2024 年高考数学仿真模拟卷(二)（新高考专用）

解析

(时间：120 分钟　满分：150 分)

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1．答案　A

解析　由 $z(1+2\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$ 得 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(3+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}=1+\mathrm{i}$，故其在复平面内对应的点为(1,1)，在第一象限．

2.答案　A

解析　由题意得，$U=\{2,3,4,5\}$，又 $A=\{2,3\}$，则 $\complement_U A=\{4,5\}$，因为 $B=\{2,4,5\}$，所以$(\complement_U A)\cap B=\{4,5\}$．

3.答案　B

解析　充分性证明：取 $0>(a+1)^3>(b+1)^3$，则 $0>a>b$，由于对数的真数大于 0，所以无法推出 $\lg a>\lg b$，所以充分性不成立；

必要性证明：$\lg a>\lg b\Rightarrow a>b>0$，可得 $a+1>b+1\Rightarrow(a+1)^3>(b+1)^3$，所以必要性成立．

4.答案　D

解析　因为 $\tan\alpha=2$，所以 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\alpha$为锐角，所以 $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，且$\alpha>\dfrac{\pi}{4}$.

因为α，β为锐角，$\alpha>\dfrac{\pi}{4}$，所以$\dfrac{\pi}{4}<\alpha+\beta<\pi$，又 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，

故 $\cos\beta=\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\cos\dfrac{3\pi}{4}\cos\alpha+\sin\dfrac{3\pi}{4}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

5.答案　B

解析　设有 n 个碳质骨架，$n\in\mathbf{N}^*$，由已知可得 $n+1+2+3+\cdots+(n-1)+n\geqslant180$，

如果只有 $n-1$ 个碳质骨架，则骨架总数少于 180，所以$(n-1)+1+2+3+\cdots+(n-1)<180$，

所以 $n^2+3n\geqslant360$，且 $n^2+n<362$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n=18$，

所以共有碳质骨架 18 个，故竹质骨架有 162 个．

6.答案　A

解析　不妨设双曲线的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，则$|PF_2|=\dfrac{\dfrac{b}{a}\times c}{\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}=b$，$|OF_2|=c$，

$\therefore|OP|=\sqrt{|OF_2|^2-|PF_2|^2}=a$，$|PF_1|=3|OP|=3a$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle POF_2$ 中，$\cos\angle PF_2O=\dfrac{|PF_2|}{|OF_2|}=\dfrac{b}{c}$，

∵在△PF_1F_2中，$\cos\angle PF_2O=\dfrac{|PF_2|^2+|F_1F_2|^2-|PF_1|^2}{2|PF_2||F_1F_2|}=\dfrac{b}{c}$，

∴$\dfrac{b^2+4c^2-(3a)^2}{2b\cdot 2c}=\dfrac{b}{c}$，即 $c^2=6a^2$，∴$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{6}$.

7.答案　A

解析　由题意设 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}=(1,0)$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=(m,n)$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=(x,y)$，

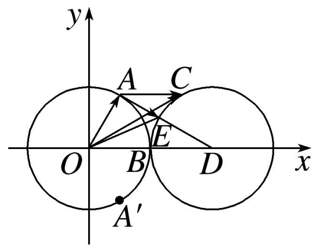
因为 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\dfrac{1}{2}$，则$(m,n)\cdot(m-1,n)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+n^2=\dfrac{3}{4}$，且 $m^2+n^2=1$，

解得 $m=\dfrac{1}{2}$，$n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或 $n=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=0$，$(1-x,-y)\cdot(3-x,-y)=(x-2)^2+y^2-1=0\Rightarrow(x-2)^2+y^2=1$，

即 $\boldsymbol{c}$ 的终点 C 在以 $D(2,0)$为圆心，1 为半径的圆上，故$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|=|\overrightarrow{CA}|$，

由圆的对称性，不妨令 $n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\boldsymbol{a}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，连接 AD 交圆于点 E，

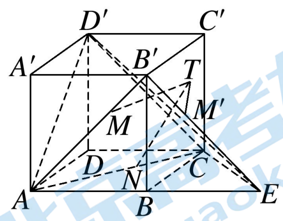


如图所示，由点与圆的位置关系可知

$|\overrightarrow{CA}|\geqslant|\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AD}|-|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}-2\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-1=\sqrt{3}-1$.

