通州区 2023—2024 学年高三年级摸底考试

数学试卷

2024 年 1 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant x<2\}$，则 $A\cup B=$

(A) $\{0,1\}$　(B) $\{1,2,3\}$　(C) $\{0,1,2,3\}$　(D) $\{-1,0,1,2,3\}$

(2) 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=1-3\mathrm{i}$，则复数 $|z|=$

(A) $\sqrt{3}$　(B) $\sqrt{5}$　(C) $2\sqrt{2}$　(D) $\sqrt{10}$

(3) 已知双曲线的左、右焦点分别为 $F_1(-3,0)$，$F_2(3,0)$，P 为双曲线上一点，且 $\big||PF_2|-|PF_1|\big|=2$，则双曲线的标准方程为

(A) $x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$　(B) $x^2-\dfrac{y^2}{10}=1$　(C) $\dfrac{y^2}{8}-x^2=1$　(D) $\dfrac{y^2}{10}-x^2=1$

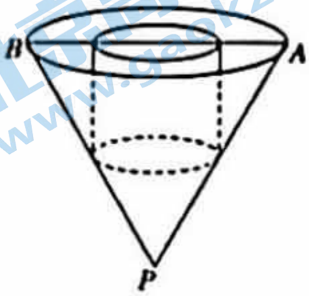
(4) 下列函数中，是偶函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$　(B) $f(x)=-\log_2 x$　(C) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$　(D) $f(x)=|\cos x|$

(5) 如图，已知某圆锥形容器的轴截面 $\triangle PAB$ 为等边三角形，其边长为 4，在该容器内放置一个圆柱，使得圆柱上底面的所在平面与圆锥底面的所在平面重合. 若圆柱的高是圆锥的高的 $\dfrac{1}{2}$，则圆柱的体积为

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$　(B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

(C) $\sqrt{3}\pi$　(D) $2\sqrt{3}\pi$



(6) 已知函数 $f(x)=x^2-2x+c\,(c\in\mathbf{R})$，则“$\exists x\in\mathbf{R}$，$f(x)<0$”是“$c<3$”的

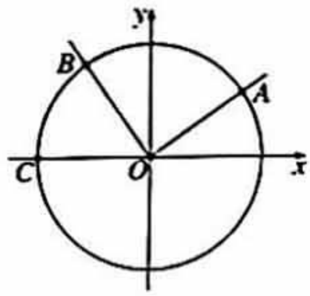
(A) 充分而不必要条件　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　(D) 既不充分也不必要条件

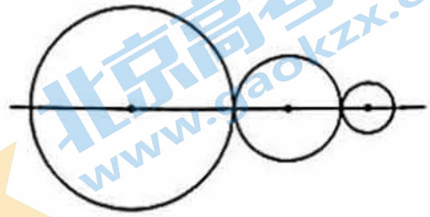
(7) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 和 β 的顶点都与原点重合，始边都与 x 轴的非负半轴重合，终边分别与单位圆交于 A，B 两点. 若 $A\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$，$C(-1,0)$，$\angle BOC=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\cos(\beta-\alpha)=$

(A) $\dfrac{-4-3\sqrt{3}}{10}$　(B) $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$

(C) $\dfrac{-4+3\sqrt{3}}{10}$　(D) $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$



(8)现有 12 个圆，圆心在同一条直线上，从第 2 个圆开始，每个圆都与前一个圆外切，从左到右它们的半径的长依次构成首项为 16，公比为$\frac{1}{2}$的等比数列，前 3 个圆如图所示．若点 P，Q 分别为第 3 个圆和第 10 个圆上任意一点，则 $|PQ|$ 的最大值为



(A)$\frac{255}{32}$　　(B)$\frac{255}{16}$

(C)$\frac{127}{8}$　　(D)$\frac{255}{8}$

(9)在菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E 是 BC 的中点，F 是 CD 上一点(不与 C，D 重合)，DE 与 AF 交于 G，则$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{DG}$的取值范围是

(A)$(0,\frac{2}{3})$　　(B)$(0,\frac{4}{3})$　　(C)$(0,2)$　　(D)$(0,3)$

(10)已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0,\\ |2x+1|, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 实数 a，b，m 满足 $a\leqslant m\leqslant b$．若对任意的 m，总有不等式 $f(m)+m\leqslant 3$ 成立，则 $b-a$ 的最大值为

(A)$\frac{8}{3}$　　(B)$\frac{10}{3}$　　(C)4　　(D)6

第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11)已知函数 $f(x)=2^x+\log_2(x+3)$，则 $f(-2)=$________．

(12)在$(x^2-\frac{1}{x})^5$ 的展开式中，x 的系数为________．

(13)在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且 $a=b\cos C+\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B$，则 $B=$________；若$\triangle ABC$的面积 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$，$a+c=5$，则 $b=$________．

