北京市朝阳区 2022~2023 学年度第一学期期末质量检测

高三数学

2023.1

（考试时间 120 分钟　　满分 150 分）

本试卷分为选择题 40 分和非选择题 110 分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 题，每题 4 分，共 40 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知全集 $U=\{x|x>0\}$，集合 $A=\{x|1<x<2\}$，则 $\complement_U A=$

(A) $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$　　(B) $(0,1]\cup[2,+\infty)$

(C) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$　　(D) $(0,1)\cup(2,+\infty)$

(2) 在复平面内，复数 $(1+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})$ 对应的点在第三象限，则实数 a 的取值范围是

(A) $(-\infty,-1)$　　(B) $(-\infty,1)$

(C) $(-1,+\infty)$　　(D) $(1,+\infty)$

(3) 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x-2, & x>0\end{cases}$ 的零点的个数为

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(4) 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线的倾斜角为 $60°$，则双曲线的离心率为

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

(C) $\sqrt{3}$　　(D) 2

(5) 在 $\triangle ABC$ 中，“$\sin 2A=\sin 2B$”是“$\triangle ABC$ 为等腰三角形”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(6) 过直线 $y=kx-2$ 上任意一点，总存在直线与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，则 k 的最大值为

(A) $\sqrt{3}$　　(B) $\sqrt{2}$　　(C) 1　　(D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

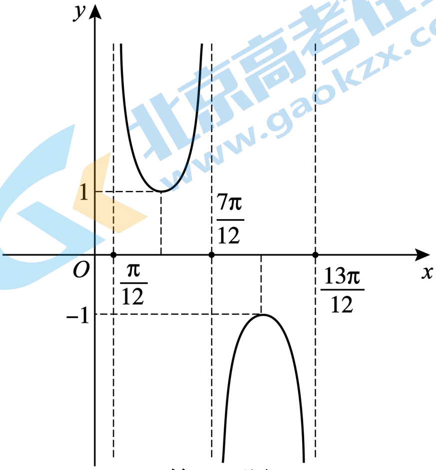
(7) 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$，若 $g(x)\cdot f(x)=1$，且函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示，则 φ 等于

(A) $-\frac{\pi}{3}$

(B) $-\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{\pi}{6}$

(D) $\frac{\pi}{3}$



第(7)题

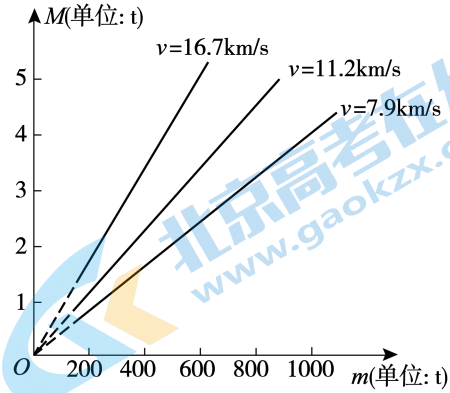
(8) 2022 年 10 月 31 日，长征五号 B 遥四运载火箭带着中华民族千百年来探索浩瀚宇宙的梦想，将中国空间站梦天实验舱准确送入预定轨道.在不考虑空气阻力的条件下，若火箭的最大速度 v（单位：km/s）和燃料的质量 M（单位：t）、火箭（除燃料外）的质量 m（单位：t）的关系满足 $v=2000\ \ln(1+\frac{M}{m})$，$M$，$m$，$v$ 之间的关系如图所示，则下列结论正确的是

(A) 当 $M=3$，$m=800$ 时，$v>7.9$

(B) 当 $M=2$，$m<600$ 时，$v<7.9$

(C) 当 $M>5$，$m=800$ 时，$v>11.2$

(D) 当 $M>3$，$m>600$ 时，$v>11.2$



第(8)题

(9) 已知 A,B,C 是单位圆上不同的三点，$AB=AC$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的最小值为

(A) 0　　(B) $-\frac{1}{4}$　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) -1

(10) 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=ka_n^2+1\ (n\in\mathbf{N}^*)$，若存在常数 c，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n<c$ 成立，则正数 k 的最大值为

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 题，每题 5 分，共 25 分。

(11) 在$(2x+\frac{1}{x})^4$的展开式中，常数项为________.（用数字作答）

(12) 已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d\neq 0$，$a_1=4$，且a_1,a_3,a_4成等比数列，则$a_n=$________；其前n项和S_n的最大值为________.