8.答案　B

解析　设 A 点关于 BC 的对称点为 E，M 点关于 BB' 的对称点为 M'，连接 $M'T$，如图，



记 d 为直线 EB' 与 AC 之间的距离，则$|MT|+|NT|=|M'T|+|NT|\geqslant|M'N|\geqslant d$，

由 $B'E\parallel D'C$，得 d 为 E 到平面 ACD' 的距离，

因为 $V_{D'-ACE}=\dfrac{1}{3}\times1\times S_{\triangle ACE}=\dfrac{1}{3}\times1\times1=\dfrac{1}{3}$，

而 $V_{D'-ACE}=V_{E-ACD'}=\dfrac{1}{3}\times d\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{6}d$，故 $d=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

二、选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的．全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分)

9．答案　BC

解析　由直方图，分数落在[60,70)的频率为 $1-(0.005+0.015+0.03+0.025+0.01)\times10=0.15$，

所以分数落在[60,70)的频数为 $300\times0.15=45$，A 错误；

由于分数落在[70,80)的频率为 0.3，为各组最大，故样本的众数为 75，B 正确；

样本平均数为 $0.05\times45+0.15\times55+0.15\times65+0.3\times75+0.25\times85+0.1\times95=73.5$，C 正确；

由 $0.05+0.15+0.15+0.3=0.65<0.8<0.05+0.15+0.15+0.3+0.25=0.9$，

所以第 80 百分位数在[80,90)内，设为 x，则 $0.65+0.025\times(x-80)=0.8$，解得 $x=86$，D 错误．

10.答案　ACD

解析　由题意可得 $P(A)=\dfrac{3}{8}$，$P(B)=\dfrac{3}{8}$，$P(C)=\dfrac{1}{4}$，显然事件 A，B，C 是两两互斥的事件，故 A 正确；

$P(DA)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{9}=\frac{6}{72}$，$P(D)=P(DA)+P(DB)+P(DC)=\frac{3}{8}\times\frac{2}{9}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{9}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}=\frac{19}{72}$，

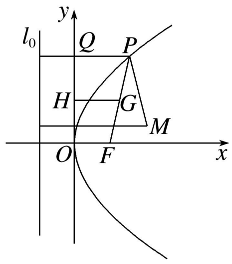
因为 $P(DA)\neq P(A)P(D)$，故事件 A 与事件 D 不是相互独立事件，故 B 错误，D 正确；

$P(D|A)=\frac{2}{9}$，故 C 正确.

11.答案　BCD

解析　对于 A，因为抛物线 $y^2=2px$ 的准线为 l_0：$x=-\frac{p}{2}$，当点 P 运动到点$(2,\ t)$时，设点 P 到 l_0 的距离为 d，

则$|PF|=d=2+\frac{p}{2}=4$，解得 $p=4$，所以抛物线的方程为 $y^2=8x$，焦点 $F(2,0)$，准线 l_0：$x=-2$，故 A 错误；



对于 B，若 $y=1$，则 $1=8x$，解得 $x=\frac{1}{8}<4$，

即点 $M(4,1)$在抛物线内，如图，可得$|PM|+|PF|=|PM|+d\geq 4+2=6$，

过点 $M(4,1)$作 l_0 的垂线，当且仅当点 P 为垂线与抛物线的交点时，

等号成立，故 B 正确；

对于 C，设 PF 的中点为 G，过点 P，点 G 分别作 y 轴的垂线，垂足为点 Q，点 H，则$|GH|=\frac{|OF|+|PQ|}{2}$，

因为$|OF|=2$，可得$|GH|=\frac{2+|PQ|}{2}=\frac{d}{2}=\frac{1}{2}|PF|$，所以以 PF 为直径的圆与 y 轴相切，故 C 正确；

对于 D，易知直线 AB 斜率存在，设直线 AB：$x=my+n$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，

