2020年全国统一高考数学试卷（文科）（全国新课标III）

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{1,2,3,5,7,11\}$，集合 $B=\{x|3<x<15\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【答案】：B

【解析】：根据交集的定义 $A\cap B=\{5,7,11\}$ 选择 B

2. 若 $\bar{z}(1+i)=1-i$，则 $z=$

A．$1-i$　　B．$1+i$　　C．$-i$　　D．i

【答案】： D

【解析】：$\bar{z}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{-2i}{2}=-i$ 互为共轭复数，实部相同，虚部相反数。所以 $\bar{z}=i$

3. 设一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差为0.01，则数据 $10x_1,10x_2,\cdots,10x_n$ 的方差为

A．0.01　　B．0.1　　C．1　　D．10

【答案】C

【解析】：由方差计算公式：$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差为 s^2，则 $ax_1,ax_2,\cdots ax_n$ 的方差为 a^2s^2，所以 $s^2=0.01$，则所求为 $100s^2=1$

4. *Logistic* 模型是常用数学模型之一，可应用与流行病学领域，由学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$（t 的单位：天）的 *Logistic* 模型：$I(t)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$，其中 K 为最大确诊病例数，当 $I(t^*)=0.95K$，标志着已初步遏制疫情，则 t^* 约为 $(\ln 19\approx 3)$

A．60　　B．63　　C．66　　D．69

【答案】C

【解析】：$I(t^*)=\frac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}=0.95K$，所以 $e^{-0.23(t-53)}=\frac{1}{19}$，所以 $-0.23(t-53)=\ln\frac{1}{19}=-\ln 19$，解得 $t=53+\frac{3}{0.23}\approx 66$

5. 已知$\sin\theta+\sin(\theta+\frac{\pi}{3})=1$，则$\sin(\theta+\frac{\pi}{6})=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【解析】：根据两角和的正弦公式展开

$$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$$

所以$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. 在平面内，A，B是两个定点，C是动点，若$\dot{AC}\cdot\dot{BC}=1$，则C的轨迹为

A. 圆　　B. 椭圆　　C. 抛物线　　D. 直线

【答案】A

【解析】：以AB所在直线为x轴，中垂线为y轴，建立平面直角坐标系，设$A(-a,0)$，$B(a,0)$，$C(x,y)$，则$\dot{AC}=(x+a,y)$，$BC=(x-a,y)$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=x^2+y^2-a^2=1$，所以$x^2+y^2=a^2+1$，则轨迹为圆.

7. 设O为坐标原点，直线$x=2$与抛物线$y^2=2px(p>0)$交于D、E两点，若$OD\perp OE$，则C的焦点坐标为

A. $(\frac{1}{4},0)$　　B. $(\frac{1}{2},0)$　　C. $(1,0)$　　D. $(2,0)$

【答案】：B

【解析】：根据题意，设点$D(2,2\sqrt{p})$，$E(2,-2\sqrt{p})$，$DE=4\sqrt{p}$，$OD=OE=\sqrt{4+4p}$，由$OD^2+OE^2=DE^2$，可得$p=1$，抛物线的方程为$y^2=2x$，故选B.

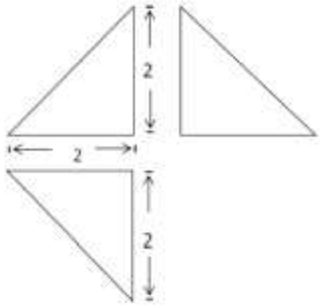
8. 点$(0,1)$到直线$y=k(x+1)$距离的最大值为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【答案】：B

【解析】：由直线$y=k(x+1)$过定点$(-1,0)$，要使距离最大，则当过$(0,1)$的直线与$y=k(x+1)$平行时可得，故最大距离为$(0,1)$和$(-1,0)$两点之间的距离，故选B.

9. 右图为某几何体的三视图，则该几何体的表面积是



A．$6+4\sqrt{2}$　　　　B．$4+4\sqrt{2}$　　　　C．$6+2\sqrt{3}$　　　　D．$4+2\sqrt{3}$

【答案】：C

【解析】：由三视图可知，该几何体为正方体变化而得，故表面积为三个相等的两直角边为 2 的直角三角形和一个边长为 $2\sqrt{2}$ 的等边三角形的面积之和。故选 C

10．设 $a=\log_3 2$，$b=\log_5 3$，$c=\frac{2}{3}$，则

A．$a<c<b$　　　　B．$a<b<c$　　　　C．$b<c<a$　　　　D．$c<a<b$

【答案】：A

【解析】：$\because c=\frac{2}{3}\log_3 3=\log_3\sqrt[3]{9}$，$a=\log_3 2=\log_3\sqrt[3]{8}$，$\therefore a<c$

$\because c=\frac{2}{3}\log_5 5=\log_5\sqrt[3]{25}$，$b=\log_5 3=\log_5\sqrt[3]{27}$，$\therefore c<b$

故选 A.