(13) 若函数$f(x)=\cos x-\sin x$在区间$[0,a]$上单调递减，则实数a的最大值为________.

(14) 抛物线C：$y=x^2$的准线l的方程为________.若点P是抛物线C上的动点，l与y轴交于点A，则$\angle OAP$（O是坐标原点）的最大值为________.

(15) 如图，在棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，P,Q分别为AC_1,A_1B_1的中点，点T在正方体的表面上运动，满足$PT\perp BQ$.

给出下列四个结论：

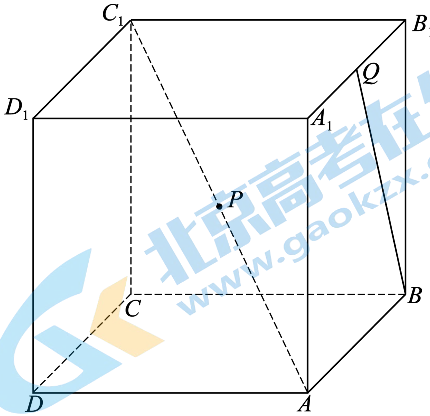
①点T可以是棱DD_1的中点；

②线段PT长度的最小值为$\frac{1}{2}a$；

③点T的轨迹是矩形；

④点T的轨迹围成的多边形的面积为$\frac{\sqrt{5}}{2}a^2$.

其中所有正确结论的序号是________.



第(15)题

三、解答题共 6 题,共 85 分。解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

在$\triangle ABC$中,$c\sin B=\sqrt{3}b\cos C$.

(Ⅰ)求$\angle C$;

(Ⅱ)若$a+b=6$,求 c 的最小值.

(17)(本小题 13 分)

跳长绳是中国历史悠久的运动,某中学高三年级举行跳长绳比赛(该校高三年级共 4 个班),规定每班 22 人参加,其中 2 人摇绳,20 人跳绳,在 2 分钟内跳绳个数超过 120 个的班级可获得优胜奖,跳绳个数最多的班级将获得冠军.为预测获得优胜奖的班级个数及冠军得主,收集了高三年级各班训练时在 2 分钟内的跳绳个数,并整理得到如下数据(单位:个):

高三(1)班:142,131,129,126,121,109,103,98,96,94;

高三(2)班:137,126,116,108;

高三(3)班:163,134,112,103;

高三(4)班:158,132,130,127,110,106.

假设用频率估计概率,且高三年级各班在 2 分钟内的跳绳个数相互独立.

(Ⅰ)估计高三(1)班在此次跳长绳比赛中获得优胜奖的概率;

(Ⅱ)用 X 表示此次跳长绳比赛中获得优胜奖的班级个数,估计 X 的数学期望 EX;

(Ⅲ)在此次跳长绳比赛中,哪个班获得冠军的概率估计值最大?(结论不要求证明)

(18)(本小题 14 分)

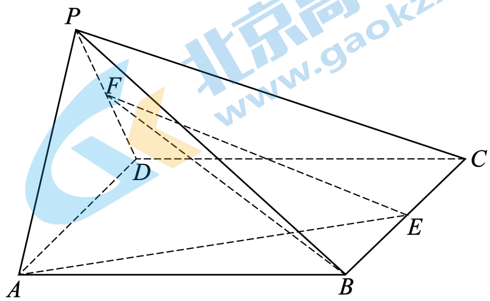
如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$,$AB=4$,$PA=PD$,E,F 分别为 BC,PD 的中点.

(Ⅰ)求证:EF∥平面 PAB;

(Ⅱ)再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知,求二面角 $F-BE-A$ 的余弦值.

