海淀区高三年级第一学期期中练习

数　　学（文科）

2018.11

本试卷共4页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x|x-a\leq 0\}$，若 $2\in A$，则 a 的取值范围为

（A）$(-\infty,4]$　（B）$(-\infty,2]$　（C）$[2,+\infty)$　（D）$[4,+\infty)$

2. 下列函数中，是奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上存在最小值的是

（A）$f(x)=x^2-x$　（B）$f(x)=|\ln x|$　（C）$f(x)=x^3$　（D）$f(x)=\sin x$

3. 函数 $f(x)=\sin(x+\varphi)$ 满足 $f(\frac{\pi}{3})=1$，则 $f(\frac{5\pi}{6})$ 的值是

（A）0　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　（D）1

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,1)$，则向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为

（A）$\frac{\pi}{6}$　（B）$\frac{\pi}{4}$　（C）$\frac{\pi}{2}$　（D）$\frac{2\pi}{3}$

5. 已知函数 $f(x)=\log_a x$，$g(x)=b^x$ 的图象都经过点 $(\frac{1}{4},2)$，则 ab 的值为

（A）1　（B）2　（C）4　（D）8

6. 在△ABC 中，“$C=\frac{\pi}{2}$”是“$\sin A=\cos B$”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

7. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+\frac{a}{n}$，若数列 $\{a_n\}$ 单调递增，则实数 a 的取值范围是

（A）$(-\infty,0]$　（B）$[0,+\infty)$　（C）$(-\infty,2)$　（D）$[1,+\infty)$

8. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $\boldsymbol{a}^2>\boldsymbol{b}^2>\boldsymbol{c}^2$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 中最小的值是

（A）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$　（B）$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$　（C）$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$　（D）不能确定的

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

9. 角 θ 终边经过点 $P(4,-3)$，则 $\tan\theta=$ ______.

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=5$，$a_2+a_5=0$，则 $\{a_n\}$ 中为正数的项的个数为 ______.

11. 已知$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$是不共线的两个向量，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，则$\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AC}|}=$______.

12. 函数$f(x)=|\sin\frac{x}{2}-2|$在$[0,\pi]$上的最大值为______.

13. 能说明"若存在x_0，使得$f(-x_0)=-f(x_0)$，则$f(x)$不是偶函数"为假命题的一个函数$f(x)$是______.

14. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x, & x\leq a,\\ x, & x>a.\end{cases}$

（Ⅰ）当$a=1$时，函数$f(x)$的值域是______；

（Ⅱ）若函数$f(x)$的图象与直线$y=a$只有一个公共点，则实数a的取值范围是______.

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分13分）

已知函数$f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$.

（Ⅰ）求$f(0)$的值；

（Ⅱ）求函数$f(x)$的单调递增区间.

16.（本小题满分13分）

设$\{a_n\}$为等比数列，其前n项和为S_n，且$a_2=2$，$S_2-3a_1=0$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

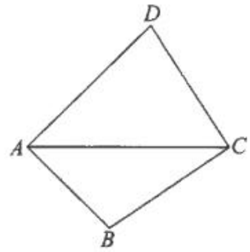
（Ⅱ）若$S_n+a_n>48$，求n的最小值.

17.（本小题满分 13 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=5$，$AC=7$，$\angle B+\angle D=\pi$.

（Ⅰ）求 $\cos D$ 的值；

（Ⅱ）若 AC 是 $\angle DAB$ 的角平分线，求 DC 的长.



18.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x^3+x^2+ax-1$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）求证：直线 $y=ax-1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（Ⅲ）写出 a 的一个值，使得函数 $f(x)$ 有三个不同的零点（**只需直接写出数值**）.

19.（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2+(-1)^n$.

（Ⅰ）求 a_1，a_2，a_3 的值；

（Ⅱ）求证：$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}<a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$.

20.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=mx^2-x-\dfrac{\ln x}{m}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）求证：当 $m>0$ 时，存在 x_0，使得 $f(x_0)<1$.

海淀区高三年级第一学期期中练习参考答案

数　学（文科）　　2018.11

说明：这份只是参考答案，不是评分标准，评分标准等试卷讲评之后下发。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. C　　2.D　　3.A　　4.B　　5.D　　6.A　　7.C　　8.A

二、填空题:本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $-\dfrac{3}{4}$　　10. 3　　11. $\dfrac{1}{2}$

12. 2　　13. $f(x)=x^2-1$　　14. $\mathbf{R}$, $[0,1]$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.

15. 解：（Ⅰ）$f(0)=\dfrac{\cos 0}{\cos 0-\sin 0}=1$

（Ⅱ）因为 $\cos x-\sin x\neq 0$，所以 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，即定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$

$$f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$$

$$=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}$$

$$=\cos x+\sin x$$

$$=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

令 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

得 $2k\pi-\dfrac{3\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$

因为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2k\pi-\dfrac{3\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$

16.解：（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q

因为 $S_2-3a_1=0$ ， 所以 $a_2-2a_1=0$

所以 $q=\frac{a_2}{a_1}=2$

又 $a_2=2$， 所以 $a_1=1$

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$

（Ⅱ）因为 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=2^n-1$

所以 $S_n+a_n=2^n-1+2^{n-1}=3\cdot 2^{n-1}-1$

由 $3\cdot 2^{n-1}-1>48$，得 $3\cdot 2^{n-1}>49$，即 $2^{n-1}>\frac{49}{3}$

解得 $n\geq 6$ ， 所以 n 的最小值为 6 .

