座位号______ 考场号______ 准考证号______ 姓名______ 班级______ 学校______

密封线内不要答题

2022-2023 学年 2023 届高三下学期第二次模拟考试

数　　学

注意事项：

1. 本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|2x^2-x-3<0\}$，$B=\{y|y=2-3x+x^2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\left\{x\middle|-\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$　B. $\left\{x\middle|-1<x<-\frac{1}{4}\right\}$

C. $\{x|-1\leqslant x<3\}$　D. $\left\{x\middle|-3\leqslant x<-\frac{1}{4}\right\}$

2. 设复数 $z_1=1+a\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，$z_2=\frac{13}{3-2\mathrm{i}}$，且 $|z_1|\leqslant|z_2|$，则 a 的最大值为

A. 1　B. 2　C. $2\sqrt{3}$　D. $3\sqrt{2}$

3. 已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\tan x<\pi$ 或 $e^{x+2}\geqslant\pi$，则命题 p 的否定为

A. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\tan x\geqslant\pi$ 或 $e^{x+2}<\pi$　B. $\forall x\in\mathbf{R}$，$\tan x<\pi$ 且 $e^{x+2}\geqslant\pi$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$\tan x<\pi$ 且 $e^{x+2}\geqslant\pi$　D. $\forall x\in\mathbf{R}$，$\tan x\geqslant\pi$ 且 $e^{x+2}<\pi$

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前三项和为 39，$a_6-6a_5+9a_4=0$，则 $a_5=$

A. 81　B. 243　C. 27　D. 729

5. 某校有演讲社团、篮球社团、乒乓球社团、羽毛球社团、独唱社团共五个社团，甲、乙、丙、丁、戊五名同学分别从五个社团中选择一个报名，记事件 A 为"五名同学所选项目各不相同"，事件 B 为"只有甲同学选篮球"，则 $P(A|B)=$

A. $\frac{3}{32}$　B. $\frac{3}{16}$　C. $\frac{3}{4}$　D. $\frac{2}{5}$

6. 已知一个圆台的上、下底面面积之比为 1∶4，其轴截面面积为 9，母线长为上底面圆的半径的 $\sqrt{10}$ 倍，则这个圆台的体积为

A. 3π　B. 5π　C. 7π　D. 9π

7. 已知函数 $f(x)=\sin(2023\pi+x)-\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$，则下列说法错误的是

A. $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

B. $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $y=f\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$ 为奇函数，

D. 不等式 $f(x)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集为 $\left[-\frac{7\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

8. 已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{2}x^2$．若存在 $t\in\mathbf{R}$，使得 $|f'(t+2)-f'(t)|\leqslant\frac{1}{4}$，则当 a 取最大值时 $f(x)$ 的最小值为

A. 0　B. $-\frac{9}{16}$　C. $-\frac{2}{9}$　D. $\frac{4}{9}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在四边形 ACC_1A_1 内(含四边形的边)运动，则下列说法正确的是

A. BB_1 上的任意一点到平面 ACC_1A_1 的距离恒为定值

B. 直线 AP 与 CD 所成角的正弦值的取值范围为 $[0,1]$

C. 若 $4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC_1}$，直线 CP 与平面 DCC_1D_1 所成角的正切值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

D. 三棱锥 $B-ADP$ 外接球的体积最大值等于正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的体积

10. 已知函数 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，下列说法正确的是

A. $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $x-y+1=0$

B. $\frac{3}{2}<f(\ln 2)<2$

C. 若函数 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于坐标原点对称，则 $g(x)=-e^{-x}-\frac{1}{2}x^2$

D. $f(x)$ 有唯一零点

11. 已知随机变量 $X\sim B\left(a,\frac{1}{2}\right)$，$E(X)=\frac{3}{2}$，二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$，则下列说法正确的是

A. $a=1$

B. 二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中所有项的系数和为 256

C. 二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 x 项的系数为 252

D. $(1-x^5)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 x^6 项的系数为 5418

12. 设 P 为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上的动点，F_1，F_2 分别为椭圆 C 的左，右焦点，焦距为 $2c$，点 I 到 $\triangle PF_1F_2$ 三边的距离相等，椭圆的离心率为 $\frac{1}{3}$，短轴长为 $4\sqrt{2}$，则

A. 点 P 到椭圆 C 的焦点的最大距离为 4

B. 若 $\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$，则 $|PF_2|=\frac{8}{3}$

C. $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 8

D. 直线 IF_1 和直线 IF_2 的斜率之积是定值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 数据 1，2，a，6 的平均数是 3，若将这组数据中的每一个数据都加上 2023，得到一组新数据，则新数据的标准差为________.