11．在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\frac{2}{3}$，$AC=4$，$BC=3$，则 $\tan B=$

A．$\sqrt{5}$　　　　B．$2\sqrt{5}$　　　　C．$4\sqrt{5}$　　　　D．$8\sqrt{5}$

【答案】：C

【解析】：法一：由余弦定理 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos C=9$，即 $AB=3$，再使用余弦定理的推论知 $\cos B=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{1}{9}$，又因为 $B\in(0,\pi)$，所以

$\tan B=\frac{\sqrt{1-\cos^2 B}}{\cos B}=4\sqrt{5}$.

法二：作 B 在 AC 上的射影 H，$HC=BC\cos C=2$，$HB=\sqrt{BC^2-HC^2}=\sqrt{5}$，$AH=AC-HC=2=HC$，所以 ΔABC 是以 B 为顶点的等腰三角形，$\tan\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\tan B=\frac{2\tan\frac{B}{2}}{1-\tan^2\frac{B}{2}}=4\sqrt{5}$.

12．已知函数 $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$，则

A. $f(x)$ 的最小值为 2

B. $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\pi$ 对称

D. $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

【答案】: D

【解析】: A. 由于 $f(-\dfrac{\pi}{2})=-2$，A 错误.

B. $f(x)=f(-x)$ 显然不成立，B 错误.

C. $f(\pi-x)=f(\pi+x)$ 显然不成立，C 错误.

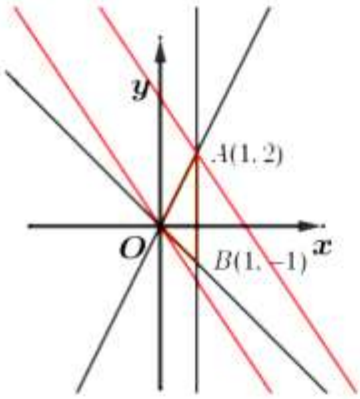
D. 容易验证 $f(\dfrac{\pi}{2}-x)=f(\dfrac{\pi}{2}+x)$ 在定义域上恒成立，D 正确.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\geq 0, \\ 2x-y\geq 0, \\ x\leq 1, \end{cases}$ 则 $z=3x+4y$ 的最大值为________.

【答案】11

【解析】解析：如图所示，当经过 $A(1,2)$ 时，$z_{\max}=3\times 1+4\times 2=11$



14．设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线为 $y=\sqrt{2}x$，则 C 的离心率为________.

【答案】$\sqrt{3}$.

【解析】由题意得 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{2}$，从而 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+(\dfrac{b}{a})^2}=\sqrt{3}$

15. 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x+a}$，若 $f'(1)=\dfrac{e}{4}$，则 $a=$________.

【答案】1

【解析】$f'(x)=\dfrac{e^x(x+a-1)}{(x+a)^2}$，$f'(1)=\dfrac{ae}{(1+a)^2}=\dfrac{e}{4}$，解得$a=1$.

16. 已知圆锥的底面半径为1，母线长为3，则该圆锥内半径最大的球的体积________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

【解析】该圆锥轴截面为底边长为2，腰为3的等腰三角形，其内切圆为该球的大圆，该三角形的周长为8，面积为$2\sqrt{2}$，由于三角形面积S，周长C和内切圆半径R的关系为$S=\dfrac{CR}{2}$，所以$R=\dfrac{2S}{C}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故该球的体积$\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi\cdot(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^3=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题．考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

设等比数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=4,a_3-a_1=8$

（1）求$\{a_n\}$的通项公式;

（2）记S_n为数列$\{\log_3 a_n\}$的前n项和．若$S_m+S_{m+1}=S_{m+3}$，求m.

