理科数学参考答案

1.B　2.C　3.D　4.B　5.C　6.D　7.A　8.B　9.C　10.C　11.A　12.B

13. 11

14. $f(x)=2\cos 2x$（答案不唯一，$f(x)=2|\sin x|$，$f(x)=2\sin^2 x$，$f(x)=|\sin x|+1$，$f(x)=\cos 2x+1$ 等均可）

15. $\dfrac{\sqrt{65}}{4}$

16. $\dfrac{13}{14}$

17.【解析】(1)由题，$K^2=\dfrac{300\times(40\times100-80\times80)^2}{120\times180\times120\times180}=\dfrac{100}{27}\approx3.704>2.706$，……………… 4 分

因此，有 90％的把握认为产品质量与生产线有关系. ……………………………………… 5 分

(2)6 件产品中产自于甲、乙生产线的分别有 2 件和 4 件，则 X 可能值为 0，1，2.

则 $P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$；$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_4^2}{C_6^3}=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$；$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$.

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

……………………………………………………………………………… 10 分

所以，$E(X)=0\times\dfrac{1}{5}+1\times\dfrac{3}{5}+2\times\dfrac{1}{5}=1$. ……………………………………… 12 分

18.【解析】(1)若选①，

因为数列$\{b_n\}$是正项等比数列，设公比为 q，所以 $b_6=b_3q^3$，

又 $b_3=16$，$b_6=128$，所以 $128=16q^3$，

解得 $q=2$，……………………………………………………………………… 3 分

所以 $b_1=\dfrac{b_3}{q^2}=\dfrac{16}{4}=4$，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$.

所以 $a_n=\log_2 b_n=n+1$.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^{n+1}$ ……………………… 6 分

若选②，

由 $b_5-b_1b_3=0$，得 $b_5=b_1b_3$.

因为数列$\{b_n\}$是正项等比数列，设$\{b_n\}$的公比为 q，所以 $b_1q^4=b_1\cdot b_1q^2$，

因为 $b_1=4$，所以 $q^2=4$，又 $b_n>0$，所以 $q=2$，…………………………………… 3 分

所以 $b_n=b_1q^{n-1}=4\cdot 2^{n-1}=2^{n+1}$，

所以 $a_n=\log_2 b_n=n+1$.

数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2^{n+1}$. …………………… 6 分

(2) $c_n=a_n\cdot b_n=(n+1)\cdot 2^{n+1}$，

所以 $S_n=2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+(n+1)\cdot 2^{n+1}$，…………………………… 7 分

$2S_n=2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^{n+1}+(n+1)\cdot 2^{n+2}$.

两式相减，得 $-S_n=2\cdot 2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1}-(n+1)\cdot 2^{n+2}$，…………………… 9 分

所以 $-S_n=2+(2^1+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-(n+1)\cdot 2^{n+2}$

$=2+\dfrac{2(1-2^{n+1})}{1-2}-(n+1)\cdot 2^{n+2}=-n\cdot 2^{n+2}$.

故 $S_n=n\cdot 2^{n+2}$. ………………………………………………………………… 12 分

19.【解析】(1) 由题知，直线 l 与 y 轴不垂直，

故可设直线 l 的方程为 $x=my+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y^2=4x,\\ x=my+2\end{cases}$得 $y^2-4my-8=0$. ……………………………………… 2 分

显然，$\Delta=16m^2+32>0$，

于是 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-8$，$x_1x_2=\dfrac{1}{16}y_1^2y_2^2=4$. ……………………………… 4 分

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-4$. ……………………………………… 5 分

(2) 当直线 $l\perp x$ 轴时，l：$x=2$，$A(2,2\sqrt{2})$，$B(2,-2\sqrt{2})$，

故当$\angle AQP=\angle BQP$ 时，点 $Q\in x$ 轴. …………………………………………… 6 分

当直线 l 与 x 轴不垂直时，由抛物线的对称性知，满足条件的点 $Q\in x$ 轴，设 $Q(n,0)$，

由$\angle AQP=\angle BQP$ 得 $k_{AQ}+k_{BQ}=0$，即$\dfrac{y_1}{x_1-n}+\dfrac{y_2}{x_2-n}=0$，…………………… 8 分

整理得 $y_1(x_2-n)+y_2(x_1-n)=0$，即

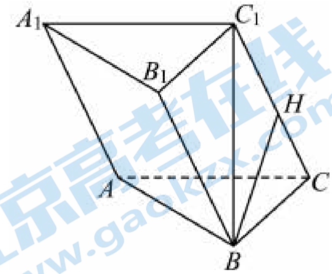
$y_1(my_2+2-n)+y_2(my_1+2-n)=0$，

所以 $2my_1y_2+(2-n)(y_1+y_2)=0$. …………………………………………… 10 分

故 $-16m+4(2-n)m=0$，解得 $n=-2$.

