2021 普通高等学校招生全国统一考试

新高考数学 I 卷　参考答案

本试卷 3 页，22 小题，满分 150 分. 考试用时 120 分钟.

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上. 用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上. 将条形码横贴在答题卡右上角"条形码粘贴处".

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案. 答案不能答在试卷上.

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答无效.

4. 考生必须保持答题卡的整洁. 考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

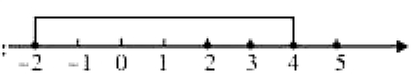
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x \mid -2<x<4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$（　）.

A：$\{2\}$　　B：$\{2,3\}$　　C：$\{3,4\}$　　D：$\{2,3,4\}$

答案：B

解析：



由图可知 $A\cap B=\{2,3\}$，选 B.

2. 已知 $z=2-i$，则 $z(\bar{z}+i)=$（　）.

A：$6-2i$　　B：$4-2i$　　C：$6+2i$　　D：$4+2i$

答案：C

解析：$z=2-i$，$\bar{z}=2+i$，$\bar{z}+i=2+2i$.

$z\cdot(\bar{z}+i)=(2-i)(2+2i)=4+4i-2i-2i^2=6+2i$，选 C.

3. 已知圆锥的底面半径为 $\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（　）.

A：2　　B：$2\sqrt{2}$　　C：4　　D：$4\sqrt{2}$

答案：B

解析：设母线长为 l，则底面周长为 $2\sqrt{2}\pi$. 为侧面展开图半周长：πl.

故 $\pi l=2\sqrt{2}\pi$，$\therefore l=2\sqrt{2}$.

4. 下列区间中，函数 $f(x)=7\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增的区间是（　）.

A：$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$　　B：$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$　　C：$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$　　D：$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

答案：A

解析：A. $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ 满足

B. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，当 $x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5}{6}\pi\right)$，不满足

C. $\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$，当 $x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{4}{3}\pi\right)$，不满足

D. $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，当 $x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{11}{6}\pi\right)$，不满足

选 A.

5. 已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为（　）.

A：13　　B：12　　C：9　　D：6

答案：C

解析：法一：由均值不等式及椭圆第一定义

$|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant\frac{1}{4}(|MF_1|+|MF_2|)^2=\frac{1}{4}\times6^2=9$，当 $M(0,\pm2)$ 取等，故所求最大值为 9. 选 C.

法二：设 $M(x,y)$，则

$|MF_1|\cdot|MF_2|=\left(3+\frac{\sqrt{5}}{3}x\right)\left(3-\frac{\sqrt{5}}{3}x\right)=9-\frac{5}{9}x^2\leqslant9$，当 $x=0$ 取等.

故所求最大值为 9. 选 C.

6. 若 $\tan\theta=-2$，则 $\frac{\sin\theta(1+\sin2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　）.

A：$-\frac{6}{5}$　　B：$-\frac{2}{5}$　　C：$\frac{2}{5}$　　D：$\frac{6}{5}$

答案：C

解析：法一：由 $\tan\theta=-2$ 得 $\sin^2\theta=\frac{4}{5}$，$\sin\theta\cdot\cos\theta=-\frac{2}{5}$.

故 $\frac{\sin\theta(1+\sin2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{5}$，选 C.

法二：$\frac{\sin\theta(1+\sin2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)^2}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2}{5}$，选 C.

7. 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线，则（　）.

A：$e^b<a$　　B：$e^a<b$　　C：$0<a<e^b$　　D：$0<b<e^a$

答案：D

解析：点 (a,b) 在曲线 $y=e^x$ 的下方，且可做两条

$\therefore 0<b<e^a$（由 $b<e^a$ 迅速确定 D 正确）

8. 有 6 个相同的球，分别标有数字 1,2,3,4,5,6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则（　）.