(14)已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $P(m,n)$为 C 上一点且在第一象限，以 F 为圆心，FP 为半径的圆交 C 的准线于 A，B 两点．若 $n=4$，则圆 F 的方程为________；若 $PA\perp AB$，则 $m=$________．

(15)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $2S_n=3(a_n-2)$，数列$\{b_n\}$是公差不为 0 的等差数列，且满足 $b_1=\frac{1}{2}a_1$，b_4 是 b_1 和 b_{13}的等比中项．给出下列四个结论：

①数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2\times 3^n$；

②数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$前 21 项的和为$\frac{14}{45}$；

③数列$\{b_n\}$中各项先后顺序不变，在 b_m 与 b_{m+1}($m\in\mathbf{N}^*$)之间插入 2^m 个 2，使它们和原数列的项构成一个新数列，则新数列的前 100 项和为 236；

④设数列$\{c_n\}$的通项公式 $c_n=\begin{cases}1, & n\neq 2^k,\\ a_k, & n=2^k,\end{cases}$ $k\in\mathbf{N}^*$，则数列$\{c_n-1\}$的前 100 项和为 2178．

其中所有正确结论的序号是________．

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\cos^2 x$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间;

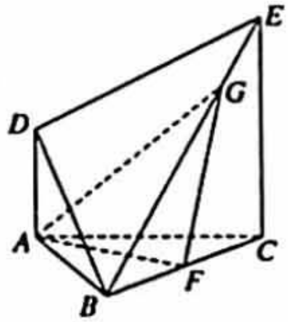
(Ⅱ)若 $f(x_0)=1$，且 $x_0\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，求 x_0 的值.

(17)(本小题 13 分)

如图，在多面体 $ABCDE$ 中，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$AD\parallel CE$，$AC\perp CE$，$AC=CE=2AD=2$. 点 F 为 BC 的中点，再从下面给出的条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.

(Ⅰ)求证：$AF\perp$ 平面 BCE;

(Ⅱ)设点 G 为 BE 上一点，且 $BG=\frac{2}{3}BE$，求直线 AC 与平面 AFG 所成角的正弦值.



条件①：平面 $ACED\perp$ 平面 ABC;

条件②：$BE=2\sqrt{2}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

(18)(本小题 14 分)

民航招飞是指普通高校飞行技术专业(本科)通过高考招收飞行学生，报名的学生参加预选初检、体检鉴定、飞行职业心理学检测、背景调查、高考选拔等 5 项流程，其中前 4 项流程选拔均通过，则被确认为有效招飞申请，然后参加高考，由招飞院校择优录取. 据统计，每位报名学生通过前 4 项流程的概率依次约为 $\frac{3}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，1. 假设学生能否通过这 5 项流程相互独立. 现有某校高三学生甲、乙、丙三人报名民航招飞.

(Ⅰ)估计每位报名学生被确认为有效招飞申请的概率;

(Ⅱ)求甲、乙、丙三人中恰好有一人被确认为有效招飞申请的概率;

(Ⅲ)根据甲、乙、丙三人的平时学习成绩，预估高考成绩能被招飞院校录取的概率分别为 $\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{3}{5}$，设甲、乙、丙三人能被招飞院校录取的人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

(19)（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=(x-2)e^x$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设函数 $g(x)=f(x)-2ax^2+4ax(a>0)$.

（ⅰ）若 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，求 $g(x)$ 的单调区间；

（ⅱ）若 $g(x)$ 恰有三个零点，求 a 的取值范围.

(20)（本小题 15 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 2，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设椭圆 E 的上、下顶点分别为点 A,B，过点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于不同两点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，且 $y_1>y_2$，直线 AP 与直线 BQ 交于点 N，求证：点 N 在一条定直线上.

(21)（本小题 15 分）

已知数列 $A:a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为有穷正整数数列. 若数列 A 满足如下两个性质，则称数列 A 为 m 的 k 减数列：

①$a_1+a_2+\cdots+a_n=m$；

②对于 $1\leqslant i<j\leqslant n$，使得 $a_i>a_j$ 的正整数对 (i,j) 有 k 个.

（Ⅰ）写出所有 4 的 1 减数列；

（Ⅱ）若存在 m 的 6 减数列，证明：$m>6$；

（Ⅲ）若存在 2024 的 k 减数列，求 k 的最大值.