条件①:$PD\perp EF$;

条件②:$PD=\frac{2}{3}EF$.



注:如果选择条件①和条件②分别解答,按第一个解答计分.

(19)(本小题 15 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点 $A(2,0)$,P 为椭圆 C 上的动点,且点 P 不在 x 轴上,O 是坐标原点,$\triangle AOP$ 面积的最大值为 1.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程及离心率;

(Ⅱ)过点 $H(-1,0)$ 的直线 PH 与椭圆 C 交于另一点 Q,直线 AP,AQ 分别与 y 轴相交于点 E,F.当 $|EF|=2$ 时,求直线 PH 的方程.

(20)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{ax}(a>0)$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间;

(Ⅱ)若 $f(x)\leqslant x-\dfrac{1}{a}$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立,求 a 的取值范围;

(Ⅲ)若 $x_2\ln x_1+x_1\ln x_2=0(x_1\neq x_2)$,证明:$x_1+x_2>2$.

(21)(本小题 15 分)

已知无穷数列$\{a_n\}$的各项均为正数,当 $n\leqslant 4$ 时,$\dfrac{a_n}{n}\leqslant\dfrac{a_4}{4}$;当 $n>4$ 时,$a_n=\max\{a_1+a_{n-1},a_2+a_{n-2},a_3+a_{n-3},\cdots,a_{n-1}+a_1\}$,其中 $\max\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_s\}$ 表示 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_s$ 这 s 个数中最大的数.

(Ⅰ)若数列$\{a_n\}$的前 4 项为 1,2,2,4,写出 a_5,a_6,a_7,a_8 的值;

(Ⅱ)证明:对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,均有$\dfrac{a_n}{n}\leqslant\dfrac{a_4}{4}$;

(Ⅲ)证明:存在正整数 N,当 $n>N$ 时,$a_n=a_4+a_{n-4}$.

北京市朝阳区2022~2023学年度第一学期期末质量检测

高三数学 参考答案

2023.1

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分）

（1）B　　（2）A　　（3）C　　（4）D　　（5）D

（6）A　　（7）B　　（8）C　　（9）C　　（10）B

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

（11）24　　（12）$5-n$　　10　　（13）$\frac{3\pi}{4}$

（14）$y=-\frac{1}{4}$　　$\frac{\pi}{4}$　　（15）②③④

三、解答题（共6小题，共85分）

（16）（本小题13分）

解：（Ⅰ）因为 $c\sin B=\sqrt{3}b\cos C$，

所以 $\sin C\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos C$．

又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$．

所以 $\tan C=\sqrt{3}$．

又因为 $C\in(0,\pi)$，

所以 $\angle C=\frac{\pi}{3}$．

（Ⅱ）因为 $a+b=6$，$\angle C=\frac{\pi}{3}$，

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得

$$c^2=(a+b)^2-2ab-2ab\cos\frac{\pi}{3}=36-3ab.$$

因为 $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2=9$，当且仅当 $a=b=3$ 时等号成立，

所以 $c^2\geqslant 9$，解得 $c\geqslant 3$．

所以 c 的最小值为 3．

（17）（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）设事件 A_1 为“高三（1）班在此次跳长绳比赛中获得优胜奖”.

根据题中数据，高三（1）班共训练10 次，跳绳个数超过120 个的共5 次.

所以 $P(A_1)$ 估计为 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）设事件 A_k 为“高三（k）班在此次跳长绳比赛中获得优胜奖”，$k=1,2,3,4$.

根据题中数据，$P(A_2)$ 估计为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P(A_3)$ 估计为 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，$P(A_4)$ 估计为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

根据题意，随机变量 X 的所有可能取值为0，1，2，3，4，且

$P(X=0)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$；

$$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)$$

$$=P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})+P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})$$

$$+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3)P(\overline{A_4})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(A_4);$$

$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3\overline{A_4})+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)$$

$$=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(\overline{A_4})+P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})P(A_4)$$

$$+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)P(A_4)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)P(A_4);$$

$P(X=4)=P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$；

$P(X=2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=3)-P(X=4)$.