A：甲与丙相互独立　　B：甲与丁相互独立

C：乙与丙相互独立　　D：丙与丁相互独立

答案：A

解析：由独立事件的定义知 A 正确.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，由这组数据得到新样本数据 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，其中 $y_i = x_i + c\,(i = 1, 2, \cdots, n)$，$c$ 为非零常数，则(　　).

A：两组样本数据的样本平均数相同　　　B：两组样本数据的样本中位数相同

C：两组样本数据的样本标准差相同　　　D：两组样本数据的样本极差相同

答案：CD

解析：A. $\bar{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$；$\bar{y} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nc}{n} = \bar{x} + c$；

B. $y_{中} = x_{中} + c$

C. $S_x^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$；$S_y^2 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[(x_i + c) - (\bar{x} + c)]^2 = S_x^2$

D. x 的极差为 $x_{\max} - x_{\min}$；y 的极差为 $(x_{\max} + c) - (x_{\min} + c) = x_{\max} - x_{\min}$.

故选 CD.

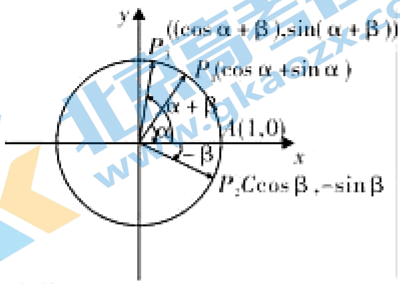
10. 已知 O 为坐标原点，点 $P_1(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$P_2(\cos\beta, -\sin\beta)$，$P_3(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$，$A(1,0)$，则(　　)

A：$|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$　　　B：$|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$

C：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$　　　D：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$

答案：AC

解析：如图，可知



A. $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = 1$.

B. 只有 $\alpha = -\beta$ 时成立.

C. $<\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP_3}> = \alpha + \beta$，$<\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}> = \alpha + \beta$，故正确.

D. 错误.

故选 AC.

11. 已知点 P 在圆 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 上，点 $A(4,0)$，$B(0,2)$，则(　　).

A：点 P 到直线 AB 的距离小于 10　　　B. 点 P 到直线 AB 的距离大于 2

C：当 $\angle PBA$ 最小时，$|PB| = 3\sqrt{2}$　　　D：当 $\angle PBA$ 最大时，$|PB| = 3\sqrt{2}$

答案：ACD

解析：如图 1，记条件中圆为 $\odot M$，P 到直线 AB 的距离 d

满足：$P_1 \leqslant d \leqslant P_2H$

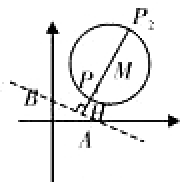


图1

又 $l_{AB}: x + 2y - 4 = 0$，$\therefore MH = \dfrac{|5 + 2\times5 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{11}{\sqrt{5}}$.

$\therefore P_1H = \dfrac{11}{\sqrt{5}} - 4$，$\therefore P_2H = \dfrac{11}{\sqrt{5}} + 4$，

$\therefore d \in \left[\frac{11}{\sqrt{5}}-4, \frac{11}{\sqrt{5}}+4\right]$.

又$\frac{11}{\sqrt{5}}-4<2, \frac{11}{\sqrt{5}}+4<10$.

$\therefore$ A 正确，B 错误.

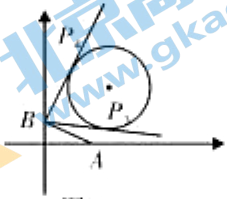


图2

如图 2，P 在 $\odot M$ 上，作 BP_3, BP_4 切 $\odot M$ 于 P_3, P_4.

则 $\angle PBA$ 在 P_3 处最小，P_4 处最大.

又 $BP_3 = BP_4 = \sqrt{BP^2-4^2} = \sqrt{5^2+(5-2)^2-4^2} = 3\sqrt{2}$.

$\therefore$ CD 正确.

故选 ACD.

12. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB = AA_1 = 1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda \in [0,1]$，$\mu \in [0,1]$，则(　　)

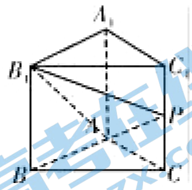
A：当 $\lambda = 1$ 时，$\triangle AB_1P$ 的周长为定值

B：当 $\mu = 1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

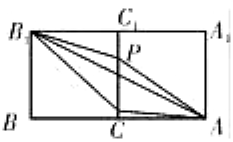
C：当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P \perp BP$

D：当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P

答案：BD



解析：选项 A，$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1} \Rightarrow \overrightarrow{CP} = \mu\overrightarrow{BB_1}$，故 P 在 C_1C 上.

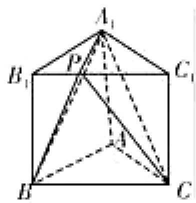


将平面 B_1BCC_1 与平面 AA_1C_1C 沿着 CC_1 展开.

发现 $B_1P + PA$ 在变.

周长 $= B_1P + PA + AB_1 = B_1P + PA + \sqrt{2}$ 不为定值.

选项 B，$\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} \Rightarrow \overrightarrow{B_1P} = \lambda\overrightarrow{BC}$



$\therefore P$ 在 B_1C_1 上. P 所在的直线 $B_1C_1 \parallel BC$.

且 $B_1C_1 \not\subset$ 平面 A_1BC. $\therefore B_1C_1 \parallel$ 平面 ABC.

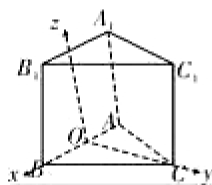
故 P 到平面 A_1BC 的距离为定值

而底面积 A_1BC 为定值

故 V_{P-A_1BC} 为定值.

选项 C，$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1}$

如图，建立空间直角坐标系.



设 $P(x_0, y_0, z_0)$，$B\left(\frac{1}{2},0,0\right)$，$C\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$B_1\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，$A_1\left(-\frac{1}{2},0,1\right)$

$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1} = \left(\frac{-1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},0\right) + (0,0,\mu) = \left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\mu\right)$

$\overrightarrow{BP} = \left(x_0-\frac{1}{2}, y_0, z_0\right)$

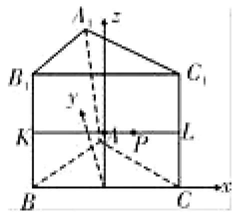
$$\therefore\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{4}\\[2ex] y_0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\[2ex] z_0=\mu\end{cases}$$

$\therefore P\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4},\mu\right)$

$\overrightarrow{A_1P}=\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4},\mu-1\right)$.

而$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{BP}=\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{16}+\mu^2-\mu=0$

$\therefore \mu=0$ 或 1.



选项 D, $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$, 取 BB_1 中点为 k.

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BK}$, $\therefore\ \overrightarrow{KP}=\lambda\overrightarrow{BC}$.

$\therefore KP\ /\!/\ BC$, 取 CC_1 中点 L. $\therefore P\in KL$.

$B\left(-\dfrac{1}{2},0,0\right)$, $B_1\left(-\dfrac{1}{2},0,1\right)$, $A\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$, $A_1\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, $P\left(\lambda-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{A_1B}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-1\right)$. $\overrightarrow{AB_1}=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

$\overrightarrow{AP}=\left(\lambda-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\[1ex] \overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}-\dfrac{\lambda}{2}=0.$$

$\therefore \lambda=1$. 故仅有一点满足. 选 BD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$ 是偶函数, 则 $a=$ ________.

答案：1

解析：$f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})=f(-x)=-x^3\left(\dfrac{a}{2^x}-2^x\right)$

$$\Rightarrow 2^x-\frac{a}{2^x}=a\cdot 2^x-\frac{1}{2^x}$$

$$\Rightarrow (1-a)\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)=0$$

$$\Rightarrow a=1$$

14. 已知 O 为坐标原点, 抛物线 $C: y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F, P 为 C 上一点, PF 与 x 轴垂直, Q 为 x 轴上一点, 且 $PQ\perp OP$. 若 $|FQ|=6$, 则 C 的准线方程为 ________.

