

2024 届高三数学试题参考答案(文科)

1. A 【解析】本题考查集合的并集,考查数学运算的核心素养.

因为 $A = \{x | x < 2\}$, $B = \{x | 1 < x < 7\}$, 所以 $A \cup B = \{x | x < 7\}$.

2. D 【解析】本题考查平面向量的垂直,考查数学运算的核心素养.

由 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$, 可得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (m+3)^2 - 5(2m+1) = 0$, 解得 $m = 2$.

3. A 【解析】本题考查导数的几何意义,考查数学运算的核心素养.

设函数 $f(x) = x^5 - a(x+1)$, 则 $f'(x) = 5x^4 - a$, 所以 $f'(1) = 5 - a > 1$, 解得 $a < 4$.

4. A 【解析】本题考查简单的线性规划问题,考查数形结合的数学思想.

作出可行域(图略), 当直线 $z = x - y$ 经过点 $(-3, 3)$ 时, z 取得最小值, 且最小值为 -6 .

5. B 【解析】本题考查正切的和差公式与同角的三角函数的关系,考查数学运算的核心素养.

因为 $\tan \alpha = \tan(\alpha - \beta + \beta) = \frac{2+4}{1-2 \times 4} = -\frac{6}{7}$, 所以 $\frac{7 \sin \alpha - \cos \alpha}{7 \sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{7 \tan \alpha - 1}{7 \tan \alpha + 1} = \frac{-6-1}{-6+1} = \frac{7}{5}$.

6. B 【解析】本题考查充分必要条件的判断,考查逻辑推理的核心素养.

设甲、乙、丙的年龄分别为 x, y, z , 根据已知条件得 $x > y$. 若丙的年龄大于乙的年龄, 则 $z > y$, 则 $y + z > 2y$, 因为 $2x > 2y$, 所以 $y + z > 2x$ 未必成立. 若乙和丙的年龄之和大于甲的年龄的两倍, 则 $y + z > 2x > 2y$, 则 $y + z > 2y$, 即 $z > y$, 所以丙的年龄大于乙的年龄. 故“丙的年龄大于乙的年龄”是“乙和丙的年龄之和大于甲的年龄的两倍”的必要不充分条件.

7. C 【解析】本题考查函数的奇偶性与单调性,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

因为 $f(x-5)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-5, 0)$ 对称, 要确保 $f(x)$ 的零点唯一, 数形结合可得 $m \leq -5$.

8. B 【解析】本题考查指数与对数的运算,考查数学运算的核心素养.

$$\begin{pmatrix} \lg 2^{\frac{1}{4}} & \lg 25 \\ \lg 5 & \lg 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8^{\frac{1}{3}} \\ 2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \lg 2 & 2 \lg 5 \\ \lg 5 & \lg 2^8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lg 2 + \lg 5 \\ 4 \lg 5 + 4 \lg 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

9. C 【解析】本题考查平面向量的基本定理与数量积,考查直观想象与数学运算的核心素养.

(方法一)由题意可知, $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 相似, 所以 $\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{DC}|} = 2$, 所以 $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} =$

$$\frac{2}{3} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{2}{3} (\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} = (\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \cdot$$

$$\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} |\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{2}{3} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \times 3^2 = 10, \text{ 所以 } \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} = 6.$$

$$\text{(方法二)} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{DA} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AO}) \cdot \overrightarrow{AD} = -|\overrightarrow{AD}|^2 + \frac{3}{2} \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AD} = -9 + 15 = 6.$$