14. 希腊著名数学家阿波罗尼斯与欧几里得、阿基米德齐名. 他发现："平面内到两个定点 A，B 的距离之比为定值 $\lambda(\lambda\neq1)$ 的点的轨迹是圆". 后来，人们将这个圆以他的名字命名，称为阿波罗尼斯圆，简称阿氏圆. 已知在平面直角坐标系 xOy 中，$A(-3,1)$，$B(-3,6)$，点 P 是满足 $\lambda=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 的阿氏圆上的任一点，若抛物线 $y=\frac{1}{6}x^2$ 的焦点为 F，过点 F 的直线与此阿氏圆相交所得的最长弦与最短弦的和为________.

15. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足关系式 $f(x)=3x^2-xf'(1)+2\ln x$. 则 $f(x)$ 的图象上任意一点处的切线的斜率的取值范围为________.

16. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\cos\langle\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则以 $|\boldsymbol{c}|$ 为直径长的圆的面积的最大值为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，$2c\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)+b\cos\frac{C}{2}=c$.

(1) 求角 C 的大小；

(2) 求 $\sin A\sin B$ 的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，满足 $a_1=1$，$S_n=\left(\frac{1}{2}n+t\right)n$（$t$ 为常数）.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=a_n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（本小题满分 12 分）

学校体育节，某小组共 10 人，利用假期参加义工活动. 已知参加义工活动次数为 1，2，3 的人数分别为 3，3，4. 现从这 10 人中随机选出 2 人作为该组代表参加座谈会.

(1) 设 A 为事件"选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4"，求事件 A 发生的概率；

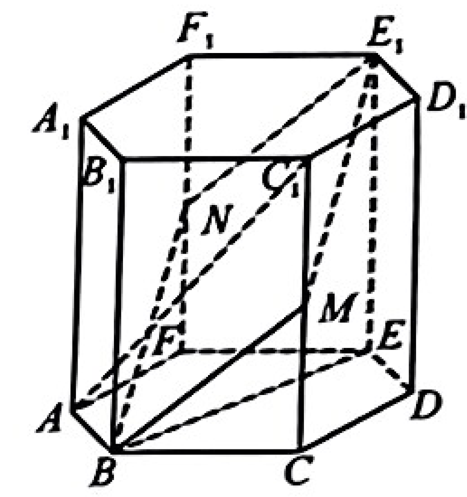
(2) 设 X 为选出的 2 人参加义工活动次数之差的绝对值，求随机变量 X 的分布列和数学期望与方差.

20.（本小题满分 12 分）

如图，正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的所有棱长为 2，M，N 分别为 CC_1，FF_1 的中点.

(1) 求证：直线 $BE\perp$ 直线 AC_1；

(2) 求平面 BME_1N 与平面 BEF_1 所成角的正弦值.



21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-2x+x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若 $f(x)+2\leqslant x^2+(a+1)x+b$ 在 $x\in(-1,+\infty)$ 上恒成立，求证：$b\geqslant a+4-\ln(a+3)$.

22.（本小题满分 12 分）

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1，F_2，离心率为 3，点 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},1\right)$ 在双曲线上.

(1) 求双曲线的标准方程；

(2) A，B 分别为双曲线的左，右顶点，若点 P 为直线 $x=\frac{1}{3}$ 上一点，直线 PA 与双曲线交于另一点 M，直线 PB 与双曲线交于另一点 N，求直线 MN 恒经过的定点坐标.

数学参考答案

1. A　$A=\{x|2x^2-x-3<0\}=\left\{x\,\middle|\,-1<x<\frac{3}{2}\right\}$，

$B=\{y|y=2-3x+x^2\}=\left\{y\,\middle|\,y\geqslant-\frac{1}{4}\right\}$，

所以 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right\}$，故选 A.

2. C　因为复数 $z_1=1+a\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，$z_2=\frac{13}{3-2\mathrm{i}}=3+2\mathrm{i}$，且 $|z_1|\leqslant|z_2|$，

所以 $a^2+1\leqslant3^2+2^2$，解得 $-2\sqrt{3}\leqslant a\leqslant2\sqrt{3}$，所以 a 的最大值为 $2\sqrt{3}$. 故选 C.

