高一年级期末统一练习

数 学

参考答案及评分标准

2019．01

一. 选择题：本大题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分.

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	A	D	B	C	D	B	A	B

二. 填空题：本大题共6小题，每小题4分，共24分.

（9）2　（10）11；$\sqrt{61}$　（11）$\{1,2,3,4\}$（或 $\{1,2,4,5\}$ 或 $\{1,2,4\}$）

（12）$\{x\,|\,x<-1,\text{或}\,x>1\}$　（13）2；0　（14）$a<0$ 或 $a>2$；②③

注：两空的题，每空2分；（12）题对一半（只答出 $x<-1$，或 $x>1$），给2分；（14）题第一空，答对一半给1分，第二空，有错选，此空得0分，若只少选一个给1分。

三. 解答题：本大题共4小题，共44分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（15）（本小题满分 11 分）

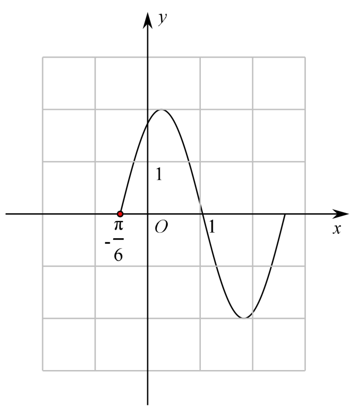
解：（Ⅰ）$T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.　……………………2 分

（Ⅱ）由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 得　……………………4 分

$-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{12}+k\pi$，　$k\in\mathbf{Z}$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是：$[-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{\pi}{12}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$.　……………………6 分

（Ⅲ）函数 $f(x)(x\in[-\dfrac{\pi}{6},-\dfrac{\pi}{6}+T])$ 的简图如图所示.　……………………8 分



函数 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2}{3}\pi]$ 上的取值范围是 $[-2,\sqrt{3}]$.　……………………11 分

注：$[-2,\sqrt{3}]$ 中每一个端点正确给 1 分，括号正确 1 分。

(16)(本小题满分 10 分)

解:(Ⅰ)因为 实数 x_0 使得 $f(2-x_0)=f(x_0)$,

所以 $(2-x_0)^2+b(2-x_0)+c=x_0^2+bx_0+c$, ……………………1 分

即 $(2b+4)(x_0-1)=0$.

因为 $x_0\neq 1$,

所以 $2b+4=0$,即 $b=-2$. ……………………3 分

经检验,$b=-2$ 满足题意,所以 $b=-2$.

(Ⅱ)函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,证明如下: ……………………4 分

任取 x_1,$x_2\in(1,+\infty)$,当 $x_1<x_2$ 时,$x_1-x_2<0$,$x_1+x_2-2>0$.

所以 $(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)<0$. ……………………6 分

所以 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-2x_1-(x_2^2-2x_2)$ ……………………7 分

$=x_1^2-x_2^2-(2x_1-2x_2)=(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. ……………………8 分

(Ⅲ)当 $c=0$ 时,$f(3^c)=f(2^c)$;

当 $c\neq 0$ 时,$f(3^c)>f(2^c)$. ……………………10 分

注:直接答 $f(3^c)\geq f(2^c)$,给 2 分;若只有 $f(3^c)>f(2^c)$,给 1 分。

(17)(本小题满分 11 分)

(Ⅰ)因为 $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AD}$,

所以 $\overrightarrow{DO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}$. ……………………1 分

因为 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BO}$,

所以 $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB}$ ……………………3 分

$=2\overrightarrow{BO}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

$=-\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$. ……………………5 分

(Ⅱ)因为 $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BO}$,

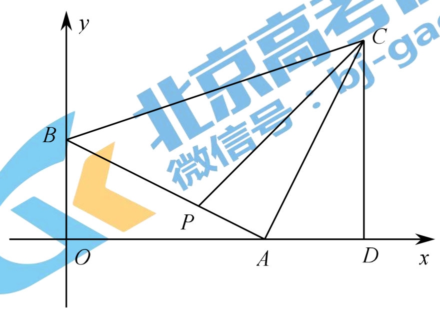
所以 $OB \parallel CD$. ························6 分

因为 $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AD}$，

所以 点 O, A, D 共线.

因为 $\angle D=90^\circ$，

所以 $\angle O=90^\circ$.



以 O 为坐标原点，OA 所在的直线为 x 轴，建立如图所示的平面直角坐标系.

