巴蜀中学 2024 届高考适应性月考卷（三）

数学参考答案

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	D	D	A	B	A	B	C

【解析】

1．由题意设 $a=4m+1$，$b=4n+2$，其中 m，n 都是整数，则 $a+b=4(m+n)+3$，其中 $m+n$ 是整数，可以是奇数也可以是偶数，故 $a+b\in D$，故选D.

2．设 $7a-5b=m(a-b)+n(a+b)=(m+n)a-(m-n)b$，所以 $\begin{cases}m+n=7,\\m-n=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=6,\\n=1,\end{cases}$ 所以 $7a-5b=6(a-b)+(a+b)$；又 $a-b\in[5,27]$，$a+b\in[6,30]$，所以 $7a-5b=6(a-b)+(a+b)\in[36,192]$，故选 D.

3．$\because a^0=1$，$\therefore f(x)=a^{x-1}-2$ 且 $a\neq1$，恒过定点 $(1,-1)$，$\therefore m=1$，$n=-1$，$\therefore g(x)=1+\dfrac{1}{x}$，其图象不经过第四象限，故选 D.

4．因为 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，所以 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\therefore|\vec{a}|^2-\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|=0$，$|\vec{a}|=\dfrac{1}{2}|\vec{b}|$，所以 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{b}|}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{4}\vec{b}$，故选 A.

5．不妨设 $A(-3,0)$，$B(0,6)$，由 $|AB|=3\sqrt{5}$，$(S_{\triangle AMB})_{\min}=\dfrac{15}{2}$，知 $(d_{M\to l})_{\min}=\sqrt{5}$．设 $M\left(\dfrac{y_0^2}{2p},y_0\right)$，则 $d_{M\to l}=\dfrac{\left|\dfrac{y_0^2}{p}-y_0+6\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\left|\dfrac{1}{p}\left(y_0-\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p}{4}+6\right|}{\sqrt{5}}$，故 $(d_{M\to l})_{\min}=\dfrac{6-\dfrac{p}{4}}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，故 $p=4$，故选 B.

6．$T_{r+1}=C_8^r\cdot(\sqrt{x})^{8-r}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=C_8^r\cdot x^{4-\frac{3r}{2}}$，其中 $0\leqslant r\leqslant8$，$r\in\mathbf{N}$，当 $r=0$，2，4，6，8 时为有理项，故有 5 项有理项，4 项无理项，故 $p=\dfrac{A_5^5\cdot A_5^5}{A_9^9}$，$q=\dfrac{A_4^4\cdot A_5^5}{A_9^9}$，故 $\dfrac{p}{q}=\dfrac{A_5^5\cdot A_5^5}{A_4^4\cdot A_5^5}=5$，故选 A.

7．由题意知 S_5 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和中的最小值，必有 $a_1<0$，公差 $d>0$，若 $a_5=0$，

此时 $S_4=S_5$，S_4，S_5 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和中的最小值，此时 $a_5=a_1+4d=0$，即 $a_1=-4d$，则 $\frac{a_8}{a_6}=\frac{a_1+7d}{a_1+5d}=\frac{3d}{d}=3$；若 $a_5<0$，$a_6>0$，此时 S_5 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和中的最小值，此时 $a_5=a_1+4d<0$，$a_6=a_1+5d>0$，即 $-5<\frac{a_1}{d}<-4$，则 $\frac{a_8}{a_6}=\frac{a_1+7d}{a_1+5d}=\frac{\frac{a_1}{d}+7}{\frac{a_1}{d}+5}=1+\frac{2}{\frac{a_1}{d}+5}\in(3,+\infty)$，综合可得：$\frac{a_8}{a_6}$ 的取值范围是 $[3,+\infty)$，故选 B.