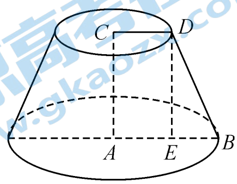
3. D　因为命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$\tan x<\pi$ 或 $\mathrm{e}^{x+2}\geqslant\pi$ 是存在量词命题，所以命题 p 的否定为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$\tan x\geqslant\pi$ 且 $\mathrm{e}^{x+2}<\pi$. 故选 D.

4. B　$a_6-6a_5+9a_4=0$，$q^2-6q+9=0$，$q=3$，$a_1+a_2+a_3=a_1+3a_1+9a_1=13a_1=39$，$a_1=3$，$\therefore a_n=3^n$，$a_5=3^5=243$. 故选 B.

5. A　事件 AB：甲同学选篮球且五名同学所选项目各不相同，所以其他 4 名同学排列在其他 4 个项目，且互不相同为 A_4^4，事件 B：甲同学选篮球，所以其他 4 名同学排列在其他 4 个项目，可以安排在相同项目为 4^4，

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{\mathrm{A}_4^4}{5^5}}{\frac{4^4}{5^5}}=\frac{3}{32}$. 故选 A.

6. C　如图，设圆台上、下底面圆心分别为 C，A，半径分别为 CD，AB，



由题意得 $CD:AB=1:2$，即 $AB=2CD$，

因为圆台的轴截面面积为 9，

所以 $\frac{1}{2}(2AB+2CD)AC=9$，所以 $AC\cdot CD=3$，

过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，

所以 $BD=\sqrt{AC^2+(AB-CD)^2}=\sqrt{AC^2+CD^2}$，

因为母线长为上底面圆的半径的 $\sqrt{10}$ 倍，

所以 $10CD^2=AC^2+CD^2$，即 $AC=3CD$，

所以 $AC=3$，$CD=1$，所以 $AB=2$，

所以圆台的体积 $V=\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h=\frac{1}{3}(\pi+4\pi+\sqrt{\pi\times4\pi})\times3=7\pi$，故选 C.

7. D　因为 $f(x)=\sin(2023\pi+x)-\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=-\sin x+\cos x=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $f(x)\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，故选项 A 正确；

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 得 $-\frac{\pi}{4}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，故选项 B 正确；

所以 $f\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x$，

所以 $y=f\left(x+\frac{5\pi}{4}\right)$ 为奇函数，故选项 C 正确；

由 $-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 得 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant-\frac{1}{2}$，

即 $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

所以不等式 $f(x)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集为 $\left[-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,\frac{\pi}{12}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，故选项 D 错误. 故选 D.

8. C　因为 $f(x)=\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{2}x^2$，所以 $f'(x)=ax^3-x$，

依题意 $f'(t+2)-f'(t)=[a(t+2)^3-(t+2)]-(at^3-t)=2a(3t^2+6t+4)-2$，

因为存在 $t\in\mathbf{R}$，使得 $|f'(t+2)-f'(t)|\leqslant\frac{1}{4}$，

所以 $|2a(3t^2+6t+4)-2|\leqslant\frac{1}{4}$，即 $-\frac{1}{4}\leqslant2a(3t^2+6t+4)-2\leqslant\frac{1}{4}$ 有解，

因为 $t\in\mathbf{R}$，则 $3t^2+6t+4=3(t+1)^2+1\geqslant1$，

所以 $\frac{7}{8(3t^2+6t+4)}\leqslant a\leqslant\frac{9}{8(3t^2+6t+4)}$ 有解，

所以 $a\leqslant\left[\frac{9}{8(3t^2+6t+4)}\right]_{\max}$，

因为 $3t^2+6t+4\geqslant1$，所以 $0<\frac{1}{3t^2+6t+4}\leqslant1$，

所以 $\frac{9}{8(3t^2+6t+4)}\leqslant\frac{9}{8}$，

所以 a 的最大值为 $\frac{9}{8}$. 此时 $f(x)=\frac{9}{32}x^4-\frac{1}{2}x^2=\frac{9}{32}\left(x^2-\frac{8}{9}\right)^2-\frac{2}{9}\geqslant-\frac{2}{9}$.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{2}{9}$，故选 C.

