从而$p_{n+1}>2k+1$. ………………………………12 分

所以$S_n+p_{n+1}>k^2+2k+1=(k+1)^2$，即$S_{n+1}>(k+1)^2$. ………………13 分

综上可知，命题成立.