



高三一轮复习调研考 数学

北京高考在线
www.gkzxx.com

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x + 1 < 2\}$, $B = \{x | x^2 < 4\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $(1, 2)$ B. $(-\infty, 1)$
 C. $(-2, 2)$ D. $(-2, 1)$

2. 若双曲线 $mx^2 + ny^2 = 1$ 的焦点在 y 轴上, 则

- A. $m < 0, n < 0$ B. $m > 0, n > 0$
 C. $m < 0 < n$ D. $n < 0 < m$

3. 复数 $z = i(\sqrt{3} - i)$, 则 $|z| =$

- A. 4 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3

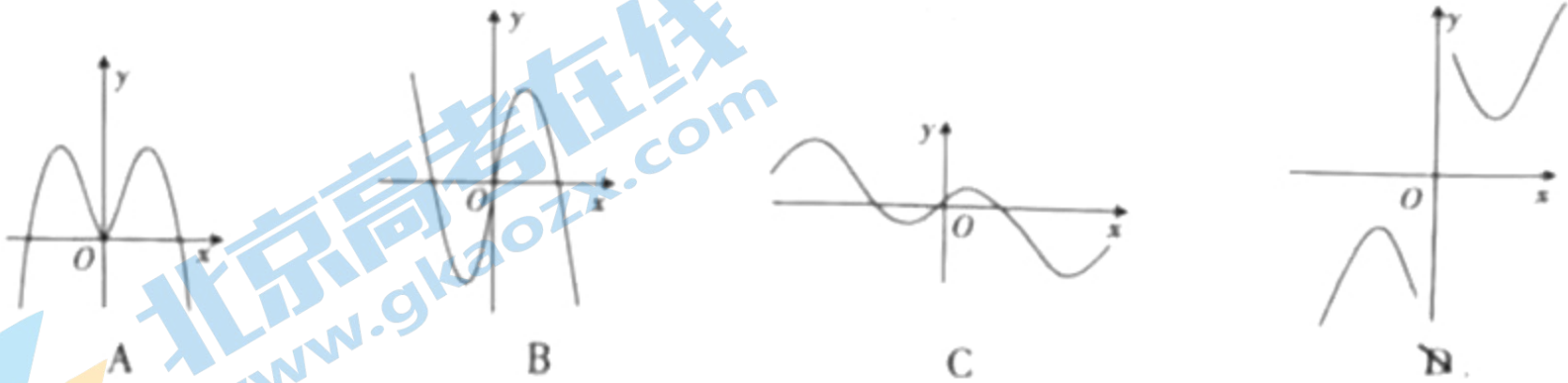
4. 已知函数 $f(x) = 2\cos(3x + \varphi)$, 则“ $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ”是“ $f(x)$ 为奇函数”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. $(3x + \frac{1}{x})^6$ 展开式中的常数项为

- A. 90 B. 20 C. 540 D. 600

6. 函数 $f(x) = (4 - e^{|x|})x$ 的部分图象可能是



7. 已知直三棱柱的各棱长都相等, 三棱柱的所有顶点都在球 O 的表面上, 若球 O 的表面积为 28π , 则该三棱柱的体积为

- A. 6 B. 18
 C. $12\sqrt{3}$ D. $16\sqrt{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $a_3 + S_3 = -18$ ， $a_5 = -a_3$ ，则

A. $a_n = 2n - 9$

B. $a_n = 2n - 7$

C. $S_n = n^2 - 8n$

D. $S_n = n^2 - 6n$

10. 下列结论 错误 的是

A. 若 $x > 0$ ，则 $\ln x + \frac{1}{\ln x} \geq 2$

B. 若 $a > b, c > d$ ，则 $ac > bd$

C. 若 $b > 0 > a$ ，则 $b^a < 1$

D. 若 $a > b > 1 > c > 0$ ，则 $ab^c > ba^c$

11. 已知函数 $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + x^5 + 3$ ，函数 $g(x)$ 满足 $g(-x) + g(x) = 6$ ，则