【答案】: (1) $a_n=3^{n-1}$；(2) $m=6$

【解析】:（1）设公比为q，则由$\begin{cases}a_1+a_1q=4\\a_1q^2-a_1=8\end{cases}$ 得$a_1=1$，$q=3$

所以$a_n=3^{n-1}$

（2）由（1）有 $\log_3 a_n=n-1$，是一个以0为首项，1为公差的等差数列，

所以 $S_n=\dfrac{n(n-1)}{2}$ ，

所以$\dfrac{m(m-1)}{2}+\dfrac{(m+1)m}{2}=\dfrac{(m+3)(m+2)}{2}$

解得：$m=6$ 或 $m=-1$（舍去）

所以$m=6$

18.（12分）

某兴趣小组随机调查了某市100天中每天的空气质量等级和当天到某公园锻炼的人次，整理数据得到下表（单位：天）

空气质量等级 \ 锻炼人次	[0,200]	(200，400]	(400，600]
1（优）	2	16	25
2（良）	5	10	12
3（轻度污染）	6	7	8
4（中度污染）	7	2	0

（1）分别估计该市一天的空气质量等级为 1,2,3,4 的概率；

（2）求一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值（同一组数据用该组区间的中点值为代表）；

（3）若某天的空气质量等级为 1 或 2，则称这天“空气质量好”；若某天的空气质量等级为 3 或 4，则称这天“空气质量不好”.根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表，判断是否有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

	人次≤400	人次>400
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

【答案】：(1) $P_1=\dfrac{43}{100}$, $P_2=\dfrac{27}{100}$, $P_3=\dfrac{21}{100}$, $P_4=\dfrac{9}{100}$

（2）350

（3）有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关

【解析】：（1）$P_1=\dfrac{2+16+25}{100}=\dfrac{43}{100}$, $P_2=\dfrac{5+10+12}{100}=\dfrac{27}{100}$,

$P_3=\dfrac{6+7+8}{100}=\dfrac{21}{100}$, $P_4=\dfrac{7+2+0}{100}=\dfrac{9}{100}$

（2）$\bar{x}=\dfrac{(2+5+6+7)\times100+(16+10+7+2)\times300+(25+12+8)\times500}{100}=350$

(3) 2×2 列联表

	人次≤400	人次>400	合计
空气质量好	33	37	70
空气质量不好	22	8	30

合计	55	45	100

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100(33\times8-37\times22)^2}{70\times30\times55\times45}=\frac{1100}{189}\approx5.82$$

$\because 5.82>3.841$

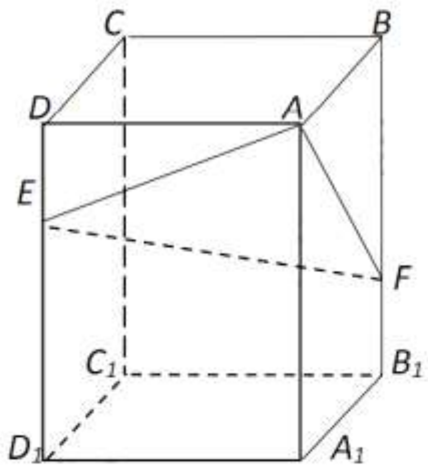
$\therefore$有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关

19.（12 分）

如图，长方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F 分别在棱 DD_1，BB_1 上，且 $2DE=ED_1$，$BF=2FB_1$，证明：

（1）当 $AB=BC$ 时，$EF\perp AC$；

（2）点 C_1 在平面 AEF 内.



【解答】:（1）因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，所以 $BB_1\perp$平面 $ABCD$，而 $AC\subseteq$平面 $ABCD$，所以 $AC\perp BB_1$.

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，且 $AB=BC$，所以 $ABCD$ 正方形，

所以 $AC\perp BD$，又 $BD\cap BB_1=B$，

所以 $AC\perp$平面 BB_1D_1D，又点 E，F 分别在棱 DD_1，BB_1 上，所以 $EF\subseteq$平面 BB_1D_1D，

所以 $EF\perp AC$.

（2）取 AA_1 靠近 A_1 的三等分点 M，连结 DM，C_1F，MF.