9. ACD　对于 A，由正方体的性质知，BB_1 // 平面 ACC_1A_1，

所以 BB_1 上的任意一点到平面 ACC_1A_1 的距离恒为定值，故选项 A 正确；

对于 B，由正方体的性质知，AB // CD，

所以直线 AP 与 CD 所成角即为直线 AP 与 AB 所成角，

因为点 P 在四边形 ACC_1A_1 内(含四边形的边)运动，

所以直线 AP 与 AB 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{2}$，最小值为 $\frac{\pi}{4}$，

所以直线 AP 与 CD 所成角的正弦值的范围为 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故选项 B 错误；

对于 C，因为 $4\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC_1}$，所以点 P 是 AC_1 上靠近 A 的四等分点，

过点 P 作平面 CDD_1C_1 的垂线，垂足为 Q

由正方体的性质知，Q 是 DC_1 靠近 D 的四等分点，连接 CQ，

则 $\angle PCQ$ 为直线 CP 与平面 CDD_1C_1 所成的角，

在 $\mathrm{Rt}\triangle PCQ$ 中，易得 $PQ=\frac{3}{4}$，$CQ=\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-2\times1\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

所以 $\tan\angle PCQ=\frac{PQ}{CQ}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故选项 C 正确；

对于 D，因为点 P 在四边形 ACC_1A_1 内(含四边形的边)运动，

当 P 点在 A_1 或 C_1 点时，其外接球的体积最大为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的的体积，当 P 点不在

A_1 或 C_1 时，其外接球体积较小，故 D 正确. 故选 ACD.

10. ABD　对于 A，因为 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，所以 $f'(x)=e^x-x$，

所以 $f(0)=1, f'(0)=1$，

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-1=x-0$，即 $x-y+1=0$，故选项 A 正确；

对于 B，因为 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，所以 $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-\frac{1}{2}\ln^2 2=2-\frac{1}{2}\ln^2 2$，

因为 $0<\ln 2<1$，所以 $\frac{3}{2}<f(\ln 2)<2$，故选项 B 正确；

对于 C，因为 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，

函数 $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于坐标原点对称，

所以 $g(x)=-\left[e^{-x}-\frac{1}{2}(-x)^2\right]=-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2$，故选项 C 错误；

对于 D，因为 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$，所以 $f'(x)=e^x-x$，所以 $f''(x)=e^x-1$，

令 $f''(x)=e^x-1=0$ 得 $x=0$，令 $f''(x)=e^x-1>0$ 得 $x>0$，令 $f''(x)=e^x-1<0$ 得 $x<0$，

所以 $f'(x)=e^x-x$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f'(x)$ 的极小值为 $f'(0)=1$，即 $f'(x)_{\min}=1>0$，

所以 $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $f(0)=1>0, f(-1)=\frac{1}{e}-\frac{1}{2}<0$，

由零点存在性定理知 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内存在唯一零点，

所以 $f(x)$ 有唯一零点，故选项 D 正确. 故选 ABD.

11. BCD　对于 A，因为随机变量 $X\sim B\left(a,\frac{1}{2}\right)$，$E(X)=a\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，所以 $a=3$. 故选项 A 错误；

对于 B，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-3x^2\right)^8$ 中，令 $x=1$ 得 $(1-3)^8=256$，故选项 B 正确；

对于 C，当 $a=3$ 时，$T_{r+1}=C_8^r\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}\cdot(-3x^2)^r=(-3)^r\cdot C_8^r\cdot x^{-4+\frac{5}{2}r}$，其中 r 为整数，且 $0\leqslant r\leqslant 8$，

令 $-4+\frac{5}{2}r=1$，解得 $r=2$，所以二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 x 项的系数为 $(-3)^2\cdot C_8^2=252$，故选项 C 正确；

对于 D，由选项 C 知二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 x 项的系数为 $(-3)^2\cdot C_8^2=252$，

令 $-4+\frac{5}{2}r=6$，解得 $r=4$，所以二项式 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 x^6 项的系数为 $(-3)^4\cdot C_8^4=5670$，

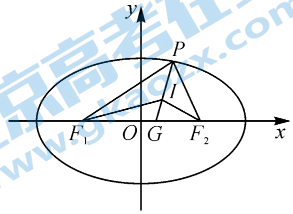
所以 $(1-x^5)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-ax^2\right)^8$ 的展开式中含 x^6 项的系数为 $5670-252=5418$，故选项 D 正确. 故选 BCD.