答案：$x=-\dfrac{3}{2}$

解析：$|OF|\cdot|FQ|=|PF^2|$

$\Rightarrow \frac{P}{2}\times 6 = P^2 \Rightarrow P = 3$

$\therefore$ 准线方程为 $x = -\frac{3}{2}$.

15. 函数 $f(x) = |2x-1| - 2\ln x$ 的最小值为____________.

答案:1

解析:**法一**:$f(x) = \begin{cases} 2x-1-2\ln x, x \geqslant \frac{1}{2} \\ 1-2x-2\ln x, x \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$

$f(x)$ 在$[-\infty, \frac{1}{2}]$上是减函数,

$\therefore x \in [-\infty, \frac{1}{2}]$ 时, $f_{\min}(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

$x \in [\frac{1}{2}, +\infty]$ 时, $f'(x) = 2 - \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)}{x}$.

$\therefore f(x)$ 在$[\frac{1}{2}, 1]$上是减函数,在$[1, +\infty]$上是增函数.

$\therefore x \in [\frac{1}{2}, +\infty]$ 时 $f_{\min}(x) = f(1) = 1$. 且 $f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right)$

综上可知,当 $x = 1$ 时 $f(x)$ 的最小值是 1.

法二:易证 $\ln x \leqslant x - 1$. 当且仅当 $x = 1$ 时,等号成立.

$\therefore f(x) = |2x-1| - 2\ln x \geqslant |2x-1| - (2x-2) \geqslant (2x-1) - (2x-2) = 1$

当且仅当 $x = 1$ 且 $2x - 1 \geqslant 0$ 即 $x = 1$ 时等号成立.

$\therefore f(x)$ 的最小值是 1.

16. 某校学生在研究民间剪纸艺术时,发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折. 规格为 $20\text{dm}\times 12\text{dm}$ 的长方形纸,对折 1 次共可以得到 $10\text{dm}\times 12\text{dm}$, $20\text{dm}\times 6\text{dm}$ 两种规格的图形,它们的面积之和 $S_1 = 240\text{dm}^2$,对折 2 次共可以得到 $5\text{dm}\times 12\text{dm}$, $10\text{dm}\times 6\text{dm}$, $20\text{dm}\times 3\text{dm}$ 三种规格的图形,它们的面积之和 $S_2 = 180\text{dm}^2$,以此类推. 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为____________;如果对折 n 次,那么 $\sum_{k=1}^{n} S_k =$ ____________ dm^2.

答案:5, $240\times\left(3 - \frac{n+3}{2^n}\right)$

解析:对折 4 次可以得到 $\frac{20}{16}\text{dm}\times 12\text{dm}$, $\frac{20}{8}\text{dm}\times\frac{12}{2}\text{dm}$, $\frac{20}{4}\text{dm}\times\frac{12}{4}\text{dm}$, $\frac{20}{2}\text{dm}\times\frac{12}{8}\text{dm}$, $20\text{dm}\times\frac{12}{16}\text{dm}$ 5 种图形

可以归纳出对折 n 次可得出 $n+1$ 种不同图形,每个面积均为 $\frac{20\times 12}{2^n}\text{dm}^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n} S_k = 20\times 12\times\left[\frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{4}\times 3 + \frac{1}{8}\times 4 + \cdots + \frac{1}{2^n}\times(n+1)\right]$

记 $T_n = \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n+1}{2^n}$, 则 $\frac{1}{2}T_n = \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n+1}{2^{n+1}}$

$T_n - \frac{1}{2}T_n = 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}}$.

$T_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}$，$n=1$ 时也成立，$\therefore \sum_{k=1}^{n} S_k = 240 \times \left(3 - \frac{n+3}{2^n}\right)(dm^2)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1, n \text{ 为奇数}, \\ a_n + 2, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

（1）记 $b_n = a_{2n}$，写出 b_1, b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求$\{a_n\}$的前 20 项和.