17. 解：

（Ⅰ）在 ΔABC 中，由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

把 $AB=4, BC=5, AC=7$ 代入

可得 $\cos B=\frac{4^2+5^2-7^2}{2\cdot 4\cdot 5}=-\frac{1}{5}$

因为 $B+D=\pi$，所以 $\cos D=\cos(\pi-B)=-\cos B=\frac{1}{5}$

（Ⅱ）法一：

在 ΔABC 中，由余弦定理，可得 $\cos\angle BAC=\frac{16+49-25}{2\times 4\times 7}=\frac{5}{7}$

所以 $\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，

因为 AC 是 $\angle DAB$ 的角平分线，所以 $\angle DAC=\angle BAC$

所以 $\sin\angle DAC=\frac{2\sqrt{6}}{7}$

因为 $0<D<\pi$，所以由（Ⅰ）可得 $\sin D=\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

在 ΔADC 中，由正弦定理 $\frac{DC}{\sin\angle DAC}=\frac{AC}{\sin D}$

可得 $DC=\frac{AC\sin\angle DAC}{\sin\angle D}=5$.

法二：

因为 AC 是 $\angle DAB$ 的角平分线，所以 $\angle DAC=\angle BAC$

根据正弦定理， 在 ΔABC 中，有 $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin B}$

在 ΔADC 中，$\dfrac{DC}{\sin\angle DAC}=\dfrac{AC}{\sin D}$

因为 $\sin\angle BAC=\sin\angle DAC$，且 $\sin B=\sin(\pi-D)=\sin D$

所以 $DC=BC$，所以 $DC=5$.

18．解：（Ⅰ）函数 $f(x)=x^3+x^2+ax-1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$

当 $a=-1$ 时，$f(x)=x^3+x^2-x-1$

所以 $f'(x)=3x^2+2x-1$

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-1,x_2=\dfrac{1}{3}$

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(\frac{1}{3},+\infty)$，

单调递减区间为 $(-1,\frac{1}{3})$.

（Ⅱ）因为 $f'(x)=3x^2+2x+a$

令 $f'(x)=3x^2+2x+a=a$，解得 $x_1=0,x_2=-\dfrac{2}{3}$

而 $f(0)=-1$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y+1=a(x-0)$，即 $y=ax-1$，

所以无论 a 为何值，直线 $y=ax-1$ 都是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线

（Ⅲ）取 a 的值为 -2.

这里 a 的值不唯一，只要取 a 的值小于 -1 即可.

19. 解：（I）因为 $S_n=n^2+(-1)^n$，所以 $a_1=S_1=0$

$a_2=S_2-S_1=5$，$a_3=S_3-S_2=3$

（II）法一：因为 $S_n=n^2+(-1)^n$

当 $n\geq 2$ 时，因为 $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1+2(-1)^n$

当 n 为偶数时，$a_n=2n+1$

当 n 为奇数时，$a_n=2n-3$

当 n 为奇数，且 $n\geq 3$ 时，$a_n=2n-3$，$a_{n-1}=2(n-1)+1=2n-1$

所以此时 $a_n<a_{n-1}$，

所以 $a_3<a_2$，

$a_5<a_4$，

……

$a_{2n+1}<a_{2n}$

所以 $a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}<a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$

又 $a_1=0$，所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}<a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$

法二：因为 $S_n=n^2+(-1)^n$

当 $n\geq 2$ 时，因为 $a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1+2(-1)^n$

当 n 为偶数时，$a_n=2n+1$

当 n 为奇数时，$a_n=2n-3$

所以 $\{a_{2n}\}$ 是以 $a_2=5$ 为首项，公差为 4 的等差数列

$\{a_{2n+1}\}$ 是以 $a_3=3$ 为首项，公差为 4 的等差数列

所以 $T_1=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}=0+\dfrac{(a_3+a_{2n+1})n}{2}=2n^2+n$

$T_2=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}=\dfrac{(a_2+a_{2n})n}{2}=2n^2+3n$

所以 $T_2-T_1=2n>0$，所以 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n+1}<a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$

20．解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $m\neq 0$．

因为 $f'(x)=2mx-1-\dfrac{1}{mx}=\dfrac{2m^2x^2-mx-1}{mx}=\dfrac{(2mx+1)(mx-1)}{mx}$

令 $f'(x)=0$，得到 $x_1=-\dfrac{1}{2m}$，$x_2=\dfrac{1}{m}$

当 $m>0$ 时，x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{1}{m})$	$\frac{1}{m}$	$(\frac{1}{m},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{m}$ 处取得极小值 $f(\dfrac{1}{m})=\dfrac{\ln m}{m}$

当 $m<0$ 时，x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0,-\frac{1}{2m})$	$-\frac{1}{2m}$	$(-\frac{1}{2m},+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	极大值	↘

所以函数 $f(x)$ 在 $x=-\dfrac{1}{2m}$ 处取得极大值 $f(-\dfrac{1}{2m})=\dfrac{3}{4m}+\dfrac{\ln(-2m)}{m}$

（Ⅱ）当 $m>0$ 时，由（Ⅰ）可知，$f(x)$ 的最小值是 $f(\dfrac{1}{m})=\dfrac{\ln m}{m}$，

所以“存在 x_0，使得 $f(x_0)<1$”等价于“$f(\dfrac{1}{m})<1$”

而 $f(\dfrac{1}{m})-1=\dfrac{\ln m-m}{m}$

设 $g(x)=\ln x-x\ (x>0)$

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增

当 $1<x$ 时， $g'(x)<0$， $g(x)$ 单调递减

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(1)=-1<0$.

所以 $f(\frac{1}{m})-1=\frac{\ln m-m}{m}<0$，

所以结论成立.