联立方程$\begin{cases}x=my+n,\\ y^2=8x,\end{cases}$　消去 x 得 $y^2-8my-8n=0$，

则$\Delta=64m^2+32n>0$，$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-8n$，

可得$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{64m^2+32n}=4\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{2m^2+n}$，

$x_1+x_2=(my_1+n)+(my_2+n)=m(y_1+y_2)+2n=8m^2+2n$，即 AB 的中点 $D(4m^2+n,4m)$，

若以 AB 为直径的圆与抛物线的准线相切，则$\frac{1}{2}|AB|=4m^2+n+2$，

即 $2\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{2m^2+n}=4m^2+n+2$，整理得 $n^2-4n+4=0$，即 $n=2$，此时$\Delta=64m^2+64>0$，满足题意，

此时直线 AB：$x=my+2$ 过焦点 $F(2,0)$，故 D 正确.

12.答案　CD

解析　因为 $f\left(2x+\frac{5}{2}\right)$为偶函数，所以 $f\left(-2x+\frac{5}{2}\right)=f\left(2x+\frac{5}{2}\right)$，

令$-2x+\frac{5}{2}=t$，则 $2x=\frac{5}{2}-t$，所以 $f(t)=f(5-t)$，即 $f(x)=f(5-x)$，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=\frac{5}{2}$对称，

所以 $f(0)=f(5)$，所以 D 正确；

由 $f(x)=f(5-x)$，得 $f'(x)=-f'(5-x)$，所以 $g(x)=-g(5-x)$，所以 $g(x)+g(5-x)=0$，

所以 $g(x)$的图象关于点$\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$对称，因为 $g\left(\frac{3}{2}-x\right)$为奇函数，所以 $g\left(\frac{3}{2}+x\right)=-g\left(\frac{3}{2}-x\right)$，所以 $g(x)$的图象关于点$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$对称，所以 $g(x)$的一个周期为 $2\times\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)=2$，因为 $g(x)$的图象关于点$\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$对称，所以 $g\left(\frac{5}{2}+x\right)+g\left(\frac{5}{2}-x\right)=0$，

令 $x=0$，则 $g\left(\frac{5}{2}\right)=0$，所以 $g\left(\frac{5}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}+2\right)=0$，所以 $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$，所以 C 正确；

因为 $g(x)$的周期为 2，所以 $g(-2)=g(0)$，因为 $g(x)$的图象关于$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$对称，所以 $g(3)=-g(0)$，所以 $g(-2)=g(3)$ 不一定成立，所以 B 错误；

由 $g\left(\frac{3}{2}+x\right)=-g\left(\frac{3}{2}-x\right)$，且 $g(x)$周期为 2，可得 $f'\left(\frac{3}{2}+x\right)=-f'\left(\frac{3}{2}-x\right)=f'\left(-\frac{1}{2}+x\right)$，

所以 $f\left(-\frac{1}{2}+x\right)=f\left(\frac{3}{2}-x\right)+C$($C$ 为常数)，所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)+C$，此式不一定为零，所以 A 错误.

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．**答案**　-40

解析　$(x+2y)^5(x-3y)=x(x+2y)^5-3y(x+2y)^5$，

$(x+2y)^5$ 展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k\cdot x^{5-k}\cdot(2y)^k=C_5^k\cdot 2^k\cdot x^{5-k}y^k$，$k=0,1,\cdots,5$.

令 $k=3$，得 $T_4=C_5^3\cdot 2^3\cdot x^2\cdot y^3=80x^2y^3$，令 $k=2$，得 $T_3=C_5^2\cdot 2^2\cdot x^3\cdot y^2=40x^3y^2$，

对于 $x(x+2y)^5$，x^3y^3 的系数为 80，对于 $-3y(x+2y)^5$，x^3y^3 的系数为 -120，

所以$(x+2y)^5(x-3y)$的展开式中 x^3y^3 的系数为 $80-120=-40$.