解：（1）$b_1 = a_2 = a_1 + 1 = 2$

$b_2 = a_4 = a_3 + 1 = a_2 + 2 + 1 = 5$

由 $b_{n+1} = a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1 = a_{2n} + 2 + 1 = a_{2n} + 3$

得 $b_{n+1} - b_n = a_{2n} + 3 - a_{2n} = 3$

所以$\{b_n\}$是首项为 2，公差为 3 的等差数列

所以 $b_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$

（2）由（1）知数列$\{a_n\}$的奇数列与偶数项都是以 3 为公差的等差数列.

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

则 $S_{20} = (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$

$$= 10 + \frac{10 \times 9}{2} \times 3 + 20 + \frac{10 \times 9}{2} \times 3$$

$$= 145 + 155 = 300$$

$\therefore \{a_n\}$的前 20 项的和为 300.

18.（12 分）

某学校组织"一带一路"知识竞赛，有 A，B 两类问题. 每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束. A 类问题中的每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；B 类问题中的每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分.

已知小明能正确回答 A 类问题的概率为 0.8，能正确回答 B 类问题的概率为 0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

解：（1）$X = 0, 20, 100$

$P(X=0) = 1 - 0.8 = 0.2 = \frac{1}{5}$

$P(X=20) = 0.8 \times 0.4 = \frac{4}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25}$

$P(X=100) = 0.8 \times 0.6 = \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{25}$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	20	100
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{12}{25}$

（2）若小明先回答 A 类问题期望有 $E(X)$.

$$E(X)=0\times\frac{1}{5}+20\times\frac{8}{25}+100\times\frac{12}{25}=\frac{1360}{25}$$

记若小明先回答 B 类问题，Y 为小明的累计得分.

$Y=0,80,100$

$$P(Y=0)=1-0.6=0.4=\frac{2}{5}$$

$$P(Y=80)=0.6\times0.2=\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$$

$$P(Y=100)=0.6\times0.8=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$$

$$\therefore E(Y)=0\times\frac{2}{5}+80\times\frac{3}{25}+100\times\frac{12}{25}=\frac{1440}{25}$$

$\because E(X)<E(Y)$

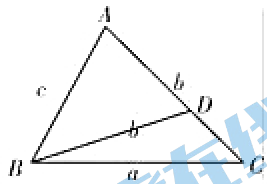
$\therefore$ 小明应选择先回答 B 类问题

19.（12 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $b^2=ac$，点 D 在边 AC 上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若 $AD=2DC$，求 $\cos\angle ABC$.



解：（1）由条件知 $BD\leqslant m<BAC=a\leqslant MC\Rightarrow BD\cdot b=ac$

又 $ac=b^2$，则 $BD\cdot b=b^2\Rightarrow BD=b$.

（2）若 $AD=2DC$，则 $AD=\frac{2}{3}b$，$DC=\frac{1}{3}b$.

$$\text{则}\begin{cases}AB^2=BD^2+AD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB\\BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot DC\cdot\cos\angle BDC\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c^2=b^2+\frac{4}{9}b^2-2\cdot b\cdot\frac{2}{3}b\cdot\cos\angle ADB & ①\\a^2=b^2+\frac{1}{9}b^2-2b\cdot\frac{1}{3}b\cdot\cos\angle BDC & ②\end{cases}$$