10. C 【解析】本题考查三角函数图象的识别,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

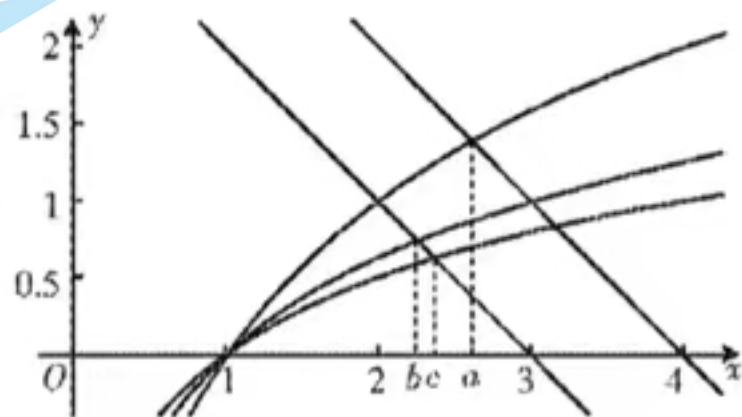
$$f(\frac{\pi}{2}) = -2 \sin \varphi, g(\frac{\pi}{2}) = 2 \sin \varphi = -f(\frac{\pi}{2}), \text{ 故选 C.}$$

11. D 【解析】本题考查数列的实际应用,考查数学建模的核心素养与应用意识.

设该公司在 2022 年,2023 年, \dots ,2031 年的销售额(单位:万元)分别为 a_1, a_2, \dots, a_{10} . 依题意可得 $a_{n+1} = 1.2a_n - 2 (n=1, 2, \dots, 9)$, 则 $a_{n+1} - 10 = 1.2(a_n - 10) (n=1, 2, \dots, 9)$, 所以数列 $\{a_n - 10\}$ 是首项为 90, 公比为 1.2 的等比数列, 则 $a_n - 10 = 90 \times 1.2^{n-1}$, 即 $a_n = 90 \times 1.2^{n-1} + 10$, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 10 \times 10 + \frac{90 \times (1 - 1.2^{10})}{1 - 1.2} \approx 100 + 450 \times (6.19 - 1) = 2435.5$, 故从 2022 年到 2031 年该产品的销售总额约为 2435.5 万元.

12. A 【解析】本题考查基本初等函数与比较大小,考查直观想象与逻辑推理的核心素养.

由 $a + \log_2 a = 4, b + \log_3 b = c + \log_4 c = 3$, 得 $\log_2 a = 4 - a, \log_3 b = 3 - b, \log_4 c = 3 - c$, 作出函数 $y = \log_2 x, y = 4 - x, y = 3 - x, y = \log_3 x, y = \log_4 x$ 的大致图象, 如图所示, 由图可知 $a > c > b$.



13. 若 a, b 都小于 1, 则 $a + b \neq 2$ 【解析】本题考查命题的逆否命题,考查逻辑推理的核心素养. 原命题的逆否命题要将原命题的条件和结论都否定后再将所得条件与结论对换, “ a, b 不都小于 1” 的否定为 “ a, b 都小于 1”.

14. $[0, 1)$ 【解析】本题考查等差数列,考查逻辑推理的核心素养.

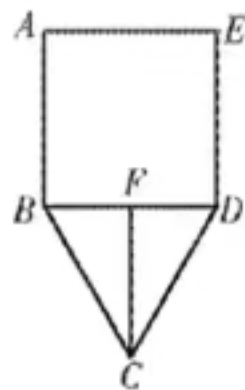
依题意可得 $a_1 = a_3 - 2d = 2 - 2d > 0$, 且 $d \geq 0$, 所以 $0 \leq d < 1$.

15. $-\frac{\pi}{6}$ (本题答案不唯一, 只要 x 的值满足 $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 即可) 【解析】本题考查三角函数图象的变换与对称性,考查数学运算的核心素养.

依题意可得 $f(x) = \cos[2(x + \frac{\pi}{6})] = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$, 令 $2x + \frac{\pi}{3} = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$.

16. $\frac{27 - 3\sqrt{17}}{8}$ 【解析】本题考查导数的实际应用,考查数学建模、直观想象、数学运算的核心素养.