14.**答案**　9

解析　将直线 l 的方程整理可得 $k(x-2)-y+2=0$，易知直线恒过定点$(2,2)$；

圆心 $C(0,\ -1)$，半径 $R=4$；所以当直线过圆心时弦长取最大值，此时弦长为直径 $2R=8$；

易知，当圆心 $C(0,\ -1)$与$(2,2)$的连线与直线 l 垂直时，弦长最小，如图所示，

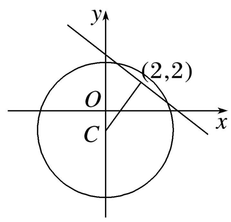
此时弦长为 $2\sqrt{R^2-(2^2+3^2)}=2\sqrt{3}$，

所以截得的弦长为整数可取 4,5,6,7,8；

由对称性可知，当弦长为 4,5,6,7 时，各对应两条，共 8 条，

当弦长为 8 时，只有直径 1 条，

所以满足条件的直线 l 共有 9 条.



15.**答案**　4π

解析　设圆柱的底面半径为 r，高为 h，

因为圆柱的侧面积为 2π，所以 $2\pi rh=2\pi$，得 $rh=1$，

设圆柱的外接球半径为 R，则 $R^2=r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2\geq 2r\cdot\frac{h}{2}=rh=1$，

当且仅当 $r=\frac{h}{2}$，即 $h=\sqrt{2}$，$r=\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立，所以 R^2 的最小值为 1，

所以外接球的表面积 S 的最小值为 $4\pi R^2=4\pi$.

16.**答案**　$\left(\frac{1}{e},\ +\infty\right)$

解析　因为 $kx(e^{kx}+1)>(x+1)\ln x$，所以$(e^{kx}+1)\ln e^{kx}>(x+1)\ln x$，①

令 $f(x)=(x+1)\ln x$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}+1+\ln x$，设 $g(x)=f'(x)=\frac{1}{x}+1+\ln x$，所以 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$，

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $f'(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增，所以 $f'(x)\geq f'(1)=2$，所以 $f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增，

因为①式可化为 $f(e^{kx})>f(x)$，所以 $e^{kx}>x$，所以 $k>\frac{\ln x}{x}$，令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0，e)$时，$h'(x)>0$，当 $x\in(e，+\infty)$时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$在$(0，e)$上单调递增，在$(e，+\infty)$上单调递减，

所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$，所以 $k>\frac{1}{e}$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．**解**　(1)因为 $\sin(A-B)\tan C=\sin A\sin B$，所以 $\sin(A-B)\frac{\sin C}{\cos C}=\sin A\sin B$，

所以 $\sin(A-B)\sin C=\sin A\sin B\cos C$，即 $\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C=\sin A\sin B\cos C$，

由正弦定理可得 $ac\cos B-bc\cos A=ab\cos C$，

由余弦定理的推论可得 $ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

所以 $a^2+c^2-b^2-b^2-c^2+a^2=a^2+b^2-c^2$，即 $a^2+c^2=3b^2$，

所以$\frac{a^2+c^2}{b^2}=3$.

(2)由题意可知 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{2}{3}$，又 $a^2+c^2=3b^2$，可得 $a^2+c^2-2ac=0$，

所以 $a=c$，即$\triangle ABC$ 为等腰三角形，

由 $\cos B=2\cos^2\frac{B}{2}-1=\frac{2}{3}$，解得 $\cos\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$或 $\cos\frac{B}{2}=-\frac{\sqrt{30}}{6}$，

因为 $B\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，所以$\frac{B}{2}\in\left(0，\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\cos\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$，

所以 $\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

18.**解**　(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq0)$，由题意可知$\begin{cases}a_1+d=3,\\a_5^2=a_3a_8,\end{cases}$

即$\begin{cases}a_1+d=3,\\(a_1+4d)^2=(a_1+2d)(a_1+7d),\end{cases}$　解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=1,\end{cases}$

所以 $a_n=n+1$.

