

2019 北京交大附中高二（下）期末

数 学

2019.07

命题人：张红敏

审题人：牟柏林

说明：本试卷共 4 页，共 150 分。 考试时长 120 分钟。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

- 命题：“ $\forall x > 0, x^2 + x \geq 0$ ”的否定形式是（ ）
 - $\forall x \leq 0, x^2 + x > 0$
 - $\forall x > 0, x^2 + x \leq 0$
 - $\exists x_0 > 0, x_0^2 + x_0 < 0$
 - $\exists x_0 \leq 0, x_0^2 + x_0 > 0$
- 集合 $A = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\}$ ， $B = \{x \in \mathbf{R} | x^2 \leq 1\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）
 - $(0, 1)$
 - $(0, 1]$
 - $[-1, 1]$
 - $[-1, +\infty)$
- 设 $a \in \mathbf{R}$ ，则“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的（ ）
 - 必要但不充分条件
 - 充分但不必要条件
 - 充要条件
 - 既不充分也不必要条件
- 在下列函数中，是偶函数，且在 $(0, +\infty)$ 内单调递增的是（ ）
 - $y = 2^{|x|}$
 - $y = \frac{1}{x^2}$
 - $y = |\lg x|$
 - $y = \cos x$
- 函数 $f(x) = \log_3 x + x - 3$ 的零点所在的区间是（ ）
 - $(0, 1)$
 - $(1, 2)$
 - $(2, 3)$
 - $(3, +\infty)$
- $x \left(2 - \frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式中的常数项为（ ）
 - 64
 - 32
 - 32
 - 64
- 一袋中有 5 个白球，3 个红球，现从袋中往外取球，每次任取一个记下颜色后放回，直到红球出现 4 次时停止，设停止时共取了 X 次球，则 $P(X=6)$ 等于（ ）
 - $C_6^4 \left(\frac{3}{8}\right)^6 \left(\frac{5}{8}\right)^2$
 - $C_6^3 \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{5}{8}\right)^2$
 - $C_5^3 \left(\frac{3}{8}\right)^3 \left(\frac{5}{8}\right)^2$
 - $C_5^3 \left(\frac{3}{8}\right)^4 \left(\frac{5}{8}\right)^2$
- 设函数 $f(x), g(x)$ 满足下列条件：
 - 对任意实数 x_1, x_2 都有 $f(x_1) \cdot f(x_2) + g(x_1) \cdot g(x_2) = g(x_1 - x_2)$ ；
 - $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$.
 下列四个命题：
 - $g(0) = 1$;
 - $g(2) = 1$;
 - $f^2(x) + g^2(x) = 1$;
 - 当 $n > 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时， $[f(x)]^n + [g(x)]^n$ 的最大值为 1.

其中所有正确命题的序号是（ ）

A. ①③

B. ②④

C. ②③④

D. ①③④

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分，把答案填在题中横线上）

9. 复数 $\frac{1+i}{i}$ 的共轭复数是_____.

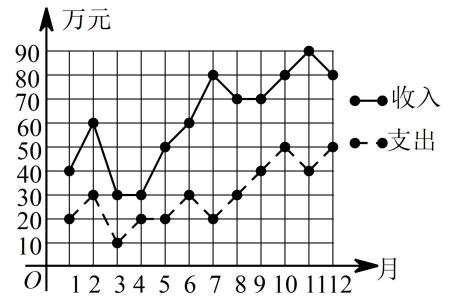
10. 设 $(1+x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_6x^6$, 其中 $x, a_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \dots, 6$.
则 $a_1 + a_3 + a_5 =$ _____.

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 1 \\ \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(x) = 3$, 则

$x =$ _____.

12. 某工厂一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示，
(注：结余 = 收入 - 支出)

- ①. 收入最高值与收入最低值的比是 3 : 1
- ②. 结余最高的月份是 7 月份
- ③. 1 至 2 月份的收入的变化率与 4 至 5 月份的收入的变化率相同
- ④. 前 6 个月的平均收入为 40 万元



上面说法中**错误**说法的序号是_____.

13. 甲、乙、丙三人进行传球练习，球首先从甲手中传出，则第 3 次球恰好传回给甲的概率是_____.