所以，$P(X=0)$ 估计为 $\frac{1}{24}$；$P(X=1)$ 估计为 $\frac{5}{24}$；$P(X=3)$ 估计为 $\frac{7}{24}$；

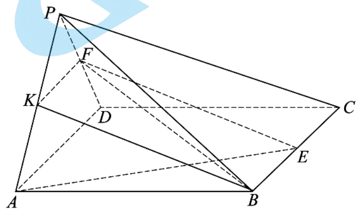
$P(X=4)$ 估计为 $\frac{1}{12}$；$P(X=2)$ 估计为 $\frac{3}{8}$.

所以 EX 估计为 $0\times\frac{1}{24}+1\times\frac{5}{24}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{7}{24}+4\times\frac{1}{12}=\frac{5+18+21+8}{24}=\frac{13}{6}$.

（Ⅲ）在此次跳长绳比赛中，高三（3）班获得冠军的概率估计值最大.

（18）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）取 PA 的中点 K，连接 KF，KB.



因为 K，F 分别是 PA，PD 的中点，

所以 $KF//AD$ 且 $KF=\frac{1}{2}AD$.

又 $BE//AD$ 且 $BE=\frac{1}{2}AD$，

所以 $KF//BE$ 且 $KF=BE$.

故四边形 $BEFK$ 为平行四边形.

所以 $EF//BK$.

又因为 $EF\not\subset$ 平面 PAB， $BK\subset$ 平面 PAB，

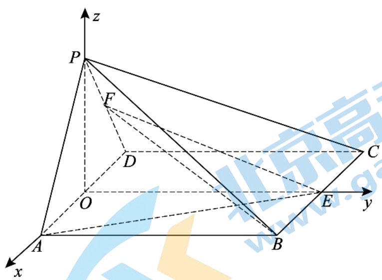
所以 $EF//$ 平面 PAB.

（Ⅱ）取 AD 中点 O， 连接 OP，OE.

在△PAD 中，因为 $PA=PD$， 所以 $PO\perp AD$.

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

且平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，



所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

故 $OP\perp OA$，$OP\perp OE$.

又在正方形 $ABCD$ 中， $OE\perp OA$ ，

所以 OA，OE，OP 两两垂直.

如图建立空间直角坐标 $O-xyz$，

设 $P(0,0,2t)(t>0)$，

则 $O(0,0,0)$，$B(2,4,0)$，$D(-2,0,0)$，$E(0,4,0)$，$F(-1,0,t)$.

所以 $\overrightarrow{EB}=(2,0,0)$， $\overrightarrow{EF}=(-1,-4,t)$， $\overrightarrow{DP}=(2,0,2t)$.

设平面 BEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$， 则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x_0=0,\\ -x_0-4y_0+tz_0=0.\end{cases}$ 令 $y_0=t$， 则 $x_0=0$，$z_0=4$. 于是 $\boldsymbol{n}=(0,t,4)$.

又因为平面 ABE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{t^2+16}}$.

选择条件①： $PD\perp EF$.

则 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DP}=0$，即 $-2+2t^2=0$.

又 $t>0$，所以 $t=1$.

此时 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

由题知二面角 $F-BE-A$ 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

选择条件②： $PD=\dfrac{2}{3}EF$.

则 $3\sqrt{2^2+(2t)^2}=2\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+t^2}$ ，得 $t^2=1$.

此时 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

由题知二面角 $F-BE-A$ 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

（19）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为 $\triangle AOP$ 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}ab$ ，所以 $\dfrac{1}{2}ab=1$.

又因为 $a=2$， $c^2=a^2-b^2$，所以 $b=1$， $c=\sqrt{3}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）① 当直线 PH 的斜率不存在时，直线 PH 的方程为 $x=-1$. 显然 $\triangle APQ\backsim\triangle AEF$.

因为 $|PQ|=\sqrt{3}$，所以 $|EF|=\dfrac{2}{3}|PQ|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\neq 2$. 不合题意.