8．由 $(x+1)[2f(x)+xf'(x)]>xf(x)$，可得 $2xf(x)+x^2f'(x)>\frac{x^2f(x)}{x+1}$，即 $(x^2f(x))'>\frac{x^2f(x)}{x+1}$，令 $g(x)=x^2f(x)$，则 $0>\frac{g(x)}{x+1}-g'(x)=\frac{g(x)-g'(x)(x+1)}{x+1}$．令 $G(x)=\frac{g(x)}{x+1}$，$G'(x)=\left(\frac{g(x)}{x+1}\right)'=\frac{g'(x)(x+1)-g(x)}{(x+1)^2}>0$，所以 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增．不等式 $f(x+4)<\frac{3x+15}{(x+4)^2}$，等价于 $\frac{(x+4)^2f(x+4)}{x+5}<3$，即 $G(x+4)=\frac{g(x+4)}{x+5}<3$，$G(6)=\frac{g(6)}{7}=\frac{36f(6)}{7}=3$，所求不等式即 $G(x+4)<G(6)$．由于 $G(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数，所以 $x+4<6$，解得 $x<2$，且 $x+4>0$，即 $x>-4$，故不等式的解集为 $(-4,2)$，故选 C.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	ABD	ACD	BC	BC

【解析】

9. 函数 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 3x$，A 选项，将 $y=\cos x$ 的图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$ 得 $y=\cos 3x$，再将图象关于 x 轴翻折得到 $y=-\cos 3x$ 的图象；B 选项，将 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$，得 $y=\sin 3x$，再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得 $y=\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象；C 选项，将 $y=\sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

得 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再将各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$ 得 $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；D 选项，将 $y=\cos x$ 的图象左平移 π 个单位长度得 $y=-\cos x$，再将各点的横坐标缩小为原来的 $\frac{1}{3}$ 得 $y=-\cos 3x$ 的图象，故选 ABD.

10．$\because \vec{m}=\left(2,\ \frac{1}{a}\right)$，$\vec{n}=\left(\frac{1}{b},\ 4\right)$，$\therefore \vec{m}\cdot\vec{n}=\frac{4}{a}+\frac{2}{b}$．对 A：若 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 可以作为平面向量的一组基底，则 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 不平行，故 $\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}-2\times4\neq0$，$ab\neq\frac{1}{8}$，故 $\log_2 ab\neq-3$，故 A 正确；对 B：若 $\vec{m}\perp\vec{n}$，则 $\vec{m}\cdot\vec{n}=\frac{4}{a}+\frac{2}{b}=\frac{4b+2a}{ab}=0$，故 $a+2b=0$，$2a+b$ 的值不确定，故 B 错误；对 C：若 $a+b=1$，则 $\vec{m}\cdot\vec{n}=\frac{4}{a}+\frac{2}{b}=(a+b)\left(\frac{4}{a}+\frac{2}{b}\right)=6+\frac{4b}{a}+\frac{2a}{b}\geqslant6+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}=6+4\sqrt{2}$，当且仅当 $\begin{cases}\frac{4b}{a}=\frac{2a}{b},\\ a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2-\sqrt{2},\\ b=\sqrt{2}-1\end{cases}$ 时取等号，故 C 正确；对 D：由 $|\vec{m}|=|\vec{n}|>4\sqrt{2}$，知 $4+\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+16>32$，故 $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=12$ 且 $\frac{1}{b^2}>16$，故 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}=\frac{12+\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b^2}}=1+\frac{12}{\frac{1}{b^2}}\in\left(1,\ \frac{7}{4}\right)$，故 $\frac{b}{a}\in\left(1,\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$，故 D 正确，故选 ACD.