14. 将集合 $M = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ 表示为它的 5 个三元子集（三元集：含三个元素的集合）的并集，并且每个三元子集的元素之和都相等，则每个三元集的元素之和为_____；请写出满足上述条件的集合 M 的 5 个三元子集_____。（只写出一组）

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

15. （本小题 12 分）

某商店为了吸引顾客，设计了一个摸球小游戏，顾客从装有 1 个红球，1 个白球，3 个黑球的袋中一次随机地摸 2 个球，这些球除了颜色外完全相同，设计奖励方式如下表：

结果	奖励
1 红 1 白	10 元
1 红 1 黑	5 元
2 黑	2 元
1 白 1 黑	不获奖

- (I) 某顾客在一次摸球中获得奖励 X 元，求 X 的概率分布列与数学期望；
- (II) 某顾客参与两次摸球，求他至少有一次中奖的概率.

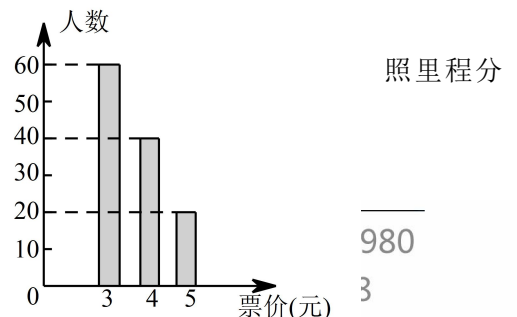
16. （本小题 12 分）

已知函数 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$

- (I) 求 $y = f(x)$ 在 \mathbf{R} 上的单调区间；
- (II) 求 $y = f(x)$ 在 $[-3, 1]$ 上的最大值.

17. （本小题 14 分）

2014 年 12 月 28 日开始，北京市公共电汽车和地铁按段计价。具体如下表。（不考虑公交卡折扣情况）



乘公共电汽车方案	10公里(含)内2元; 10公里以上部分, 每增加1元可乘坐5公里(含)
乘坐地铁方案(不含机场线)	6公里(含)内3元; 6公里至12公里(含)4元; 12公里至22公里(含)5元; 22公里至32公里(含)6元; 32公里以上部分, 每增加1元可乘坐20公里(含).

已知在北京地铁四号线上, 任意一站到陶然亭站的票价不超过 5 元, 现从那些只乘坐四号线地铁, 且在陶然亭站出站的乘客中随机选出 120 人. 他们乘坐地铁的票价统计如图所示.

- (I) 如果从那些只乘坐四号线地铁, 且在陶然亭站出站的乘客中任选 1 人. 试估计此人乘坐地铁的票价小于 5 元的概率;
- (II) 从那些只乘坐四号线地铁. 且在陶然亭站出站的乘客中随机选 2 人, 记 X 为这 2 人乘坐地铁的票价和, 根据统计图, 并以频率作为概率. 求 X 的分布列和数学期望;
- (III) 小李乘坐地铁从 A 地到陶然亭的票价是 5 元, 返程时, 小李乘坐某路公共电汽车所花交通费也是 5 元, 假设小李往返过程中乘坐地铁和公共电汽车的路程均为 s 公里, 试写出 s 的取值范围. (只需写出结论)

18. (本小题 14 分)

已知抛物线 $G: y^2 = 2px (p > 0)$ 过点 $M(1, -2)$, A, B 是抛物线 G 上异于点 M 的不同两点, 且以线段 AB 为直径的圆恒过点 M .

- (I) 当点 A 与坐标原点 O 重合时, 求直线 MB 的方程;
- (II) 求证: 直线 AB 恒过定点, 并求出这个定点的坐标.

19. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ax$.

- (I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $y = ax + 2$ 平行, 求实数 a 的值.
- (II) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (III) 当 $0 < a < 1$ 时, 证明: 曲线 $y = f(x)$ 在直线 $y = (e - 1)x$ 的上方.

20. (本小题 14 分)

已知 x 为实数, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 例如 $[1.2] = 1, [-1.2] = -2, [1] = 1$.

对于函数 $f(x)$, 若存在 $m \in \mathbf{R}$ 且 $m \notin \mathbf{Z}$, 使得 $f(m) = f([m])$, 则称函数 $f(x)$ 是 Ω 函数.

- (I) 判断函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x, g(x) = \sin \pi x$ 是否是 Ω 函数; (只需写出结论)
- (II) 设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的周期函数, 其最小正周期为 T , 若 $f(x)$ 不是 Ω 函数, 求 T 的最小值;
- (III) 若函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 是 Ω 函数, 求 a 的取值范围.