因为 $|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{AD}|=1$，$\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AD}$，

所以 $A(2,0),\ B(0,1),\ C(3,2)$.

所以 $\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(-2,1)$. ························7 分

因为 点 P 在线段 AB 上，且 $AB=3AP$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$. ························8 分

所以 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3})$. ························9 分

因为 $\overrightarrow{CB}=(-3,-1)$，

所以 $\cos\angle PCB=\dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CP}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{5+\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ························11 分

（18）（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$(-\infty,+\infty)$ 不是函数 $y=3^x+1$ 的 $\mathscr{F}$ 区间，理由如下： ························1 分

因为 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$3^x>0$，

所以 $3^x+1>1$. ························2 分

所以 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 均有 $(3^{x_1}+1)+(3^{x_2}+1)>2$，

即不存在 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=2$.

所以 $(-\infty,+\infty)$ 不是函数 $y=3^x+1$ 的 $\mathscr{F}$ 区间. ························3 分

（Ⅱ）由 $[\frac{1}{2},2]$ 是函数 $y=\log_a x$（其中 $a>0, a\neq1$）的 $\mathscr{F}$ 区间，可知

存在 $x_1,x_2\in[\frac{1}{2},2]$，$x_1\neq x_2$，使得 $\log_a x_1+\log_a x_2=2$．

所以 $x_1x_2=a^2$． ……………………4 分

因为 $\begin{cases}\frac{1}{2}\le x_1\le 2,\\ \frac{1}{2}\le x_2\le 2,\\ x_1\neq x_2,\end{cases}$

所以 $\frac{1}{4}<x_1x_2<4$，即 $\frac{1}{4}<a^2<4$． ……………………5 分

又因为 $a>0$ 且 $a\neq 1$，

所以 $a\in(\frac{1}{2},1)\cup(1,2)$． ……………………6 分

（III）因为 $[\pi,2\pi]$ 是函数 $y=\cos\omega x$ 的 $\mathscr{F}$ 区间，

所以 存在 $x_1,x_2\in[\pi,2\pi]$，$x_1\neq x_2$，使得 $\cos\omega x_1+\cos\omega x_2=2$．

所以 $\begin{cases}\cos\omega x_1=1,\\ \cos\omega x_2=1.\end{cases}$ ……………………7 分

所以 存在 $k,l\in\mathbf{Z}$，使得 $\begin{cases}\omega x_1=2k\pi,\\ \omega x_2=2l\pi.\end{cases}$

不妨设 $\pi\le x_1<x_2\le 2\pi$．又因为 $\omega>0$，

所以 $\omega\pi\le\omega x_1<\omega x_2\le 2\omega\pi$．

所以 $\omega\le 2k<2l\le 2\omega$．

即在区间 $[\omega,2\omega]$ 内存在两个不同的偶数． ……………………8 分

①当 $\omega\ge 4$ 时，区间 $[\omega,2\omega]$ 的长度 $2\omega-\omega\ge 4$，

所以 区间 $[\omega,2\omega]$ 内必存在两个相邻的偶数，故 $\omega\ge 4$ 符合题意．

……………………9 分

②当 $0<\omega<4$ 时，有 $0<\omega\le 2k<2l\le 2\omega<8$，

所以 $2k,2l\in\{2,4,6\}$．

（i）当 $\begin{cases}2k=4,\\ 2l=6\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\omega\le 4,\\ 6\le 2\omega,\end{cases}$ 即 $3\le\omega\le 4$.

所以 $3\le\omega<4$ 也符合题意. ………………………10 分

（ii）当 $\begin{cases}2k=2,\\ 2l=4\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\omega\le 2,\\ 4\le 2\omega,\end{cases}$ 即 $\omega=2$.

所以 $\omega=2$ 符合题意.

（iii）当 $\begin{cases}2k=2,\\ 2l=6\end{cases}$ 时，有 $\begin{cases}\omega\le 2,\\ 6\le 2\omega,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\omega\le 2,\\ \omega\ge 3.\end{cases}$ 此式无解.

综上所述，ω 的取值范围是 $\{2\}\cup[3,+\infty)$. ………………………12 分

附加题

（Ⅰ）② ………………………2 分

（Ⅱ）$\cos 0.03x$ （答案不唯一） ………………………5 分

注：对于其它正确解法，相应给分.