(2)由(1)可知，$b_n=a_n\cos\frac{\pi a_n}{2}=(n+1)\cos\frac{(n+1)\pi}{2}$，

对于任意 $k\in\mathbf{N}^*$，有 $b_{4k-3}=-4k+2$，$b_{4k-2}=0$，$b_{4k-1}=4k$，$b_{4k}=0$，

所以 $b_{4k-3}+b_{4k-2}+b_{4k-1}+b_{4k}=2$，

故数列$\{b_n\}$的前 2 023 项和为:

$(b_1+b_2+b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7+b_8)+\cdots+(b_{2021}+b_{2022}+b_{2023}+b_{2024})-b_{2024}=506\times2-0=1012$.

19.**解**　(1)因为 $AB=\sqrt{2}$，$BD=BC=2$，

所以 BD 不可能为四边形 $ABCD$ 的对称轴，则 AC 为四边形 $ABCD$ 的对称轴，

所以 AC 垂直平分 BD，所以 $A'O\perp BD$，$CO\perp BD$.

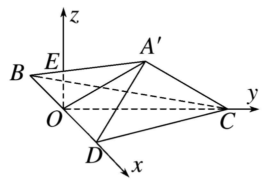
且 $A'O\subset$ 平面 $A'OC$，$CO\subset$ 平面 $A'OC$，$A'O\cap CO=O$，所以 $BD\perp$ 平面 $A'OC$.

所以点 B 到平面 $A'OC$ 的距离 $d=\frac{1}{2}BD=1$.

(2)存在点 P，使得直线 BA' 与平面 POC 所成角的正弦值为$\frac{1}{4}$.理由如下：

过 O 作 $OE\perp$ 平面 BCD，所以 OD，OE，OC 两两互相垂直.

以 O 为原点，OD，OC，OE 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图所示，



由(1)得平面 $BCD\perp$ 平面 $A'OC$，因为 $OA'=1$，$OC=\sqrt{3}$，$A'C=1$，

所以 $A'\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$D(1,0,0)$，$O(0,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},\ 0)$，$B(-1,0,0)$.

设$\overrightarrow{A'P}=\lambda\overrightarrow{A'D}=\left(\lambda,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\ -\frac{1}{2}\lambda\right)(\lambda\in[0,1])$，

则$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'P}=\left(\lambda,\ \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda\right)$，$\overrightarrow{OC}=(0,\sqrt{3},\ 0)$，

设平面 POC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}=0,\end{cases}$ 所以$\begin{cases}y=0,\\ \lambda x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda\right)y+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda\right)z=0,\end{cases}$ 令 $z=2\lambda$，则 $x=\lambda-1$，

所以平面 POC 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(\lambda-1,0,2\lambda)$，

设直线 BA' 与平面 POC 所成角为θ，$\overrightarrow{BA'}=\left(1,\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，

$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BA'},\ \boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BA'}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BA'}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|\lambda-1+\lambda|}{\sqrt{2}\times\sqrt{(\lambda-1)^2+4\lambda^2}}=\frac{1}{4}$.

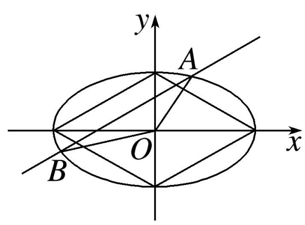
解得$\lambda=\frac{1}{3}$或$\lambda=\frac{7}{9}$，所以存在点 P，使得直线 BA' 与平面 POC 所成角的正弦值为$\frac{1}{4}$.

$\frac{A'P}{A'D}$的值为$\frac{1}{3}$或$\frac{7}{9}$.

20.(1)**解**　由椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，可设 $a=\sqrt{2}t$，$c=t(t>0)$，则 $b=t$.

四个顶点构成的四边形为菱形，其面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot2a\cdot2b=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2}t\cdot2t=2\sqrt{2}t^2=2\sqrt{2}$，

即 $t=1$，所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.



(2)**证明**　$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=\frac{1}{2}|m|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$，

联立直线 $y=kx+m$ 与椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，消去 y 可得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

$\Delta=(4km)^2-4(1+2k^2)(2m^2-2)=16k^2-8m^2+8>0$，$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{1+2k^2}$，

得 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|m|\cdot\sqrt{\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)^2-4\cdot\frac{2m^2-2}{1+2k^2}}=|m|\cdot\frac{\sqrt{4k^2-2m^2+2}}{1+2k^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

整理得 $2m^2=2k^2+1$，

而 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{4km}{1+2k^2}\right)^2-2\cdot\frac{2m^2-2}{1+2k^2}=2$，

所以 $x_1^2+x_2^2$ 为定值.