综上，存在定点 $Q(-2,0)$满足条件. ………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)在平面 BB_1C_1C 中作 $BH\perp CC_1$ 于 H，



因为平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 BB_1C_1C，

且平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $BB_1C_1C=CC_1$，

所以 $BH\perp$ 平面 AA_1C_1C，从而 $AC\perp BH$. …………………… 2 分

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$C_1B\perp$ 平面 ABC，$AC\subset$ 平面 ABC，

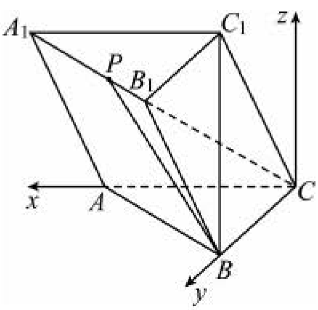
所以 $AC\perp C_1B$.

又因为 $BC_1\cap BH=B$，所以 $AC\perp$ 平面 BB_1C_1C，

因此 $AC\perp BB_1$. ……………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)可知，CA，CB，BC_1 两两垂直，如图，以 C 为原点建立空间直角坐标系.

则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C_1(0,2,2)$，$B_1(0,4,2)$，$\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{BA}=(2,-2,0)$.



设 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1A_1}=(2\lambda,-2\lambda,0)$，$\lambda\in[0,1]$，

则 $P(2\lambda,4-2\lambda,2)$. ………………………………………………… 7 分

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{BP}=(2\lambda,2-2\lambda,2)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BP}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2\lambda x+(2-2\lambda)y+2z=0,\\ 2y=0,\end{cases}$

则有 $\begin{cases}z=-\lambda x,\\ y=0.\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,-\lambda)$. ……………………………………………………………… 10 分

而平面 BCC_1 的一个法向量可以是 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$，

则 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{(1,0,-\lambda)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{1+\lambda^2}}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，

即 P 为棱 B_1A_1 的三等分点，$\dfrac{B_1P}{A_1B_1}=\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………… 12 分

21.【解析】(1)由题知 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+2\sin x-x\cos x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

则 $f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+x\sin x+\cos x$，令 $g(x)=f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+x\sin x+\cos x$，

所以 $g'(x)=-3x+x\cos x=x(\cos x-3)<0$，

则 $g(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减. ……………………………………………… 2 分

又 $f'(0)=1$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}\times\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}\left(1-\dfrac{3\pi}{4}\right)<0$，故 $\exists x_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f'(x_1)=0$，

当 $0<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；$x_1<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

所以 $x=x_1$ 为 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的极大值点，又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^3}{16}+2>0$，

所以，当 $a=-\frac{1}{2}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)\geqslant 0$. ………………………………………… 4 分

(2)由 $f(x)=ax^3+2\sin x-x\cos x$，得 $f'(x)=3ax^2+\cos x+x\sin x$，

依题意，只需探究 $f'(x)=3ax^2+\cos x+x\sin x$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的零点个数即可，

由于 $f'(-x)=f'(x)$，则 $f'(x)$ 为偶函数，$f'(0)=1$，

故只需探究 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上的零点个数即可.

令 $u(x)=f'(x)=3ax^2+\cos x+x\sin x$，则 $u'(x)=6ax+x\cos x=x(6a+\cos x)$，

(Ⅰ)当 $6a\geqslant 1$，即 $a\geqslant\frac{1}{6}$ 时，$6a+\cos x\geqslant 0$，此时 $u'(x)\geqslant 0$ 在 $(0,\pi)$ 恒成立，

则 $u(x)$ 即 $f'(x)$ 单调递增，故 $f'(x)\geqslant f'(0)=1$，

此时 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点，则 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 0. …………………… 6 分