通州区 2023—2024 学年高三年级摸底考试

数学参考答案及评分标准

2024 年 1 月

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
答案	D	B	A	C	C	A	C	B	B	D

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

(11) $\frac{1}{4}$　　(12) -10　　(13) $\frac{\pi}{3}$；$\sqrt{13}$　　(14) $(x-1)^2+y^2=25$；3　　(15) ①③④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16)（本小题 13 分）

解：(Ⅰ) 因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2x-\cos^2x$，

所以 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$. ……………… 3 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. ……………… 5 分

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{6}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$. ……………… 7 分

(Ⅱ) 因为 $-\frac{\pi}{2}<x_0<\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{7\pi}{6}<2x_0-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$. ……………… 9 分

因为 $f(x_0)=1$，

所以 $\sin(2x_0-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.

所以 $2x_0-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$. ……………… 11 分

所以 $x_0=\frac{\pi}{6}$.

所以 x_0 的值为 $\frac{\pi}{6}$. ……………… 13 分

(17)(本小题 13 分)

解:(Ⅰ)证明:(1)选条件①:平面 $ACED\perp$平面 ABC

因为平面 $ACED\perp$平面 ABC,$AC\perp CE$,平面 $ACED\cap$平面 $ABC=AC$,$CE\subset$平面 $ACED$.

所以 $CE\perp$平面 ABC.

因为 $AF\subset$平面 ABC,

所以 $AF\perp CE$. ………………………………………………………………………… 2 分

因为$\triangle ABC$为等边三角形,点 F 为 BC 的中点,

所以 $AF\perp BC$. ………………………………………………………………………… 3 分

因为 $CE\subset$平面 BCE,$BC\subset$平面 BCE,$CE\cap BC=C$,

所以 $AF\perp$平面 BCE. ……………………………………………………………… 5 分

(2)选条件②:$BE=2\sqrt{2}$

因为 $AC=CE=2AD=2$,

所以 $BC=CE=2$.

因为 $BE=2\sqrt{2}$,

所以$\triangle ABC$为直角三角形.

所以 $BC\perp CE$.

因为 $AC\perp CE$,$AC\cap BC=C$,

所以 $CE\perp$平面 ABC.

因为 $AF\subset$平面 ABC,

所以 $AF\perp CE$. ………………………………………………………………………… 2 分

因为$\triangle ABC$为等边三角形,点 F 为 BC 的中点,

所以 $AF\perp BC$. ………………………………………………………………………… 3 分

因为 $CE\subset$平面 BCE,$BC\subset$平面 BCE,$CE\cap BC=C$,

所以 $AF\perp$平面 BCE. ……………………………………………………………… 5 分

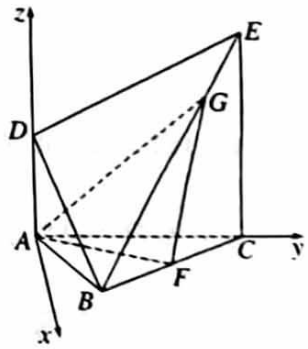
(Ⅱ)因为 $AD/\!/CE$,由(Ⅰ)知 $CE\perp$平面 ABC,

所以 $AD\perp$平面 ABC.

如图,以点 A 为原点,分别以 AC,AD 所在直线为 y 轴、z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

……………………………………………………………………………………………… 6 分

所以 $A(0,0,0)$,$B(\sqrt{3},1,0)$,$E(0,2,2)$,$F(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$,$C(0,2,0)$.



所以$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$,$\overrightarrow{AF}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$,$\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},1,2)$.

因为点 G 为 BE 上一点,设 $G(x,y,z)$,

所以$\overrightarrow{BG}=(x-\sqrt{3},y-1,z)$.

因为 $BG=\frac{2}{3}BE$，所以 $(x-\sqrt{3},y-1,z)=\frac{2}{3}(-\sqrt{3},1,2)$.

所以 $x=\frac{\sqrt{3}}{3},y=\frac{5}{3},z=\frac{4}{3}$.

所以 $G(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{3})$. …………………………………………………………… 7 分

所以 $\overrightarrow{AG}=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{5}{3},\frac{4}{3})$.

设平面 AFG 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

所以 $\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}=0$.

所以 $\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0,\\ \frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{5}{3}y+\frac{4}{3}z=0.\end{cases}$ 令 $y=-1$，得 $x=\sqrt{3},z=\frac{1}{2}$.

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-1,\frac{1}{2})$. …………………………………………………………… 10 分

设直线 AC 与平面 AFG 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{2}{\sqrt{3+1+\frac{1}{4}}\times 2}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$.