12. ABD　根据题意得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{3},\\ 2b=4\sqrt{2},\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3,\\ b=2\sqrt{2},\\ c=1,\end{cases}$ 对于 A，点 P 到椭圆 C 的焦点的最大距离为 $a+c=4$，故选项 A 正确；

对于 B，若 $\overrightarrow{PF_2}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=0$，所以 $PF_2\perp F_1F_2$，则 $|PF_2|=\frac{8}{3}$，故选项 B 正确；

对于 C，依题意$\triangle PF_1F_2$的面积的最大值为$\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot b=bc$，$b=2\sqrt{2}$，$c=1$，所以 $bc=2\sqrt{2}$，故选项 C 错误；

对于 D，连接 PI 并延长交 x 轴于 G，因为 I 到$\triangle PF_1F_2$三边的距离相等，



则由内角平分线定理可得$\frac{|F_1G|}{|PF_1|}=\frac{|GI|}{|IP|}$，$\frac{|F_2G|}{|PF_2|}=\frac{|GI|}{|IP|}$，

所以$\frac{|GI|}{|IP|}=\frac{|F_1G|+|F_2G|}{|PF_1|+|PF_2|}=\frac{c}{a}=\mathrm{e}$.

设 $P(x_0,y_0)$，$I(x_I,y_I)$，$G(x_G,0)$，则$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以$\frac{a^2y_0^2}{a^2-x_0^2}=b^2$，

所以$\frac{y_I}{y_0}=\frac{c}{a+c}$，则 $y_I=\frac{cy_0}{a+c}$，又$\frac{c-x_G}{x_G+c}=\frac{a-\mathrm{e}x_0}{a+\mathrm{e}x_0}$，则 $x_G=\mathrm{e}^2x_0$.

所以$\frac{x_I-x_G}{x_0-x_G}=\frac{c}{a+c}$，则 $x_I=\mathrm{e}x_0$，所以 $k_{IF_1}=\frac{y_I}{x_I+c}$，所以 $k_{IF_2}=\frac{y_I}{x_I-c}$，

则 $k_{IF_1}\cdot k_{IF_2}=-\frac{\frac{c^2y_0^2}{(a+c)^2}}{c^2-\frac{c^2}{a^2}x_0^2}=\frac{1}{(a+c)^2}\cdot\frac{a^2y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2}{(a+c)^2}=-\frac{1}{2}$，

所以直线 IF_1 和直线 IF_2 的斜率之积是定值. 故选项 D 正确. 故选 ABD.

13. $\frac{\sqrt{14}}{2}$　因为数据 1，2，a，6 的平均数是 3，所以 $3=\frac{1+2+a+6}{4}$，解得 $a=3$，

若将这组数据中每一个数据都加上 2023，则新数据的平均数为 $\bar{x}=2026$，

方差为 $s^2=\frac{1}{4}\times[(2024-2026)^2+(2025-2026)^2+(2026-2026)^2+(2029-2026)^2]=\frac{14}{4}$.

所以新数据的标准差为$\frac{\sqrt{14}}{2}$.

14. $10\sqrt{6}+\sqrt{123}$　设 $P(x,y)$，由阿氏圆的定义可得$\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

即$\frac{(x+3)^2+(y-1)^2}{(x+3)^2+(y-6)^2}=\frac{2}{3}$，化简得 $x^2+y^2+6x+18y-60=0$，

所以$(x+3)^2+(y+9)^2=150$，所以点 P 在圆心为$(-3,-9)$，半径为 $5\sqrt{6}$的圆上，

因为抛物线 $C:y=\frac{1}{6}x^2$ 的焦点为 F，所以 $F\left(0,\frac{3}{2}\right)$，

因为$(0+3)^2+\left(\frac{3}{2}+9\right)^2=\frac{477}{4}<150$，所以点 F 在圆$(x+3)^2+(y+9)^2=150$ 内，

因为点 F 到与圆心的距离为$\sqrt{\frac{477}{4}}=\frac{\sqrt{477}}{2}$，

所以过点 F 的最短弦长为 $2\sqrt{150-\frac{477}{4}}=\sqrt{123}$，过点 F 的最长弦长为 $2\sqrt{150}=10\sqrt{6}$，

所以过点 F 的最长弦与最短弦的和为 $10\sqrt{6}+\sqrt{123}$.

15. $[4\sqrt{3}-4,+\infty)$　因为 $f(x)=3x^2-xf'(1)+2\ln x$，所以 $f'(x)=6x-f'(1)+\frac{2}{x}$，

所以 $f'(1)=6-f'(1)+2$，所以 $f'(1)=4$，

所以 $f(x)=3x^2-4x+2\ln x(x>0)$，

所以 $f'(x)=6x-4+\frac{2}{x}\geqslant 2\sqrt{6x\cdot\frac{2}{x}}-4=4\sqrt{3}-4$，当且仅当 $6x=\frac{2}{x}$，即 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$时等号成立，

所以 $f'(x)$的最小值为 $4\sqrt{3}-4$，

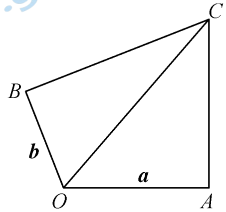
所以 $f(x)$的图象上任意一点处的切线的斜率的取值范围为$[4\sqrt{3}-4,+\infty)$.