11．$f'(x)=(\lambda+1)\sin x+x\cos x$，令 $f'(x)=0$，则 $(\lambda+1)\sin x=-x\cos x$，当 $\cos x=0$ 时，$\sin x=\pm1$，则 $(\lambda+1)\sin x=-x\cos x$ 无解，此时 $f(x)$ 无极值点；当 $\cos x\neq0$ 时，$\tan x=-\frac{1}{\lambda+1}x(\lambda>-1)$，数形结合知：$y=\tan x$ 与 $y=-\frac{1}{\lambda+1}x(\lambda>-1)$ 在 $x\in[-k\pi,\ k\pi](k\in\mathbf{N}_+)$ 上有 $n=2k+1$ 个交点，对应 $f(x)$ 在 $[-k\pi,\ k\pi](k\in\mathbf{N}_+)$ 上的极值点为 x_1，x_2，…，$x_{2k+1}(x_1<x_2<\cdots<x_{2k+1})$，且 $x_1+x_{2k+1}=x_2+x_{2k}=x_3+x_{2k-1}=\cdots=x_k+x_{k+2}=0$，$x_{k+1}=0$，故 A 错误，B 正确；当 $k=1$ 时，$n=3$，并且 $x_1+x_3=2x_2=0$，故 x_1，x_2，x_3 为等差数列，C 正确；当 $k=2$ 时，$n=5$，并且 $x_1+x_5=x_2+x_4=2x_3=0$，$x_1\in\left(-2\pi,\ -\frac{3}{2}\pi\right)$，$x_2\in\left(-\pi,\ -\frac{1}{2}\pi\right)$，故要使 x_1，x_2，…，x_5 为等差数列，只需 x_1，x_2，$x_3(=0)$ 为等差数列，即等价于 $x_1=2x_2$ 成立即可，故

$$\begin{cases}\tan x_1=-\dfrac{1}{\lambda+1}x_1\Rightarrow \tan 2x_2=-\dfrac{2}{\lambda+1}x_2,\\ \tan x_2=-\dfrac{1}{\lambda+1}x_2\end{cases}\Rightarrow \tan 2x_2=2\tan x_2$$，由二倍角公式：

$\tan 2x_2=\dfrac{2\tan x_2}{1-\tan^2 x_2}=2\tan x_2$，故 $\tan x_2=0\Rightarrow x_2\in\left(-\pi,-\dfrac{1}{2}\pi\right)$ 时无解，故当 $k=2$ 时，不存在 $\lambda>-1$ 使得 x_1，x_2，…，x_5 为等差数列，D 错误，故选 BC．

12．令 $f(x)=a^{|x|}-|\log_a|x||=0$，则 $a^{|x|}=|\log_a|x||$，$y=a^{|x|}$ 与 $y=|\log_a|x||$ 都是偶函数，故考虑 $x>0$ 时：$y=a^{|x|}=a^x$ 与 $y=|\log_a|x||=|\log_a x|$ 的图象的交点；当 $0<a<1$ 时，作出函数 $y=a^x$，$y=|\log_a x|$ 的图象易得：函数 $y=a^x$，$y=|\log_a x|$ 的图象有两个交点，所以当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)=a^x-|\log_a x|$ 的零点个数为 2；当 $a>1$ 时，作出函数 $y=a^x$，$y=|\log_a x|$ 的图象，此时两个函数图象的交点个数取决于方程 $a^x=\log_a x$ 的解的个数，$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的函数图象关于 $y=x$ 对称，故临界情况是 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 都与 $y=x$ 相切，此时有 $\begin{cases}a^x=x,\\ a^x\ln a=1\end{cases}\Rightarrow a=x^{\frac{1}{x}}\Rightarrow x\ln x^{\frac{1}{x}}=\ln x=1\Rightarrow\begin{cases}x=\mathrm{e},\\ a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},\end{cases}$ 故当 $x>0$ 时：$1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，函数 $y=a^x$，$y=|\log_a x|$ 的图象有 3 个交点，$a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，函数 $y=a^x$，$y=|\log_a x|$ 的图象有 2 个交点，$a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，函数 $y=a^x$，$y=|\log_a x|$ 的图象有 1 个交点． 综上所述：$a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象有 2 个零点；$0<a<1$ 或 $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象有 4 个零点；$1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象有 6 个零点，故选 BC．

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$\sqrt{14}$	$y=\pm\dfrac{1}{2}x$	$\log_4|x|$（答案不唯一）	$\left(\dfrac{7\sqrt{3}}{3},5\right)$

【解析】

13．∵a_2，a_{10} 是方程 $x^2-13x+14=0$ 的两个实数根，∴$a_2+a_{10}=13$，$a_2a_{10}=14$，故 $a_2>0$，$a_{10}>0$，根据等比数列的性质有：$a_6^2=a_2a_{10}=14$ 且 $a_6=a_2\cdot q^4>0$，故 $a_6=\sqrt{14}$.