A. $f(\lg 3) + f(\lg \frac{1}{3}) = 6$

B. 函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(3, 0)$ 对称

C. 若实数 a, b 满足 $f(a) + f(b) > 6$ ，则 $a + b > 0$

D. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ，则 $x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = 6$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & x < 0, \\ \sin x, & x \geq 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} kx, & x > 0, \\ 2^x, & x \leq 0, \end{cases}$ 若 x_1, x_2, x_3, x_4 是方程 $|f(x)| = g(x)$

仅有的 4 个解，且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ，则

A. $0 < x_1 x_2 < 1$

B. $x_1 x_2 > 1$

C. $\tan x_4 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$

D. $\tan x_4 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

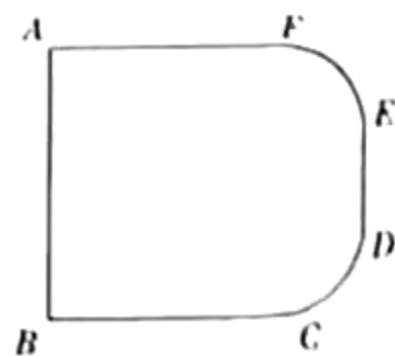
13. 已知向量 $a = (3, 6)$ ， $b = (m, 1 - m)$ ，若 $a \perp b$ ，则 $b \cdot (a + b) = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

① $f(x + 4) = -f(-x)$ ；② $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$ ， $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ；③ $f(x)$ 的图象不是一条直线。

15. 已知曲线 $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $x = x_0$ 处的切线经过点 $(0, -2)$ ，则 $x_0 e^{x_0} = \underline{\hspace{2cm}}$

16. 某地区计划修建一个如图所示的市民公园，其中 $AB = 3$ ， $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ， $AB \parallel DE$ ， AB 与 DE 之间的距离为 3，曲线段 CD, EF 是半径相等，且圆心角为 90° 的圆弧，设该市民公园的面积为 S ，周长为 L ，则 $\frac{S}{L}$ 的最大值为 。（本题取 $\pi = 3$ 进行计算）



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足 $2S_n = 3^n - 1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $c_n = a_n + \log_3 a_n$ ，求 $c_1 + c_2 + \dots + c_n$ 的值。

18. (12 分)

已知命题“ $\exists t \in (0, \frac{1}{2}]$, $1 + t + at^2 < 0$ ”是假命题。

(1) 求实数 a 的取值集合 A ；

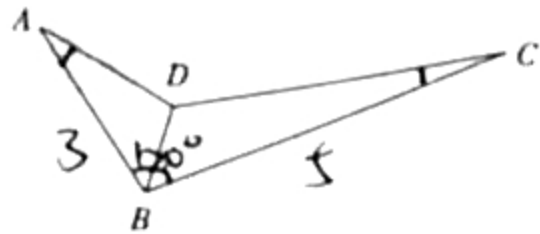
(2) 若集合 $B = \{a \mid m - a < 4\}$ 是集合 A 的必要不充分条件，求 m 的取值范围。

19. (12 分)

如图，平面凹四边形 $ABCD$ ，其中 $AB=3$, $BC=5$, $\angle ABC=120^\circ$, $AD \sin A = CD \sin C$ 。

(1) 证明： BD 为 $\angle ABC$ 的角平分线。

(2) 若 $BD=1$ ，求 $\angle ADC$ 的值。



20. (12分)

已知函数 $f(x) = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$,

(1) 若函数 $f(x) = a^x - a$ 在区间 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $f(2\sin x) + f(\cos 2x) = 2$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

21. (12分)

若椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点, 且与双曲线 $2x^2 - 2y^2 = 1$ 有相同的焦点.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 不过原点 O 的直线 $l: y = \frac{3}{2}x + m$ 与椭圆 E 交于 A, B 两点, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - \sin x - 1$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

(2) 证明: $f(x)$ 在 $(-\pi, +\infty)$ 上有且仅有 2 个零点.

高三一轮复习调研考 数学参考答案

1. D 【解析】本题考查集合的运算,考查运算求解能力.

因为 $A = \{x | x+1 < 2\} = \{x | x < 1\}$, $B = \{x | x^2 < 4\} = \{x | -2 < x < 2\}$, 所以 $A \cap B = \{x | -2 < x < 1\}$.