16. $\frac{5}{2}\pi$　因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$，$|\boldsymbol{b}|=1$，

又因为 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\cos\langle\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，$\langle\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角大小为 $\frac{3\pi}{4}$，$\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\pi}{4}$，

如图，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，



连接 AC，BC，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CB}$，所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{4}$，

又 $\angle AOB=\frac{3\pi}{4}$，所以 O,A,C,B 四点共圆，

故当 OC 为圆的直径时，$|\boldsymbol{c}|$ 最大，

此时 $A=B=\frac{\pi}{2}$，$OA=\sqrt{2}$，$OB=1$，$\angle BOC=\frac{3\pi}{4}-\angle AOC$，

在 Rt$\triangle AOC$ 中，$OC=\frac{OA}{\cos\angle AOC}$，

在 Rt$\triangle BOC$ 中，$OC=\frac{OB}{\cos\angle BOC}$，

所以 $\frac{OA}{\cos\angle AOC}=\frac{OB}{\cos\angle BOC}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{\cos\angle AOC}=\frac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\angle AOC\right)}$，

所以 $\cos\angle AOC=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\angle AOC+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\angle AOC\right)$，

整理得 $2\cos\angle AOC=\sin\angle AOC$，

所以 $\tan\angle AOC=2$，$\cos\angle AOC=\frac{1}{\sqrt{5}}$，

所以 $OC=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}}=\sqrt{10}$，即 $|\boldsymbol{c}|$ 的最大值为 $\sqrt{10}$.

所以以 $|\boldsymbol{c}|$ 为直径的圆的面积的最大值为 $\pi\times\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\pi$.

17. 解：(1)因为 $2c\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)+b\cos\frac{C}{2}=c$，

所以 $b\cos\frac{C}{2}=c\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\right]$，即 $b\cos\frac{C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)c$，

由正弦定理得 $\sin B\cos\frac{C}{2}=\sin C\sin B$，…………………………………………………… 3 分

因为 $B,C\in(0,\pi)$，则 $\sin B>0$，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{C}{2}>0$，

所以 $\cos\frac{C}{2}=\sin C$，则 $\cos\frac{C}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$，

所以 $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$，$\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$，则 $C=\frac{\pi}{3}$；…………………………………… 5 分

(2)由(1)可知，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由正弦定理可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}a}{2c}$，$\sin B=\frac{\sqrt{3}b}{2c}$，

所以 $\sin A\sin B=\frac{3ab}{4c^2}$，

由余弦定理可得 $a^2+b^2-ab=c^2$，…………………………………………………………… 8 分

由基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当 $a=b$ 时取等号)，可得 $c^2\geqslant ab$，

所以 $\sin A\sin B=\frac{3ab}{4c^2}\leqslant\frac{3ab}{4ab}=\frac{3}{4}$，

故 $\sin A\sin B$ 的最大值为$\frac{3}{4}$. …………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)令 $n=1$，$S_1=a_1=\left(\frac{1}{2}+t\right)$，可得 $t=\frac{1}{2}$，所以 $S_n=\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\right)n$， …………………… 2 分

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=\left[\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{2}\right](n-1)$，可得 $a_n=\frac{1}{2}[n^2-(n-1)^2]+\frac{1}{2}=n$，

所以 $a_n=n(n\geqslant2)$，

又因为 $a_1=1$ 满足上式，所以 $a_n=n$； ………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $b_n=a_n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{a_{n+1}}=n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$， ……………………………………………… 6 分

所以 $T_n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\cdots+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$， ………………………… 7 分

两边乘$\frac{1}{4}$得$\frac{1}{4}T_n=1\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots+(n-1)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}+n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$，

……………………………………………………………………………………………………… 8 分

两式相减得$\frac{3}{4}T_n=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{1}{4}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$

$=\frac{\frac{1}{16}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}-n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}$， …………………………………………………………… 10 分

所以 $T_n=\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{9}+\frac{n}{12}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$. ……………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 A 为事件“选出的 2 人参加义工活动次数之和为 4”，

所以事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{C_3^1C_4^1+C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$； ………………………………………………… 4 分

(2)X 的可能取值为 0，1，2，

$P(X=0)=\frac{C_3^2+C_3^2+C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}$，$P(X=1)=\frac{C_3^1C_3^1+C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{7}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_3^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{4}{15}$.