① + ② $\times 2\Rightarrow 3c^2+6a^2=11b^2$ 又 $b^2=ac$

$3c^2+6a^2=11ac$

$$3\times\left(\frac{c}{a}\right)+6\left(\frac{a}{c}\right)=11$$

令 $t=\frac{c}{a}$

$3t+\frac{6}{t}=11$　$3t^2-11t+6=0$

$(3t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=\frac{2}{3}$ 或 $t=3$

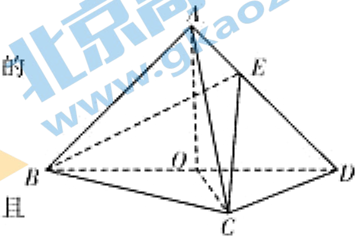
当 $t=3$ 时，$c=3a$，$b=\sqrt{3}a$

此时 $a+\sqrt{3}a<3a$

$\therefore t = \dfrac{2}{3}$

$\cos\angle ABC = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t} - 1\right) = \dfrac{7}{12}$

20. （12 分）



如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD \perp$ 平面 BCD，$AB = AD$，O 为 BD 的中点.

（1）证明：$OA \perp CD$；

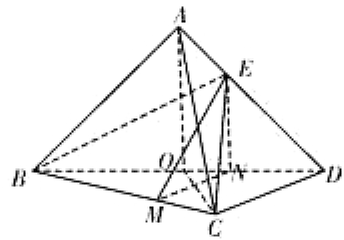
（2）若 $\triangle OCD$ 是边长为 1 的等边三角形，点 E 在棱 AD 上，$DE = 2EA$，且二面角 $E-BC-D$ 的大小为 $45°$，求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.

解：（1）在 $\triangle ABD$ 中，$\because AB = AD$，O 为 BD 的中点，

$\therefore AO \perp BD$，$\because$ 面 $ABD \perp$ 面 BCD，面 $ABD \cap$ 面 $BCD = BD$，$AO \subset$ 面 ABD

$\therefore AO \perp$ 面 CBD，$CD \subset$ 面 CBD

$\therefore AO \perp CD$



（2）过点 E 作 $EN \parallel AO$ 交 BD 于 N，

过点 N 作 $NM \parallel CD$ 交 BC 于 M

$\because AO \perp$ 面 CBD，$EN \parallel AO$

$\therefore EN \perp$ 面 CBD

在 $\triangle BCD$ 中，$\because OB = OD = OC = 1$，

$\therefore \angle BCD = 90°$ 即 $DC \perp BC$，

$\therefore NM \parallel CD \quad \therefore NM \perp BC$

$\therefore$ 二面角 $E-BC-D$ 的平面角是 $\angle EMN = 45°$，即 $\triangle EMN$ 是等腰直角三角形，

$\therefore DE = 2AE$，$\therefore ND = 2ON$

$\therefore MN = \dfrac{2}{3}CD = \dfrac{2}{3} = EN$

$\therefore EN = ND = \dfrac{2}{3}$

$\therefore AO = OD = 1$

$\therefore V_{A-BCD} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot AO = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

21. （12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1(-\sqrt{17},0)$，$F_2(\sqrt{17},0)$，点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2|$，记 M 的轨迹为 C.

（1）求 C 的方程；

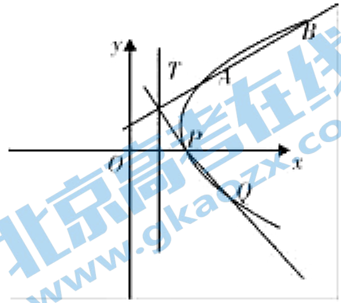
（2）设点 T 在直线 $x = \dfrac{1}{2}$ 上，过 T 的两条直线分别交 C 于 A，B 两点和 P，Q 两点，且 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$，求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

解：（1）$C = \sqrt{17}$，$|MF_1| - |MF_2| = 2a = 2 \Rightarrow a = 1$

又 $c^2 = a^2 + b^2$，则 $b^2 = 16$，则 $x^2 - \dfrac{y^2}{16} = 1\ (x \geqslant 1)$

（2）设 $T\left(\frac{1}{2},M\right)$ 直线 AB 倾斜角为 θ_1

直线 PQ 倾斜角为 θ_2



则直线 AB 参数方程

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + t\cos\theta_1 \\ y = m + t\sin\theta_1 \end{cases}$$ 与 $x^2 - \dfrac{y^2}{16} = 1(x \geqslant 1)$ 联立