② 当直线 PH 的斜率存在时，设直线 PH 的方程为 $y=k(x+1)$.

由 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8k^2x+(4k^2-4)=0$.

显然 $\Delta>0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq\pm2$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}$．

直线 AP 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$．

令 $x=0$，得点 E 的纵坐标 $y_E=\dfrac{-2y_1}{x_1-2}$，则 $E(0,\dfrac{-2y_1}{x_1-2})$．

直线 AQ 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$．

同理可得 $F(0,\dfrac{-2y_2}{x_2-2})$．

$$\begin{aligned}\text{所以}|EF|&=|\frac{-2y_1}{x_1-2}-\frac{-2y_2}{x_2-2}|=2|\frac{y_2(x_1-2)-y_1(x_2-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}|\\&=2|\frac{k(x_2+1)(x_1-2)-k(x_1+1)(x_2-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}|\\&=6|k|\cdot|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}|=2.\end{aligned}$$

所以 $3|k|\cdot|x_1-x_2|=|x_1x_2-2(x_1+x_2)+4|$．

即 $3|k|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=|x_1x_2-2(x_1+x_2)+4|$．

可得 $3|k|\sqrt{(-\dfrac{8k^2}{1+4k^2})^2-4\times\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}}=|\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}+2\times\dfrac{8k^2}{1+4k^2}+4|$．

化简得 $3|k|\cdot\dfrac{4\sqrt{3k^2+1}}{1+4k^2}=\dfrac{36k^2}{1+4k^2}$．　解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt6}{6}$．

所以直线 PH 的方程为 $x-\sqrt6y+1=0$ 或 $x+\sqrt6y+1=0$．

（20）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$．

由 $f(x)=\dfrac{\ln x}{ax}$ 得 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{ax^2}$．

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\mathrm{e}$．

因为 $a>0$，所以当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,\mathrm{e})$，单调递减区间为 $(\mathrm{e},+\infty)$．

（Ⅱ）由 $a>0$，依题意，$\ln x-ax^2+x\leqslant 0$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

设 $g(x)=\ln x-ax^2+x$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax+1=\dfrac{-2ax^2+x+1}{x}$.

令 $g'(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{1-\sqrt{1+8a}}{4a}<0$（舍），$x_2=\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}>0$.

当 $x\in(0,x_2)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增；

当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减.

故 $g(x)_{\max}=g(x_2)=\ln x_2-a{x_2}^2+x_2$.

又由 $g'(x_2)=0$ 得 $a{x_2}^2=\dfrac{x_2+1}{2}$.

所以 $g(x_2)=\ln x_2-\dfrac{x_2+1}{2}+x_2=\ln x_2+\dfrac{x_2-1}{2}$.

依题意需 $g(x)_{\max}\leqslant 0$，即 $\ln x_2+\dfrac{x_2-1}{2}\leqslant 0$.

设 $h(t)=\ln t+\dfrac{t-1}{2}$，则易知 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数.

又 $h(1)=0$，

所以对任意的 $t\in(0,1]$，有 $h(t)\leqslant 0$；对任意的 $t\in(1,+\infty)$，有 $h(t)>0$.

所以 $0<x_2\leqslant 1$，即 $0<\dfrac{1+\sqrt{1+8a}}{4a}\leqslant 1$，解得 $a\geqslant 1$.

所以 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

（Ⅲ）由 $x_2\ln x_1+x_1\ln x_2=0$ $(x_1\neq x_2)$ 得 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}+\dfrac{\ln x_2}{x_2}=0$，且 $x_1\neq 1, x_2\neq 1$.

由（Ⅱ）知，当 $a=1$ 时，$\dfrac{\ln x}{x}\leqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号.

所以 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}<x_1-1$，$\dfrac{\ln x_2}{x_2}<x_2-1$.

两式相加得 $\dfrac{\ln x_1}{x_1}+\dfrac{\ln x_2}{x_2}<x_2+x_1-2$，即 $x_1+x_2-2>0$.