因为 E 在 DD_1，且 $2DE=ED_1$，所以 $ED//AM$，且 $ED=AM$，

所以四边形 $AEDM$ 为平行四边形，所以 $DM//AE$，且 $DM=AE$，

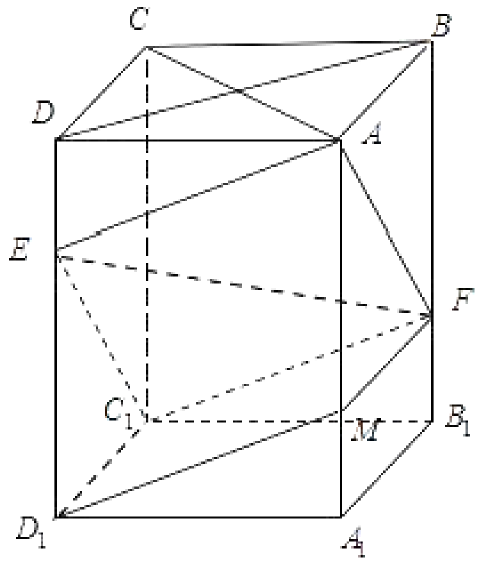
又 F 在 BB_1 上，且 $BF=2FB_1$，所以 $DF//A_1B_1$，且 $DF=A_1B_1$，

从而 $DF//D_1C_1$，$DF=D_1C_1$，所以 D_1DFC_1 为平行四边形，

所以 $DM//C_1F$，

所以 $AE//C_1F$，所以 A,E,F,C_1 四点共面.

所以点 C_1 在平面 AEF 内.



20.(12 分)

已知函数 $f\left(x\right)=x^3-kx+k^2$.

(1)讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性;

(2)若 $f\left(x\right)$ 有三个零点，求 k 的取值范围.

【解答】:解:(1)由题意可得，定义域为 R

$f'\left(x\right)=3x^2-k$

①当 $k\le 0$ 时，$f'\left(x\right)>0$，函数 $f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增

②当 $k>0$ 时，$f'\left(x\right)=3x^2-k$

$f'\left(x\right)>0\Rightarrow x<-\sqrt{\frac{k}{3}}$ 或 $x>\sqrt{\frac{k}{3}}$

$f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ 单调递增

或 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{k}{3}},+\infty\right)$ 单调递增

$f'\left(x\right)<0\ \Rightarrow -\sqrt{\frac{k}{3}}<x<\sqrt{\frac{k}{3}}$

函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ 上单调递减

(2) $f\left(x\right)=x^3-kx+k^2$ 由(1)可知，$k\le 0$ 时(舍去)

$k>0$，由题易得$k>0$且 $f\left(-\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)>0$，$f\left(\sqrt{\dfrac{k}{3}}\right)<0$，解之得$0<k<\dfrac{4}{27}$

21.(12 分)

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{m^2}=1(0<m<5)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$A$，$B$分别为$C$的左、右顶点.

（1）求C的方程；

（2）若点P在C上，点Q在直线$x=6$上，且$|BP|=|BQ|$，$BP\perp BQ$，求$\triangle APQ$的面积.

【答案】（1）$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{16y^2}{25}=1(0<m<5)$（2）$\dfrac{5}{2}$.

【解析】（1）设$a=4t$，$c=\sqrt{15}t$，则$b=m=t$，所以$m=t$，

又$a=4t=5$，解得$t=\dfrac{5}{4}$，所以$m=\dfrac{5}{4}$，所以C的方程为$C:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{16y^2}{25}=1(0<m<5)$.

（2）解法一：如图

设点$Q(6,t)$，$P(m,n)$，又$A(-5,0)$，$B(5,0)$，

则$\overrightarrow{BP}=(m-5,n)$，$\overrightarrow{BQ}=(1,t)$，

所以$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{BQ}=0$，得$m-5+nt=0$，

过P作$PK\perp x$轴，所以$\angle 1+\angle 2=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle 1+\angle 3=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\angle 2=\angle 3$，$\angle 4=\angle 1$，

所以$\triangle PKB\cong\triangle BQA$，

得$KB=QG$，$PK=BG=1$，即$y=1$，

所以$P(m,1)$，得$m-5+t=0$，

代入椭圆方程$\dfrac{m^2}{25}+\dfrac{16}{25}=1$，

解得$m=\pm 3$，

所以$P(3,1)$或$P(-3,1)$；$Q(6,2)$或$Q(6,8)$，

当$P(3,1)$，$Q(6,2)$时，$|AQ|=\sqrt{125}$，

直线AQ的方程为：$2x-11y+10=0$，$P(3,1)$到直线AQ的距离为$d=\dfrac{5}{\sqrt{125}}$，

所以$S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{2}|AQ|d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{125}\times\dfrac{5}{\sqrt{125}}=\dfrac{5}{2}$，