(Ⅱ)当 $-1<6a<1$，即 $-\frac{1}{6}<a<\frac{1}{6}$ 时，$\exists x_0\in(0,\pi)$，使得 $x_0(6a+\cos x_0)=0$，即 $\cos x_0=-6a$，

可知 $0<x<x_0$ 时，$u'(x)>0$；$x_0<x<\pi$ 时，$u'(x)<0$，

所以 $u(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,π) 上单调递减，………………………… 7 分

由于 $f'(0)=1$，$f'(\pi)=3a\pi^2-1$，

①若 $f'(\pi)=3a\pi^2-1\geqslant 0$，即 $\frac{1}{3\pi^2}\leqslant a<\frac{1}{6}$ 时，

$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上没有零点，则 $f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上没有零点，

故此时 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 0. ………………………………………… 8 分

②若 $f'(\pi)=3a\pi^2-1<0$，即 $-\frac{1}{6}<a<\frac{1}{3\pi^2}$ 时，

$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上有 1 个零点，则 $f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有 2 个零点，

所以，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 2. ………………………………………… 10 分

(Ⅲ)当 $6a\leqslant -1$，即 $a\leqslant -\frac{1}{6}$ 时，$\forall x\in(0,\pi)$，$u'(x)<0$，

所以 $u(x)$ 即 $f'(x)$ 单调递减，由于 $f'(0)=1$，$f'(\pi)=3a\pi^2-1<0$，

$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 有且仅有 1 个零点，则 $f'(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有 2 个零点，

此时 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 2.

综上所述：当 $a\geqslant\frac{1}{3\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的无极值点；$a<\frac{1}{3\pi^2}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点个数为 2. ………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)因为 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

由 $x^2+y^2=|x|+y$,得 $\rho^2=|\rho\cos\theta|+\rho\sin\theta$. ………………………………………… 2 分

由 $y>0$ 知,$\rho=\sqrt{x^2+y^2}>0$,且 $2k\pi<\theta<2k\pi+\pi$,

故 $\rho=|\cos\theta|+\sin\theta, 2k\pi<\theta<2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$. ………………………………………… 4 分

(范围写成 $0<\theta<\pi$ 不扣分)

(2)曲线 $C_1:\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$ (t 为参数,$t>0$)的极坐标方程为 $\theta=\alpha$,

又 $-\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$,

所以曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{2}+\alpha$. ………………………………………… 6 分

联立曲线 C 与 C_1 的极坐标方程,得 $\rho_A=|\cos\alpha|+\sin\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$;

联立曲线 C 与 C_2 的极坐标方程,得 $\rho_B=|\sin\alpha|+\cos\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$. ……………………… 8 分

故$\triangle OAB$ 的面积为

$\frac{1}{2}\rho_A\rho_B=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\frac{1}{2}(1+2\sin\alpha\cos\alpha)=\frac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)\leqslant 1$,

故当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$时,$\triangle OAB$ 面积的最大值为 1. ………………………………………… 10 分

23.【解析】(1)当 $x<-2$ 时,$f(x)=-2x+2-x-2\leqslant 5-2x$,解得 $-5\leqslant x<-2$; ………… 1 分

当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=-2x+2+x+2\leqslant 5-2x$,解得 $-2\leqslant x\leqslant 1$; ……………… 2 分

当 $x>1$ 时,$f(x)=2x-2+x+2\leqslant 5-2x$,此时不成立, ……………………………… 3 分

综上所述,原不等式的解集为$\{x|-5\leqslant x\leqslant 1\}$. ………………………………………… 5 分

(2)由题意,当 $x<-2$ 时,$f(x)=-3x>6$;当 $-2\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=-x+4\geqslant 3$;

当 $x>1$ 时,$f(x)=3x>3$,则 $f(x)$的最小值为 $T=3$. 所以,$a^2+b^2+2b=3$,

即 $a^2+(b+1)^2=4$. ………………………………………… 7 分

因为$(a+b+1)^2=a^2+(b+1)^2+2a(b+1)\leqslant a^2+(b+1)^2+a^2+(b+1)^2=2[a^2+(b+1)^2]$

$=8$,

又 a,b 为正数,则当且仅当 $a=b+1$ 时取等号,此时 $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{2}-1$,

所以 $a+b+1\leqslant 2\sqrt{2}$,即 $a+b\leqslant 2\sqrt{2}-1$. ………………………………………… 10 分