故 $x_1+x_2>2$.

（21）（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）$a_5=5$，$a_6=6$，$a_7=7$，$a_8=8$．

（Ⅱ）对任意 $n>4$，存在 $i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $a_n=a_i+a_{n-i}$．

若 $i>4$ 或 $n-i>4$，

则 a_i 或 a_{n-i} 又可以写成数列中某两项的和，如 $a_i=a_{i_1}+a_{i_2}$ $(i_1+i_2=i)$．

依此类推，存在 $j_1,j_2,\cdots,j_k\in\{1,2,3,4\}$，使得 $a_n=a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_k}$，

其中 $j_1+j_2+\cdots+j_k=n$．

所以存在 $p_1,p_2,p_3,p_4\in\mathbf{N}$，使得 $a_n=p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3+p_4a_4$，

且 $p_1+2p_2+3p_3+4p_4=n$．

设 $\dfrac{a_4}{4}=t$，则当 $n\leqslant 4$ 时，$a_n\leqslant nt$．

当 $n>4$ 时，$a_n=p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3+p_4a_4\leqslant p_1t+p_2\cdot 2t+p_3\cdot 3t+p_4\cdot 4t$

$$=(p_1+2p_2+3p_3+4p_4)t=nt．$$

所以，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_n\leqslant nt$，即 $\dfrac{a_n}{n}\leqslant\dfrac{a_4}{4}$．

（Ⅲ）令 $b_n=nt-a_n$，其中 $t=\dfrac{a_4}{4}$．由（Ⅱ）知 $b_n\geqslant 0$，$b_4=0$．

由 $b_{i+4(k+1)}-b_{i+4k}=[i+4(k+1)]t-a_{i+4(k+1)}-[(i+4k)t-a_{i+4k}]$

$$=4t-a_{i+4(k+1)}+a_{i+4k}=(a_4+a_{i+4k})-a_{i+4(k+1)}\leqslant 0，$$

得 $b_{i+4k}\geqslant b_{i+4(k+1)}$．

所以，当 $i=1,2,3,4$ 时，$b_i\geqslant b_{i+4}\geqslant b_{i+8}\geqslant\cdots\geqslant 0$．

由（Ⅱ）知 $b_n=(p_1+2p_2+3p_3+4p_4)t-(p_1a_1+p_2a_2+p_3a_3+p_4a_4)$

$$=p_1(t-a_1)+p_2(2t-a_2)+p_3(3t-a_3)+p_4(4t-a_4)$$

$$=p_1b_1+p_2b_2+p_3b_3+p_4b_4．$$

若 $b_1=b_2=b_3=b_4=0$，则 $b_n=0$．此时 $a_n=nt$，当 $n>4$ 时，$a_n=a_4+a_{n-4}$．

若 b_1,b_2,b_3 不全为 0，

设 $M=\max\{b_1,b_2,b_3\}$，m 为 b_1,b_2,b_3 中最小的正数，则 $b_n\leqslant M$．

当某个 $b_i>0$ 时，必有 $p_i\leqslant\frac{M}{m}$．否则 $p_i>\frac{M}{m}$，则 $b_n\geqslant p_ib_i>\frac{M}{m}\cdot m=M$．

设不超过 $\frac{M}{m}$ 的最大整数为 N_0，

则 $p_1b_1+p_2b_2+p_3b_3+p_4b_4$ 能表示的不同值的个数不超过 $(N_0+1)^4$．

所以，对每一个 $i=1,2,3,4$，$b_i,b_{i+4},b_{i+8},\cdots$ 只能取有限多个值．

所以存在 $k_0\in\mathbf{N}^*$，当 $p\geqslant k_0$，$p\in\mathbf{N}^*$ 时，b_{i+4p} 为常数．

令 $N=4k_0+4$，则当 $n>N$ 时，$b_{n+4}=b_n$，即 $(n+4)t-a_{n+4}=nt-a_n$．

故 $a_n=a_4+a_{n-4}$．

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。