则 $(16\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1)t^2 + (16\cos\theta_1 - 2\sin\theta_1)t - (m^2 + 12) = 0$

则 $|TA||TB| = \dfrac{-(m^2+12)}{16\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1}$

同理 $|TP||TQ| = \dfrac{-(m^2+12)}{16\cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_2} \Rightarrow 16\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1 = 16\cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_2$

$\Rightarrow \cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2$ 又 AB 与 TQ 为不同直线，则 $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2$

于是 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ 则 $k_1 + k_2 = 0$.

22. (12 分)

已知函数 $f(x) = x(1 - \ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 设 a,b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a - a\ln b = a - b$，证明：$2 < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} < e$.

解：(1) 首先 $x > 0$，$f'(x) = -\ln x$

当 $x \in (0,1)$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)$ 递增；当 $x \in (1,+\infty)$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 递减

观察端点 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0.$

令 $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续

容易发现 $f(e) = 0$.

(2) $b\ln a - a\ln b = a - b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b}\ln\dfrac{1}{b}$

令 $x_1 = \dfrac{1}{a}, x_2 = \dfrac{1}{b}$. $x_1 \neq x_2$. 不妨设 $x_1 < x_2$

则由(1)知：$0 < x_1 < 1 < x_2 < e$

待证结论 $\Leftrightarrow 2 < x_1 + x_2 < e$.

下面证明：$x_1 + x_2 > 2$

令 $g(x) = f(x) - f(2-x)$，$x \in (0,1)$，$g'(x) = -\ln(x(2-x)) > 0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增. $\therefore 0 = g(1) > g(x_1) = f(x_1) - f(2 - x_1)$

即 $f(2 - x_1) > f(x_1) = f(x_2)$

又 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递减. $\therefore 2 - x_1 < x_2$，即 $x_1 + x_2 > 2$.

方法一：再证明：$x_1 + x_2 < e$.

当 $x_2 \leqslant e - 1$ 时，结论显然.

当 $x_2 \in (e-1,e)$ 时，$x_1 < e - x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(e - x_2) \Leftrightarrow f(x_2) < f(e - x_2)$，$x_2 \in (e-1,e)$

令 $h(x) = f(x) - f(e - x)$，$x \in (e-1,e)$

$h'(x) = -\ln(x(e-x))$，而 $k(x) = x(e-x) \in (0, e-1)$，则 $k(x)$ 递减.

则 $h(x)$ 在 $(e-1, e)$ 上先减后增，故 $h(x) < \max\{h(e-1), h(e)\}$

$h(e-1) = (e-1)(1-\ln(e-1)) - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{e-1} < \frac{1}{e-1} - 1$ 显然成立.

故 $h(x) < 0, \forall x \in (e-1, e)$

则 $h(x_2) < 0$，即 $f(x_2) < f(e-x_2)$

故 $f(x_1) < f(e-x_2)$，结合 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递增，有 $x_1 < e - x_2$ 即 $x_1 + x_2 < e$. 证毕

方法二：$f(x)$ 在 $(e,0)$ 的切线 $\varphi(x) = e - x$

令 $F(x) = f(x) - \varphi(x) = 2x - x\ln x - e, x \in (0, e)$

$F'(x) = 1 - \ln x > 0$，$\therefore F(x)$ 递增，$F(x) < F(e) = 0$

$\therefore x \in (0, e)$，$f(x) < \varphi(x)$

令 $t = f(x_1) = f(x_2)$，则 $t = f(x_2) < \varphi(x_2) = e - x_2$

$\Rightarrow t + x_2 < e$.

又 $t = f(x_1) = x_1(1 - \ln x_1) \quad x_1 \in (0,1)$

$\therefore t = x_1(1 - \ln x_1) > x_1$

即 $x_1 + x_2 < t + x_2 < e$. 证毕

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。