……………………………………………………………………………………………………… 8 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{4}{15}$

所以 $E(X)=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{7}{15}+2\times\frac{4}{15}=1$. ……………………………………………… 10 分

$D(X)=(0-1)^2\times\frac{4}{15}+(1-1)^2\times\frac{7}{15}+(2-1)^2\times\frac{4}{15}=\frac{8}{15}$. …………………………………… 12 分

20. (1)证明：连接 AC，∵$ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 是正六棱柱，棱长为 2，

∴$AF\parallel BE$，$BE\perp C_1C$，$AF=2$，$AC=2\sqrt{3}$，$FC=2AF=4$， …………………………………… 2 分

又∵$AF^2+AC^2=FC^2$，∴$AF\perp AC$，$BE\perp AC$， ………………………………………………… 3 分

又∵$CC_1\cap AC=C$，CC_1、$AC\subset$平面 AC_1C，

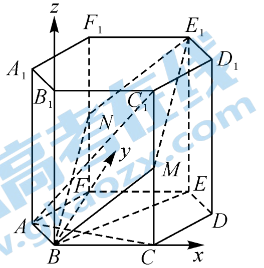
∴$BE\perp$平面 AC_1C，又∵$AC_1\subset$平面 AC_1C， ………………………………………………… 5 分

∴$BE\perp AC_1$； ………………………………………………………………………………… 6 分

(2)解：以 B 为坐标原点，BC，BF，BB_1，分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

因为正六棱柱 $ABCDEF-A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的所有棱长为 2，M，N 分别为 CC_1，FF_1 的中点. 所以 $B(0,0,0)$，

$M(2,0,1)$，$N(0,2\sqrt{3},1)$，$E(2,2\sqrt{3},0)$，$F_1(0,2\sqrt{3},2)$，



所以$\overrightarrow{BM}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{BN}=(0,2\sqrt{3},1)$，$\overrightarrow{BE}=(2,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BF_1}=(0,2\sqrt{3},2)$，…… 7 分

设平面 BME_1N 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BN}=(x,y,z)\cdot(0,2\sqrt{3},1)=2\sqrt{3}y+z=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BM}=(x,y,z)\cdot(2,0,1)=2x+z=0,\end{cases}$

令 $z=2\sqrt{3}$，则 $x=-\sqrt{3}$，$y=-1$，即 $\boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},-1,2\sqrt{3})$.

设平面 BEF_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(2,2\sqrt{3},0)=2x_1+2\sqrt{3}y_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF_1}=(x_1,y_1,z_1)\cdot(0,2\sqrt{3},2)=2\sqrt{3}y_1+2z_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=\sqrt{3}$，则 $x_1=\sqrt{3}$，$y_1=-1$，即 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$. …………………………………………………… 9 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{(-\sqrt{3},-1,2\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})}{4\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，…………………………………… 10 分

设平面 BME_1N 与平面 BEF_1 所成角为 θ，

则 $|\cos\theta|=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{7}}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

所以平面 BME_1N 与平面 BEF_1 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)因为 $f(x)=\ln(x+1)-2x+x^2$ 的定义域为$(-1,+\infty)$，

所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-2+2x=\dfrac{2x^2-1}{x+1}$，…………………………………………………………………… 2 分

令$\dfrac{2x^2-1}{x+1}=0$ 得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；令$\dfrac{2x^2-1}{x+1}>0$ 得 $x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；令$\dfrac{2x^2-1}{x+1}<0$ 得$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left(-1,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$；………… 4 分

(2)因为 $f(x)=\ln(x+1)-2x+x^2$，

$f(x)+2\leqslant x^2+(a+1)x+b$ 在 $x\in(-1,+\infty)$上恒成立，

即 $b\geqslant\ln(x+1)-(a+3)x+2$ 在 $x\in(-1,+\infty)$上恒成立，…………………………………………………… 6 分

设 $g(x)=\ln(x+1)-(a+3)x+2(x>-1)$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-(a+3)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{(a+3)(x+1)}{x+1}=\dfrac{-(a+3)x-(a+2)}{x+1}$. ………………………… 7 分

①若 $a+3\leqslant0$，则 $g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，$g(x)$的值域为 $\mathbf{R}$，

故 $b\geqslant\ln(x+1)-(a+3)x+2$ 不能恒成立，故舍去；………………………………………………………… 9 分

②若 $a+3>0$，则当 $x\in\left(-1,-\dfrac{a+2}{a+3}\right)$时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(-\dfrac{a+2}{a+3},+\infty\right)$时，$g'(x)<0$，