14．直线 $y=x+c$ 过上焦点 $F_2(0,\ c)$ 且倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，由 $\overline{F_1F_2}+\overline{F_1B}=2\overline{F_1A}$，知 A 是 BF_2 的中点，

由 $F_2(0,\ c)$，$A(-c,\ 0)$，得 $B(-2c,\ -c)$，故双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$．

15．对数函数符合 $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=f(x_1)-f(x_2)$，结合 $f(x)$ 是偶函数：可令 $f(x)=\log_a|x|$，代入点 $\left(8,\ \frac{3}{2}\right)$，解得 $a=4$，故 $f(x)=\log_4|x|$．

16．三倍角公式：$\cos 3A=\cos(2A+A)=\cos 2A\cos A-\sin 2A\sin A=(2\cos^2 A-1)\cos A-2(1-\cos^2 A)\cos A=4\cos^3 A-3\cos A$，故 $\cos C+\cos 3A=0\Rightarrow \cos C=-\cos 3A=\cos(\pi-3A)\Rightarrow C=\pi-3A\Rightarrow B=2A$，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<2A<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-3A<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$，故 $\frac{\sqrt{3}}{3}<\tan A<1$，$4\tan A+\frac{1}{\tan(B-A)}=4\tan A+\frac{1}{\tan A}\in\left(\frac{7\sqrt{3}}{3},\ 5\right)$．

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（1）由频率分布直方图可知：分数低于 70 分的学生所占比例为 40%，分数低于 80 分的学生的所占比例为 70%，

所以该学校学生参与知识问答测试的得分的中位数在 $[70,\ 80)$ 内．……………………………………………………………（2 分）

由 $70+10\times\frac{0.50-0.40}{0.70-0.40}=\frac{220}{3}\approx 73.3$，

所以该学校学生参与知识问答测试的得分的中位数约为 73.3 分．

……………………………………………………………（5 分）

（2）根据按比例的分层抽样：抽取的“亚运迷”学生 3 人，“非亚运迷”学生 2 人，

ξ 的所有可能取值分别为 0，1，2，……………………………………（6 分）

$P(\xi=0)=\frac{C_3^0C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，$P(\xi=1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，$P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，

……………………………………………………………（9 分）

所以 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

所以数学期望 $E(\xi)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$. ……………………………（10 分）

18.（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $\tan\varphi=2\sqrt{3}$，知 $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$，$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{13}}$，

……………………………………………………………………………（1 分）

故 $f(x)=\cos\omega x\cdot(\cos\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x)-\sin^2\omega x=\cos^2\omega x-\sin^2\omega x+\sqrt{3}\sin 2\omega x$

$=\sqrt{3}\sin 2\omega x+\cos 2\omega x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x\right)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

……………………………………………………………………………（4 分）

所以 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$，

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. ……………………………………………（5 分）

（2）由 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\varphi\right]$，得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{3},2\varphi+\frac{\pi}{6}\right]$，$\tan\varphi=2\sqrt{3}\Rightarrow\varphi\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$

$2\varphi+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，

$y=2\sin x$ 在 $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，在 $x\in\left[\frac{\pi}{2},2\varphi+\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，……………………………………………………………………（7 分）

$2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，$2\sin\frac{\pi}{2}=2$，$2\sin\left(2\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2\varphi+\cos 2\varphi=\sqrt{3}\cdot\frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}+\frac{1-\tan^2\varphi}{1+\tan^2\varphi}$

$=\frac{1}{13}$，……………………………………………………………………（11 分）

所以函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{12},\varphi\right]$ 上的值域为 $\left[\frac{1}{13},2\right]$.

……………………………………………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（1）由 $a_{n+1}>a_n$，知 $a_2=a_1^2+k=1+k>a_1=1$，故 $k>0$.