过点 C 作 $CF \perp BD$, 垂足为 F . 设 $AB = x (x > 0)$, 则 $BD = AE = DE = x$, 因为 $BC = CD$, 所以 $3AB + 2BC = 12$, 则 $BC = 6 - \frac{3}{2}x$. 由 $BC > 0, BC + CD > BD$, 得 $0 < x < 3$.



在 $\triangle BCF$ 中, $CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{(6 - \frac{3}{2}x)^2 - (\frac{1}{2}x)^2} =$

$\sqrt{2x^2 - 18x + 36}$. 记 $\triangle BCD$ 的面积为 S , 则 $S = \frac{1}{2}BD \cdot CF = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^4 - 9x^3 + 18x^2}$. 设函数

$f(x) = x^4 - 9x^3 + 18x^2$, 则 $f'(x) = 4x^3 - 27x^2 + 36x = x(4x^2 - 27x + 36)$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{27 + 3\sqrt{17}}{8}$. 当 $0 < x < \frac{27 - 3\sqrt{17}}{8}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $\frac{27 - 3\sqrt{17}}{8} < x < 3$ 时, $f'(x) <$

0. 故当 $x = \frac{27-3\sqrt{17}}{8}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则 S 取得最大值, 此时 $AB = \frac{27-3\sqrt{17}}{8}$.

17. 解: (1) 依题意可得 $\begin{cases} 13+6+4+11+p+1+7+q=60, \\ \frac{11+q}{60} = \frac{4}{15}, \end{cases}$ 2分

解得 $\begin{cases} p=13, \\ q=5. \end{cases}$ 4分

(2) 将每个数据都减去 28.50 后所得新数据的平均数为 $\frac{1}{60}[0.01 \times 13 + 0.02 \times 6 + 0 \times 4 +$

$(-0.02) \times 11 + (-0.01) \times 13 + 0.04 \times 1 + 0.03 \times 7 + (-0.03) \times 5] = 0$, 6分

所以 $x = 0 + 28.50 = 28.50$, 7分

所以 $x - s = 28.48, x + s = 28.52$, 9分

所以这 60 个零件内径尺寸在 $[x - s, x + s]$ 内的个数为 $60 - 1 - 7 - 5 = 47$ 11分

因为 $\frac{47}{60} < \frac{48}{60} = 0.8$, 所以这次抽检的零件不合格. 12分

18. (1) 证明: 根据三棱台的几何性质可知, $DE \parallel AB$, 1分

因为 $DE \notin$ 平面 $ABF, AB \subset$ 平面 ABF , 所以 $DE \parallel$ 平面 ABF 3分

(2) 解: 根据三棱台的几何性质可知, $DF \parallel AC$ 4分

过 A 作 DF 的垂线, 垂足为 G .

因为平面 $ACFD \perp$ 平面 DEF , 平面 $ACFD \cap$ 平面 $DEF = DF$,

所以 $AG \perp$ 平面 DEF 6分

因为 $AC = AD = CF = 6, DF = 12$, 所以 $DG = \frac{DF - AC}{2} = 3$,

..... 7分

$AG = \sqrt{AD^2 - DG^2} = 3\sqrt{3}$, 则三棱台 $ABC - DEF$ 的高为 $3\sqrt{3}$

..... 8分

因为 $AC \perp BC$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$ 9分

又 $\frac{DF}{AC} = 2$, 所以 $\triangle DEF$ 的面积为 $9 \times 2^2 = 36$ 10分

故三棱台 $ABC - DEF$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times (9 + \sqrt{9 \times 36} + 36) \times 3\sqrt{3} = 63\sqrt{3}$ 12分

19. 解: (1) 由正弦定理及 $a \sin(A - B) = (c - b) \sin A$, 得 $\sin A \sin(A - B) = (\sin C - \sin B) \sin A$.