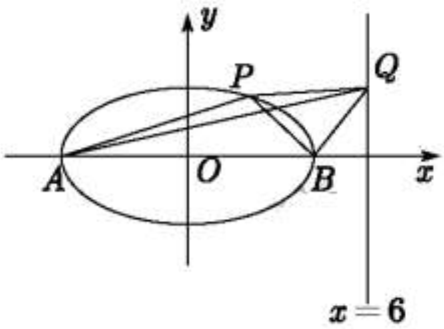
当$P(-3,1)$，$Q(6,8)$时，$|AQ|=\sqrt{185}$，

直线AQ的方程为：$8x-11y+40=0$，$P(-3,1)$到直线AQ的距离为$d=\dfrac{5}{\sqrt{185}}$，

所以$S_{\triangle APQ}=\dfrac{1}{2}|AQ|d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{185}\times\dfrac{5}{\sqrt{185}}=\dfrac{5}{2}$，

综上$\triangle APQ$的面积为$\dfrac{5}{2}$.

解法二：如图



设点$Q(6,t)$，$P(m,n)$，又$A(-5,0)$，$B(5,0)$，

所以$k_{PB}k_{BQ}=-1$，得$t\cdot\dfrac{n}{m-5}=-1$，①

由$|BP|=|BQ|$，得$(m-5)^2+n^2=t^2+1$，　②

由①得，$t=\dfrac{5-m}{n}$代入②得$(m-5)^2+n^2=\left(\dfrac{5-m}{n}\right)^2+1$，

$(m-5)^2n^2+n^4=(5-m)^2+n^2$整理得，

$(m-5)^2(n^2-1)=n^2(1-n^2)$，

即$n=1$，

得$m+t-5=0$，

以下解法同法一得到$P(3,1)$，$Q(6,2)$或$P(-3,1)$，$Q(6,8)$.

当$P(3,1)$，$Q(6,2)$，$A(-5,0)$时，

所以$\overrightarrow{AP}=(8,1)$，$\overrightarrow{AQ}=(11,2)$，

所$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{5}{2}$，

当$P(-3,1)$，$Q(6,8)$，$A(-5,0)$时，

所以$\vec{AP}=(2,1)$，$\vec{AQ}=(11,8)$，

所$S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|=\frac{5}{2}$，

综上$\triangle APQ$的面积为$\frac{5}{2}$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2-t-t^2\\ y=2-3t+t^2\end{cases}$，（$t$为参数且$t\neq 1$），$C$与坐标轴交于$A$，$B$两点.

（1）求$|AB|$；

（2）以坐标原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求直线AB的极坐标方程.

【答案】：（1）$4\sqrt{10}$；（2）$3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0$.

【解析】：（1）当$x=0$时，求得$t=-2$或$t=1$（舍）代入$y=2-3t+t^2$中，求得$y=12$；当$y=0$时，求得$t=2$或$t=1$（舍）代入$x=2-t-t^2$中，求得$x=-4$，所以曲线与坐标轴交于（0,12）和（-4,0），故$|AB|=\sqrt{(-4)^2+12^2}=4\sqrt{10}$.

（2）由（1）得直线AB过点（0,12）和（-4,0），所以直线AB的解析式为$3x-y+12=0$，

故直线AB的极坐标方程为$3\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+12=0$.

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

设$a,b,c\in R$，$a+b+c=0$，$abc=1$.

（1）证明：$ab+bc+ca<0$；

（2）用$\max\{a,b,c\}$表示a,b,c的最大值，证明：$\max\{a,b,c\}\geq\sqrt[3]{4}$.

【答案】:（1）略；（2）略.

【解析】:（1）证明：$\because a+b+c=0,\therefore (a+b+c)^2=0.$

$\therefore a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2ca=0,$ 即 $2ab+2bc+2ca=-(a^2+b^2+c^2)$

$\therefore 2ab+2bc+2ca<0,\therefore ab+bc+ca<0.$

证明：不妨设 $a\le b<0<c<\sqrt[3]{4}$，则 $ab=\frac{1}{c}>\frac{1}{\sqrt[3]{4}},-a-b=c>\sqrt[3]{4},$ 而

$\sqrt[3]{4}>-a-b\ge 2\sqrt{ab}>\frac{2}{\sqrt[6]{4}}=2^{1-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4}$ 矛盾，所以命题得证.

【小结】:（1）根据题设条件 $a+b+c=0,$ 两边平方，再利用均值不等式证明即可.

（2）假设出 a,b,c 中最大值，根据反证法与基本不等式推出矛盾，即可得出结论.