2. C 【解析】本题考查双曲线的定义,考查逻辑推理能力.

双曲线 $mx^2 + ny^2 = 1$ 的焦点在 y 轴上, 则一定有 $m < 0 < n$.

3. B 【解析】本题考查复数的运算,考查运算求解能力.

由已知, $z = i(\sqrt{3} - i) = 1 + \sqrt{3}i$, 所以 $|z| = 2$.

4. A 【解析】本题考查充分必要条件,考查逻辑推理能力.

当 $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时, $f(x) = 2\cos(3x + \varphi) = -2\sin 3x$, 所以 $f(x)$ 为奇函数.

当 $f(x)$ 为奇函数时, $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

综上, “ $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ” 是 “ $f(x)$ 为奇函数” 的充分不必要条件.

5. C 【解析】本题考查二项展开式,考查运算求解能力.

$(3x + \frac{1}{x})^6$ 的二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r 3^6 - r x^{6-r} x^{-r} = C_6^r 3^6 - r x^{6-2r}$.

当 $r=3$ 时, $T_4 = 540$, 所以 $(3x + \frac{1}{x})^6$ 展开式中的常数项为 540.

6. B 【解析】本题考查函数的图象,考查逻辑推理能力.

$f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 为奇函数, 排除 A; 当 $x > \ln 4$ 时, $f(x) < 0$, 排除 D;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = (1 - e^x)x$, $f'(x) = -xe^x + 1 - e^x = 1 - e^x(x+1)$, 当 $x > \ln 4$ 时, $f'(x) < 0$, 排除 C. 故选 B.

7. B 【解析】本题考查三棱柱的外接球,考查空间想象能力.

设球 O 的半径为 r , 则 $4\pi r^2 = 28\pi$, 则 $r = \sqrt{7}$.

设三棱柱的棱长为 a , 则 $(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2 + (\frac{a}{2})^2 = r^2$, 则 $a = 2\sqrt{3}$.

$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3 = 18$.

8. C 【解析】本题考查函数的零点,考查数形结合的数学思想.

显然 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的零点, 令 $f(x) = 0$, 可化为 $1x - a = \frac{1}{|x|}$, 则 $y = 1x - a$ 与 $y = \frac{1}{|x|}$ 的图象有三个交点, 且

$y = 1x - a$ 与 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 必有一个交点, 所以 $y = 1x - a$ 与 $y = -\frac{1}{x} (x < 0)$ 有两个交点, 所以 $a = 1x + \frac{1}{x} (x < 0)$, 则 $a < -4$.

9. AC 【解析】本题考查等差数列,考查运算求解能力.

因为 $a_1 + S_5 = 6a_3 = 18$, 所以 $a_1 = 3$. 又 $a_6 = 3$, 所以 $a_1 = 7, d = -2$, 则 $a_n = 2n - 9, S_n = n^2 - 8n$.

10. ABC 【解析】本题考查不等式的性质,考查逻辑推理能力.

对于 A, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\ln x + \frac{1}{\ln x} < 0$, 所以 A 错误;

对于 B, 若 $a = 1, b = -1, c = -1, d = -2$, 则 $ac = -1, bd = 2$, 此时 $ac < bd$, 所以 B 错误;

对于 C, 当 $0 < b < 1$ 时, $b^2 > b - 1$, 所以 C 错误;

对于 D, $y = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $b^{-1} > a^{-1}$, 则 $ab > ba$, 所以 D 正确.