..... 1分

因为 $\sin A > 0$, 所以 $\sin(A - B) = \sin C - \sin B$, 2分

所以 $\sin(A - B) = \sin(A + B) - \sin B$, 3分

所以 $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin A \cos B + \cos A \sin B - \sin B$,

即 $2 \sin B \cos A = \sin B$, 4分

因为 $\sin B > 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$ 5分

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 6分

$$(2) S = \frac{1}{2} AD \cdot [CD \sin \angle ADC + BD \sin(\pi - \angle ADC)] = \frac{a}{2} \cdot AD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a,$$

因为 $S = 3\sqrt{3}$, 所以 $a = 4$ 8分

又 $S = 3\sqrt{3} = \frac{1}{2} bc \sin A$, 所以 $bc = 12$ 9分

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

则 $a^2 = (b+c)^2 - 3bc$, 10分

所以 $b+c = \sqrt{a^2 + 3bc} = 2\sqrt{13}$ 11分

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{13}$ 12分

20. (1) 解: $f'(x) = (2x - n + 2)e^x$, 1分

当 $x < \frac{n-2}{2}$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > \frac{n-2}{2}$ 时, $f'(x) > 0$ 2分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, \frac{n-2}{2})$, 单调递增区间为 $(\frac{n-2}{2}, +\infty)$ 3分

(2) 解: 由(1)知 $a_n = \frac{n-2}{2}$, 4分

当 n 为偶数时, $S_n = \frac{1}{2} [(-1) \times (-1) + (-1)^2 \times 0 + (-1)^3 \times 1 + \dots + (-1)^n \times (n-2)]$

$$= \frac{1}{2} [(1+0) + (-1+2) + (-3+4) + \dots + (-n+3+n-2)] = \frac{1}{2} \times \frac{n}{2} \times 1 = \frac{n}{4}; \dots \dots 5分$$

当 n 为奇数时, $S_n = S_{n+1} - a_{n+1} = \frac{n+1}{4} - \frac{n-1}{2} = \frac{3-n}{4}$.

$$\text{故 } S_n = \begin{cases} \frac{n}{4}, & n \text{ 为偶数,} \\ \frac{3-n}{4}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases} \dots \dots 6分$$

(3) 证明: 要证 $f(x) < xe^{2x}$, 只需证 $2x - n < xe^x$, 即证 $xe^x - 2x + n > 0$ 7分

设函数 $g(x) = xe^x - 2x + n$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x - 2$, $g'(x)$ 的导函数 $g''(x) = (x+2)e^x$,

则 $g'(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递增, 8分

所以 $g'(x)_{\min} = g'(-2) = -\frac{1}{e^2} - 2 < 0$, 当 $x < -2$ 时, $g'(x) < 0$, 9分

所以 $g'(x)$ 在 $(-2, +\infty)$ 上存在唯一零点 m . 因为 $g'(0) < 0$, $g'(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{e}-4}{2} > 0$, 所以 $m \in$

$(0, \frac{1}{2})$ 10分

所以 $g(x)$ 在 $(-2, m)$ 上单调递减, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x)_{\min} = g(m) = me^m -$

$2m+n$. 又 $g'(m) = (m+1)e^m - 2 = 0$, 所以 $me^m = 2 - e^m$,

所以 $g(x)_{\min} = 2 - e^m - 2m + n$ 11分

设函数 $h(m) = 2 - e^m - 2m + n$, 则 $h(m)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 所以 $h(m) > h(\frac{1}{2}) = n + 1 - \sqrt{e}$,

因为 n 为正整数, 所以 $n + 1 - \sqrt{e} \geq 2 - \sqrt{e} > 0$, 所以 $g(x)_{\min} > 0$, 所以 $f(x) < xe^{2x}$ 12分

21. (1) 解: 设椭圆方程为 $px^2 + qy^2 = 1$, 1分

则 $\begin{cases} q=1, \\ \frac{64}{25}p + \frac{9}{25}q=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p=\frac{1}{4}, \\ q=1, \end{cases}$ 3分

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 4分

注: 若直接设 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 得到 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 扣 1 分.