21.(1)**解**　由题意可知，随机变量 X 的可能取值为 3,4,5,6,

$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(X=4)=C_3^1\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，$P(X=5)=C_3^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，$P(X=6)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

所以随机变量 X 的分布列为

X	3	4	5	6
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

所以 $E(X)=3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}+6\times\frac{1}{8}=\frac{9}{2}$.

(2)**证明**　依题意，当 $1\leqslant n\leqslant 98$ 时，棋子要到第 $(n+1)$ 站，有两种情况：

由第 n 站跳 1 站得到，其概率为 $\frac{1}{2}P_n$；由第 $(n-1)$ 站跳 2 站得到，其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$.

所以 $P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}P_{n-1}$.

同时减去 P_n 得 $P_{n+1}-P_n=-\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{2}P_{n-1}=-\frac{1}{2}(P_n-P_{n-1})(1\leqslant n\leqslant 98)$.

(3)**解**　依照(2)的分析，

棋子落到第 99 站的概率为 $P_{99}=\frac{1}{2}P_{98}+\frac{1}{2}P_{97}$,

由于若跳到第 99 站时，自动停止游戏，故有 $P_{100}=\frac{1}{2}P_{98}$.

所以 $P_{100}<P_{99}$，即最终棋子落在第 99 站的概率大于落在第 100 站的概率，游戏不公平.

22.(1)**解**　$f'(x)=m+1-\frac{m}{x}=\frac{(m+1)x-m}{x}$，$x\in(0，+\infty)$，

①当 $m+1=0$，即 $m=-1$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}>0$，$f(x)$是$(0，+\infty)$上的增函数；

②当 $m+1<0$，即 $m<-1$ 时，

令 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{m}{m+1}$，令 $f'(x)<0$，得 $x>\frac{m}{m+1}$，

所以 $f(x)$在区间$\left(0，\frac{m}{m+1}\right)$上单调递增，在区间$\left(\frac{m}{m+1}，+\infty\right)$上单调递减；

③当 $m+1>0$，即 $m>-1$ 时，

若 $-1<m\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$是$(0，+\infty)$上的增函数.

若 $m>0$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{m}{m+1}$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{m}{m+1}$，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\ \dfrac{m}{m+1}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{m}{m+1},\ +\infty\right)$ 上单调递增.

综上，当 $m<-1$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\ \dfrac{m}{m+1}\right)$ 上单调递增，在区间 $\left(\dfrac{m}{m+1},\ +\infty\right)$ 上单调递减；

当 $-1\leqslant m\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 是 $(0,\ +\infty)$ 上的增函数；

当 $m>0$ 时，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\ \dfrac{m}{m+1}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\dfrac{m}{m+1},\ +\infty\right)$ 上单调递增.

(2)证明 要证 $f(x)<e^{x-1}$，即证 $e^{x-1}-m(x-1)>x-m\ln x$，即证 $e^{x-1}-m(x-1)>e^{\ln x}-m\ln x$.

令 $g(x)=x-1-\ln x$，$x>1$，则 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}>0$，

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,\ +\infty)$ 上单调递增，所以当 $x>1$ 时，$g(x)>g(1)=0$，即当 $x>1$ 时，$x-1>\ln x$.

令 $h(x)=e^x-mx$，$x>0$，则 $h'(x)=e^x-m>0$ 在 $m\leqslant 1$ 时恒成立，

所以当 $m\leqslant 1$，且 $x>0$ 时，$h(x)$ 单调递增，

因为当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$\ln x>0$，且 $x-1>\ln x$，

所以当 $m\leqslant 1$，且 $x>1$ 时，$h(x-1)>h(\ln x)$，

即 $e^{x-1}-m(x-1)>e^{\ln x}-m\ln x$.

所以当 $m\leqslant 1$，且 $x>1$ 时，$f(x)<e^{x-1}$.