11. AC 【解析】本题考查函数的性质,考查运算求解能力和逻辑推理能力.

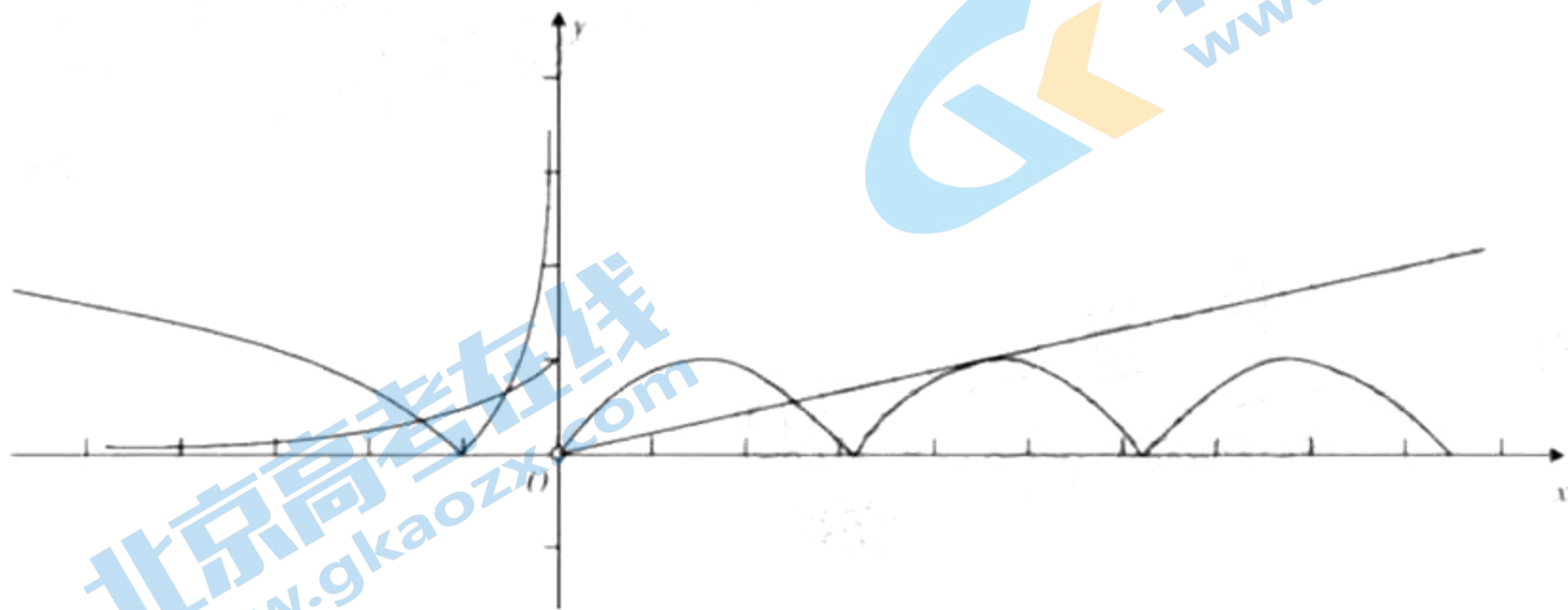
令 $h(x) = f(x) - 3 = \ln(\sqrt{x^2+1} + x) + x^3$, 则 $h(x)$ 为奇函数, 且在 \mathbb{R} 上单调递增, 因为 $f(a) + f(b) > 6$, 所以 $h(a) + h(b) > 0$, 则 $h(a) > h(-b)$, 即 $a + b > 0$;

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

3) 对称: 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的交点为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, 则 $x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = 9$.

12. AC 【解析】本题考查函数与方程以及切线的应用, 考查数形结合和化归与转化的数学思想.

如图所示, $y = |\ln(-x)|$ 与 $y = 2^x$ 的图象在 $(-\infty, 0)$ 上有两个交点, 所以 $\ln(-x_1) < -\ln(-x_2)$, 则 $\ln(x_1 x_2) < 0$, 则 $0 < x_1 x_2 < 1$, 故 A 正确; $y = |\sin x|$ 与 $y = kx$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有两个交点, 则 $x_1 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 且直线 $y = kx$ 与 $y = |\sin x|$ 在 $x = x_1$ 处相切, 所以 $-\sin x_1 = kx_1$, 两边求导得 $-\cos x_1 = k$, 将上述两式相除得 $\tan x_1 = x_1 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 故 C 正确.



13. 5 【解析】本题考查平面向量, 考查运算求解能力.

由 $a \perp b$, 得 $3m + 6 - 6m = 0$, 则 $m = 2$, $b = (2, -1)$, 所以 $b \cdot (a + b) = b^2 = 5$.

14. 答案不唯一 (例如: $f(x) = (x - 2)^2$) 【解析】本题考查函数的性质, 考查抽象概括能力.