(2) 证明: 设 $P(x_0, y_0), A(m, 0), B(n, 0)$,

直线 $PD: y + \frac{3}{5} = \frac{y_0 + \frac{3}{5}}{x_0 + \frac{8}{5}}(x + \frac{8}{5})$, 令 $y=0$, 得 $x_N = \frac{\frac{3}{5}x_0 - \frac{8}{5}y_0}{y_0 + \frac{3}{5}}$ 5分

直线 $PC: y = \frac{y_0 + 1}{x_0}x - 1$. 令 $y=0$, 得 $x_M = \frac{x_0}{y_0 + 1}$ 6分

$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{NA} = (n - \frac{x_0}{y_0 + 1})(m - \frac{\frac{3}{5}x_0 - \frac{8}{5}y_0}{y_0 + \frac{3}{5}}) = \frac{(ny_0 + n - x_0)(5my_0 + 8y_0 + 3m - 3x_0)}{(y_0 + 1)(5y_0 + 3)}$

..... 8分

令 $5my_0 + 8y_0 + 3m = -3ny_0 - 3n$,

令 $5m + 8 = -3n, 3m = -3n$, 得 $n=4, m=-4$, 10分

则 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{NA} = \frac{-3[(4y_0 + 4)^2 - x_0^2]}{(y_0 + 1)(5y_0 + 3)} = \frac{-3[(4y_0 + 4)^2 - (4 - 4y_0^2)]}{(y_0 + 1)(5y_0 + 3)} = \frac{-12(5y_0^2 + 8y_0 + 3)}{5y_0^2 + 8y_0 + 3} = -12$.

故存在 $A(-4, 0)$ 和 $B(4, 0)$, 使得 $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{NA}$ 是定值, 且定值为 -12 12分

22. 解: (1) 设点 C 的直角坐标为 (x, y) , 则 $x = 4\sqrt{2} \cos \frac{5\pi}{4} = -4, y = 4\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{4} = -4$,

所以点 C 的直角坐标为 $(-4, -4)$ 2分

由 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta = 11$, 得 $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11$, 4分

所以圆 M 的直角坐标方程为 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ 5分

(2) 设点 P 的坐标为 $(1+4\cos \alpha, 2+4\sin \alpha)$ 7分

矩形 $PACB$ 的周长为 $2(1+4\cos \alpha + 4 + 2+4\sin \alpha + 4) = 22 + 8\sqrt{2} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$, 9分

当 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 1$ 时, 矩形 $PACB$ 的周长取得最大值, 且最大值为 $22 + 8\sqrt{2}$ 10分

23. (1) 证明: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \right) (a+2b+3c)$, 1分

因为 a, b, c 均为正数, 所以由柯西不等式可得 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq \frac{1}{4} \times (1+2+3)^2 = 9$, 3分

当且仅当 $a=b=c=\frac{2}{3}$ 时, 等号成立, 4分

故 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 9$ 5分

(2) 解: 因为 $a+2b+3c=4$, 所以 $\frac{1}{2}a+b=\frac{4-3c}{2}$, 6分

所以 $|\frac{1}{2}a+b|+|c|=|2-\frac{3}{2}c|+|c|$. 设函数 $f(c)=|2-\frac{3}{2}c|+|c|$,

则 $f(c)=|\frac{3}{2}c-2|+|c| = \begin{cases} 2-\frac{5}{2}c, & c \leq 0, \\ 2-\frac{1}{2}c, & 0 < c < \frac{4}{3}, \\ \frac{5}{2}c-2, & c \geq \frac{4}{3}. \end{cases}$ 8分

当 $c \leq 0$ 时, $f(c) \geq 2$; 当 $0 < c < \frac{4}{3}$ 时, $\frac{4}{3} < f(c) < 2$; 当 $c \geq \frac{4}{3}$ 时, $f(c) \geq \frac{4}{3}$ 9分

所以 $f(c)_{\min} = \frac{4}{3}$, 故 $|\frac{1}{2}a+b|+|c|$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$ 10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