…………（2 分）

当 $k>0$ 时，显然 $a_n>0$，且 $a_{n+1}-a_n=a_n^2-a_{n-1}^2=(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})$，

故 $a_{n+1}-a_n$ 与 a_n-a_{n-1} 同号，故对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都有 $a_{n+1}>a_n$.

综上所述：实数 k 的取值范围是 $(0,+\infty)$. …………（5 分）

（2）若 $a_1=3$ 且 $k=0$，则 $a_{n+1}=a_n^2$.

由 $a_1=3>0$，知 $a_n>0$，

两边取对数：$\ln a_{n+1}=\ln a_n^2=2\ln a_n$，且 $\ln a_1=\ln 3$，…………（8 分）

故 $\ln a_n=\ln 3\cdot 2^{n-1}$，故 $a_n=e^{\ln 3\cdot 2^{n-1}}=3^{2^{n-1}}$，

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3^{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}_+)$. …………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）在 $\triangle ABC$ 中，由 $2a\sin B=\sqrt{3}b$,

可得：$2\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B$，而 $\sin B>0$，

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

由 $\overline{AC}\cdot\overline{AB}=|\overline{AB}|^2$，知 $B=\dfrac{\pi}{2}$,

故 $A=\dfrac{\pi}{3}$, $C=\dfrac{\pi}{6}$. …………（3 分）

由 $b=2$，知 $c=1$, $a=\sqrt{3}$,

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. …………（5 分）

（2）在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理：$AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos D=40-24\cos D$,

…………（7 分）

故 $S_{ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}AC^2+\dfrac{1}{2}\times 2\times 6\times\sin D=5\sqrt{3}-3\sqrt{3}\cos D+6\sin D$

$=5\sqrt{3}+3\sqrt{7}\sin(D-\varphi)$，

其中 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos\varphi=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，…………（11 分）

所以，当 $D=\dfrac{\pi}{2}+\varphi$ 时，S_{ABCD} 取得最大值 $5\sqrt{3}+3\sqrt{7}$. …………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）由已知得 $\begin{cases} a=\sqrt{3}b, \\ S_{\triangle ABD}=ab=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{3}, \\ b=1, \end{cases}$

………………………………………………………………（2 分）

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$．……………………………（4 分）

（2）设直线 $P'Q$ 的方程为 $x=ty+n(t\neq 0)$，联立方程 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+y^2=1, \\ x=ty+n, \end{cases}$

得：$(t^2+3)y^2+2tny+(n^2-3)=0.$

设 $P'(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$，则由韦达定理：$\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{2tn}{t^2+3}, \\ y_1y_2=\dfrac{n^2-3}{t^2+3}, \end{cases}$

………………………………………………………………（6 分）

由点 P 与点 P' 关于 x 轴对称知 $P(x_1,\ -y_1)$，

由 M，P，Q 三点共线知 $k_{MP}=k_{MQ}$，即 $\dfrac{-y_2}{x_2-m}=\dfrac{y_1}{x_1-m}$，即 $\dfrac{-y_2}{ty_2+n-m}=\dfrac{y_1}{ty_1+n-m}$，

故 $-ty_1y_2-(n-m)y_2=ty_1y_2+(n-m)y_1$，即 $2ty_1y_2+(n-m)(y_1+y_2)=0.$

………………………………………………………………（8 分）

代入韦达定理：$2t\cdot\dfrac{n^2-3}{t^2+3}-(n-m)\cdot\dfrac{2tn}{t^2+3}=\dfrac{2tmn-6t}{t^2+3}=\dfrac{2t(nm-3)}{t^2+3}=0$，

由 $t\neq 0$，知 $n=\dfrac{3}{m}$，

故直线 $P'Q$ 与 x 轴交于定点 $K\left(\dfrac{3}{m},\ 0\right)$．……………………………（10 分）

由 $M(m,\ 0)$ 在椭圆 C：$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 外，得：$m\in(-\infty,\ -\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\ +\infty)$，

由 $\angle AKB$ 是钝角，知 $|OK|<|OA|=b=1$（O 为坐标原点），

即 $\left|\dfrac{3}{m}\right|\in(0,\ 1)$，解得 $m\in(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)$，

综上所述：m 的取值范围是 $(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)$．

………………………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

（1）证明：$x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$时，求证 $f(x)<1$ 等价于求证 $\sin x<x$.