由 ①②③ 可知, $f(x)$ 的图象关于 $(2, 0)$ 对称, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $f(x)$ 不是一次函数.

15. \sqrt{e} 【解析】本题考查导数的几何意义, 考查运算求解能力.

$$\text{由 } y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ 得 } \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} = \frac{\frac{\ln x_0}{x_0} + 2}{x_0}$$

所以 $1 - \ln x_0 = \ln x_0 + 2x_0$, 即 $1 - 2x_0 = 2 \ln x_0$, 所以 $x_0 e^{x_0} = \sqrt{e}$.

16. $12 - 3\sqrt{14}$ 【解析】本题考查函数的模型, 考查抽象概括能力.

设圆弧的半径为 $r (0 < r < \frac{3}{2})$, 根据题意可得 $DE = 3 - 2r$, $AF = BC = 3 - r$.

$$S = 3(3 - r) + (3 - 2r)r + \frac{\pi r^2}{2} = 9 - 2r^2 + \frac{\pi r^2}{2}$$

$$L = 3 + 2(3 - r) + 3 - 2r + \pi r = 12 - 4r + \pi r$$

$$\because \pi > 3, \therefore S = 9 - \frac{r^2}{2}, L = 12 - r, \therefore \frac{S}{L} = \frac{9 - \frac{r^2}{2}}{12 - r} = \frac{18 - \frac{r^2}{2}}{24 - 2r}$$

$$\text{令 } t = 24 - 2r (21 < t < 24), \text{ 则 } r = \frac{24 - t}{2}, \therefore \frac{S}{L} = \frac{18 - \frac{(24 - t)^2}{2}}{t} = \left(\frac{t}{4} + \frac{126}{t}\right) + 12$$

根据基本不等式, 得 $\frac{t}{4} + \frac{126}{t} \geq 2\sqrt{\frac{t}{4} \cdot \frac{126}{t}} = 3\sqrt{14}$, 当且仅当 $\frac{t}{4} = \frac{126}{t}$, 即 $t = 6\sqrt{14}$ 时, 取“=”.

$$6\sqrt{14} \in (21, 24), \therefore \text{当 } t = 6\sqrt{14} \text{ 时}, \left(\frac{S}{L}\right)_{\max} = 12 - 3\sqrt{14}$$

17. 解: (1) 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1$, 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $2S_n = 3^n - 1$,

所以 $2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = 3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$, 3 分

所以 $a_n = 3^{n-1} (n \geq 2)$, 4 分

又 $a_1 = 1$ 符合上式, 所以 $a_n = 3^{n-1}$, 5 分

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息.

所以 $c_1 + c_2 + \dots + c_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{(n-1) \cdot 3}{2} + \frac{3^n + n^2 - n - 1}{2}$ 10分

18. 解: (1) 命题“ $\exists t \in (0, \frac{1}{2}]$, $1+t+at < 0$ ”的否定为“ $\forall t \in (0, \frac{1}{2}]$, $1+t+at \geq 0$ ”, 且该命题的否定为真命题. 2分

不等式 $1+t+at \geq 0$ 恒成立, 转化为 $-a \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{t}$.

易知函数 $y = \frac{1}{t} + \frac{1}{t}$ 是 $(0, \frac{1}{2}]$ 上的减函数. 3分

因此 $y_{\min} = 6$ 4分

所以 $-a \leq 6$, 即 $a \geq -6$. 故集合 $A = \{a | a \geq -6\}$ 6分

(2) 集合 $B = \{a | a^2 - m - 1\}$, 由题可知集合 A 是集合 B 的真子集. 8分

即 $m - 1 < -6$ 10分

解得 $m < -2$, 所以 m 的取值范围是 $(-\infty, -2)$ 12分

19. (1) 证明: 在 $\triangle ABD$ 中, $\frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{BD}{\sin A}$ 2分

在 $\triangle CBD$ 中, $\frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{BD}{\sin C}$ 3分

因为 $AD \sin A = CD \sin C$, 所以 $\sin \angle ABD = \sin \angle CBD$, 即 BD 为 $\angle ABC$ 的角平分线. 5分

(2) 解: 连接 AC (图略), 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times (\frac{1}{2}) = 19$, 则 $AC = \sqrt{19}$ 6分