从而 $g(x)$在$\left(-1,-\dfrac{a+2}{a+3}\right)$上单调递增，在$\left(-\dfrac{a+2}{a+3},+\infty\right)$上单调递减，

所以 $g(x)$有最大值 $g\left(-\dfrac{a+2}{a+3}\right)=a+4-\ln(a+3)$，

所以 $b\geqslant a+4-\ln(a+3)$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)因为点$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},1\right)$在双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上，所以$\dfrac{18}{16a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1$，

又离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=3$，即 $b^2=8a^2$，

所以 $a^2=1$，$b^2=8$，

所以双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$； …………………………………………………………… 4 分

(2)设 $P\left(\frac{1}{3},t\right)$，因为 A,B 分别为双曲线 $x^2-\frac{y^2}{8}=1$ 的左，右顶点，所以 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，

所以直线 PA 的方程为 $y=\frac{3t}{4}(x+1)$.

由 $\begin{cases} x^2-\frac{y^2}{8}=1, \\ y=\frac{3t}{4}(x+1), \end{cases}$ 消去 y 得 $(128-9t^2)x^2-18t^2x-9t^2-128=0$. …………………… 5 分

因为直线 PA 与双曲线交于点 A,M，所以 $128-9t^2\neq0$，所以 $t\neq\pm\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

因为 $x_Ax_M=\frac{-9t^2-128}{128-9t^2}$，所以 $x_M=\frac{9t^2+128}{128-9t^2}$， …………………………………… 6 分

所以 $y_M=\frac{3t}{4}\left(\frac{9t^2+128}{128-9t^2}+1\right)=\frac{192t}{128-9t^2}$，

所以 $M\left(\frac{9t^2+128}{128-9t^2},\frac{192t}{128-9t^2}\right)$. …………………………………………………… 7 分

因为直线 PB 的方程为 $y=-\frac{3}{2}t(x-1)$，

由 $\begin{cases} x^2-\frac{y^2}{8}=1, \\ y=-\frac{3}{2}t(x-1), \end{cases}$ 消去 y 得 $(32-9t^2)x^2+18t^2x-9t^2-32=0$.

因为直线 PB 与双曲线交于点 B,N，所以 $32-9t^2\neq0$，所以 $t\neq\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

因为 $x_Bx_N=\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}$，所以 $x_N=\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}$，

$y_N=-\frac{3}{2}t(x_N-1)=-\frac{3}{2}t\left(\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}-1\right)=\frac{96t}{32-9t^2}$，

所以 $N\left(\frac{-9t^2-32}{32-9t^2},\frac{96t}{32-9t^2}\right)$. …………………………………………………… 9 分

所以当 $t\neq\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 且 $t\neq\pm\frac{8\sqrt{2}}{3}$ 时，

直线 MN 的斜率为 $k=\dfrac{\frac{192t}{128-9t^2}-\frac{96t}{32-9t^2}}{\frac{9t^2+128}{128-9t^2}-\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}}=\dfrac{-96t(64+9t^2)}{(9t^2+128)(32-9t^2)+(9t^2+32)(128-9t^2)}$；

当 $t\neq0$ 时，直线 MN 的方程为

$y-\frac{96t}{32-9t^2}=\frac{-96t(64+9t^2)}{(9t^2+128)(32-9t^2)+(9t^2+32)(128-9t^2)}\left(x-\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}\right)$. ………………………… 10 分

令 $y=0$，得 $\frac{1}{32-9t^2}=\frac{64+9t^2}{(9t^2+128)(32-9t^2)+(9t^2+32)(128-9t^2)}\left(x-\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}\right)$.

所以 $x=\frac{(9t^2+128)(32-9t^2)+(9t^2+32)(128-9t^2)}{(32-9t^2)(64+9t^2)}+\frac{-9t^2-32}{32-9t^2}=\frac{3(2048-288t^2-81t^4)}{2048-288t^2-81t^4}=3$，

所以直线 MN 过定点 $(3,0)$. …………………………………………………………………… 11 分

当 $t=0$ 时，$P\left(\frac{1}{3},0\right)$，直线 MN 的方程为 $y=0$，过定点 $(3,0)$.

当 $t=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 或 $t=\pm\frac{8\sqrt{2}}{3}$ 时，直线 PA,PB 分别与双曲线的渐近线平行，点 M,N 不存在.

综上，直线 MN 恒过定点 $(3,0)$. ………………………………………………………………… 12 分