令 $\varphi(x)=\sin x-x$ ，则 $\varphi'(x)=\cos x-1\leqslant 0$ ，故 $\varphi(x)$ 在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减，

故 $\varphi(x)<\varphi(0)=0$ ，不等式成立. ……………………………………………………（2分）

（2）解：令 $F(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{\sin x-ax\cos x}{x}$.

因为 $F(-x)=F(x)$，所以题设等价于 $F(x)>0$ 在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上恒成立，

即：$H(x)=\sin x-ax\cos x>0$ 在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上恒成立，

………………………………………………………………………………………（3分）

$H'(x)=(1-a)\cos x+ax\sin x$ ， $H(0)=0$，$H'(0)=1-a$.

（i）当 $a\leqslant 0$ 时，在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上 $\sin x>0$，$-ax\cos x\geqslant 0$ ，故 $H(x)>0$ ，所以 $F(x)>0$ ，符合题意；

（ii）当 $0<a\leqslant 1$ 时，$H'(x)=(1-a)\cos x+ax\sin\geqslant 0$ 在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上恒成立，故 $H(x)$ 在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，故 $H(x)>H(0)=0$ ，所以 $F(x)>0$ ，符合题意；

（iii）当 $a>1$ 时， $H'(0)=1-a<0$ ， $H'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi a}{2}>0$ ，

故必存在 $x_0\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $H'(x_0)=0$ ，且当 $x\in(0,\ x_0)$ 时， $H'(x)<0$ ，

故 $H(x)$ 在 $(0,\ x_0)$ 上单调递减，故在 $(0,\ x_0)$ 上 $H(x)<H(0)=0$ ，不符合题意.

综上所述：实数 a 的取值范围是 $(-\infty,\ 1]$. ……………………………………………（6分）

（3）解：由（1）知：$\sin x<x$ 在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上恒成立.

由（2）知：当 $a=1$ 时，$f(x)>g(x)$ ，即 $\dfrac{\sin x}{x}>\cos x\Rightarrow\sin x>x\cos x$ 在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上恒成立.

令 $G(x)=[f(x)]^2-g(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2}-a\cos x=\dfrac{\sin^2 x-ax^2\cos x}{x^2}$ ，

因为 $G(-x)=G(x)$，所以题设等价于 $G(x)>0$ 在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上恒成立，

即：$h(x)=\sin^2 x-ax^2\cos x>0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立.

…………………………………………………………………………………………（7分）

（i）当 $a\leqslant 0$ 时，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上 $\sin^2 x>0$，$-ax^2\cos x\geqslant 0$，

故 $h(x)>0$，所以 $G(x)>0$，符合题意；

（ii）当 $0<a\leqslant 1$ 时，$h(x)=\sin^2 x-ax^2\cos x\geqslant \sin^2 x-x^2\cos x$，

令 $r(x)=\sin^2 x-x^2\cos x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $r'(x)=2\sin x\cos x-2x\cos x+x^2\sin x>2\sin x\cos x-2\sin x+x^2\sin x$

$=[x^2-2(1-\cos x)]\sin x=\left(x^2-4\sin^2\dfrac{x}{2}\right)\sin x=4\left[\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-\sin^2\dfrac{x}{2}\right]\sin x>0$，

所以 $r(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

所以 $r(x)>r(0)=0$，故 $h(x)>0$，所以 $G(x)>0$，符合题意；

（iii）当 $a>1$ 时，$h(x)=\sin^2 x-ax^2\cos x<x^2-ax^2\cos x=x^2(1-a\cos x)$，

当 $\cos x\in\left(\dfrac{1}{a},1\right)$ 且 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$1-a\cos x<0$，

故 $h(x)<x^2-ax^2\cos x=x^2(1-a\cos x)<0$，不符合题意.

综上所述：a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ……………………………………………………（12分）