在 $\triangle BDC$ 中, 由余弦定理得 $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \cdot BD \cdot \cos \angle CBD = 21$,

所以 $DC = \sqrt{21}$ 8分

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \angle ABD = 7$,

所以 $AD = \sqrt{7}$ 10分

在 $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ADC = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD \cdot DC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\angle ADC = \frac{5\pi}{6}$ 12分

20. 解: (1) 令 $u = \sqrt{x^2 - ax - a}$, $y = a^x$, 结合单调性可知 $u = \sqrt{x^2 - ax - a}$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 且 $x^2 - ax - a \geq 0$ 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上恒成立. 2分

所以 $\begin{cases} \frac{a}{2} \geq \frac{1}{2}, \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ 解得 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 5分

$(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2})a - a \geq 0$,

(2) $f(2\sin^2 x) + f(\cos 2x) = a^{-\sin^2 x} + a^{\sin^2 x} = a^{-\cos^2 x} + a^{\cos^2 x}$ 6分

令 $t = a^{\sin^2 x}$, 则不等式化为 $t + \frac{1}{t} \geq 2$, 即 $a^{\sin^2 x} \geq t$ 8分

当 $a \in (0, 1)$ 时, $t \in [\frac{1}{a}, 1]$, 则 $a^{\sin^2 x} \geq \frac{1}{a} - 1$, 无解; 10分

当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $t \in [1, a]$, 则 $a^{\sin^2 x} \geq a - 1$, 则 $a > 1$.

综上, a 的取值范围为 $(1, +\infty)$ 12分

21. 解: (1) 抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 $(2, 0)$, 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(2, 0)$, 所以 $a = 2$ 2分

又因为双曲线 $2x^2 - 2y^2 = 1$ 的焦点为 $(\pm 1, 0)$, 所以 $c = 1$ 3分

则 $b = \sqrt{1 - 1} = 3$ 4分

因此椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 5分

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (微信号: bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

代入 $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$, 整理得 $3x^2 + 3mx + m^2 - 3 = 0$.

所以 $x_1 + x_2 = -m, x_1 x_2 = \frac{m^2 - 3}{3}$.

由 $\Delta = 36 - 3m^2 > 0$ 且 $m \neq 0$, 得 $2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$ 且 $m \neq 0$.

又 $|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\sqrt{36 - 3m^2}}{3} = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{12 - m^2}$ 9分

而点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{2|m|}{\sqrt{13}}$ 10分

则 $\triangle OAB$ 面积 $S = \frac{1}{2} \times \frac{2|m|}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} \times \sqrt{12 - m^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} (|m| \times \sqrt{12 - m^2}) \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{m^2 + 12 - m^2}{2} = \sqrt{3}$.

当且仅当 $m = \pm\sqrt{6}$ 时, 等号成立, 此时满足 $2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$ 且 $m \neq 0$.

所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$ 12分

22. (1) 解: $f'(x) = e^x - \cos x$, 则 $f'(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$ 2分

又 $f(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}}$ 3分

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 $y = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}(x - \frac{\pi}{2})$, 即 $x - e^{\frac{\pi}{2}}y + \frac{\pi}{2} + 1 = 0$ 5分

(2) 证明: 令 $g(x) = f'(x) = e^x - \cos x$, 则 $g'(x) = e^x + \sin x$.

当 $x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, $f(-\pi) = e^{-\pi} - 1 < 0$, $f(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ 上恰有 1 个零点. 7分

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$ 时, $g'(x) = e^x + \sin x$ 单调递增, $g'(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} - 1 < 0$, $g'(0) = 1 > 0$.

则存在 $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 使得 $g'(x_1) = 0$, 则 $f'(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, 0]$ 上单调递增, 又因为

$f'(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$, $f'(0) = 0$, 所以存在 $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, 使得 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, x)$ 上单调递增, 在 $(x, 0]$ 上单

调递减, 又 $f(-\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} > 0$, $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上恰有 1 个零点. 10分

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) = e^x - \cos x > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点.

综上, $f(x)$ 在 $(-\pi, +\infty)$ 上有且仅有 2 个零点. 12分