所以直线 AC 与平面 AFG 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$. ………………………………… 13 分

(18)(本小题 14 分)

解：(Ⅰ)因为每位报名学生通过前 4 项流程的概率依次约为 $\frac{3}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{3},1$，且能否通过相互独立，

所以估计每位报名学生被确认为有效招飞申请的概率 $P=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 1=\frac{1}{6}$. …… 3 分

(Ⅱ)因为每位报名学生被确认为有效招飞申请的概率为 $\frac{1}{6}$，

所以甲、乙、丙三人中恰好有一人被确认为有效招飞申请的概率 $P=C_3^1\times\frac{1}{6}\times(1-\frac{1}{6})^2=\frac{25}{72}$. …………………………………………………………………………… 6 分

(Ⅲ)因为每位报名学生被确认为有效招飞申请的概率为 $\frac{1}{6}$，且预估甲、乙、丙三人的高考成绩能被招飞院校录取的概率分别为 $\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{3}{5}$，

所以甲能被招飞院校录取的概率 $P_1=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$，

乙能被招飞院校录取的概率 $P_2=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$,

丙能被招飞院校录取概率 $P_3=\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$. ………………………………………………………… 9 分

依题意 X 的可能取值为 0,1,2,3, ………………………………………………………… 10 分

所以 $P(X=0)=(1-\frac{1}{9})\times(1-\frac{1}{10})\times(1-\frac{1}{10})=\frac{18}{25}$,

$P(X=1)=\frac{1}{9}\times(1-\frac{1}{10})\times(1-\frac{1}{10})+2\times\frac{1}{10}\times(1-\frac{1}{9})\times(1-\frac{1}{10})=\frac{1}{4}$,

$P(X=2)=2\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{10}\times(1-\frac{1}{10})+(1-\frac{1}{9})\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{13}{450}$,

$P(X=3)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{900}$.

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{18}{25}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{13}{450}$	$\frac{1}{900}$

………………………………………………………… 13 分

所以 $E(X)=0\times\frac{18}{25}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{13}{450}+3\times\frac{1}{900}=\frac{14}{45}$. ………………………………… 14 分

(19)(本小题 15 分)

解:(Ⅰ)因为 $f(x)=(x-2)e^x$,

所以 $f'(x)=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$.

所以 $f(0)=-2, f'(0)=-1$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y+2=-x$,即 $x+y+2=0$. …… 3 分

(Ⅱ)因为函数 $g(x)=f(x)-2ax^2+4ax$,

所以 $g(x)=(x-2)e^x-2ax^2+4ax$.

所以 $g'(x)=(x-1)e^x-4ax+4a=(x-1)(e^x-4a)$.

令 $g'(x)=0$,得 $x=1$,或 $x=\ln 4a$. ………………………………………………………… 4 分

①当 $\ln 4a<1$ 时,即 $0<a<\frac{e}{4}$ 时,

令 $g'(x)<0$,得 $\ln 4a<x<1$;令 $g'(x)>0$,得 $x<\ln 4a$,或 $x>1$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(\ln 4a,1)$ 上单调递减,在区间 $(-\infty,\ln 4a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值,此时不符合题意. ………………………………………… 5 分

②当 $\ln 4a=1$ 时,即 $a=\frac{e}{4}$ 时,$g'(x)=(x-1)(e^x-4a)\geqslant 0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处不取极值,此时不符合题意. ………………………………………… 6 分

③当 $\ln 4a>1$ 时，即 $a>\frac{e}{4}$ 时，

令 $g'(x)<0$，得 $1<x<\ln 4a$；令 $g'(x)>0$，得 $x<1$，或 $x>\ln 4a$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,\ln 4a)$ 上单调递减，在区间 $(-\infty,1)$ 和 $(\ln 4a,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，此时符合题意. ……………………………………………… 7 分

综上所述，$g(x)$ 的单调递减区间为 $(1,\ln 4a)$，单调递增区间为 $(-\infty,1)$ 和 $(\ln 4a,+\infty)$.

……… 8 分

(Ⅲ)因为 $g(x)=(x-2)e^x-2ax^2+4ax$，

所以 $g(x)=(x-2)(e^x-2ax)$.

所以 $x=2$ 是 $g(x)$ 的一个零点.

因为 $g(x)$ 恰有三个零点，

所以方程 $e^x-2ax=0$ 有两个不为 2 实数根，即方程 $\frac{1}{2a}=\frac{x}{e^x}$ 有两个不为 2 实数根. …… 10 分

令 $h(x)=\frac{x}{e^x}$，所以 $h'(x)=\frac{1-x}{e^x}$

令 $h'(x)<0$，得 $x>1$；令 $h'(x)>0$，得 $x<1$.

所以 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

当 $x\in(-\infty,1]$ 时，$h(x)$ 的值域为 $(-\infty,\frac{1}{e}]$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)$ 的值域为 $(0,\frac{1}{e})$.

所以 $0<\frac{1}{2a}<\frac{1}{e}$，且 $\frac{1}{2a}\neq\frac{2}{e^2}$.

所以 $a>\frac{e}{2}$，且 $a\neq\frac{e^2}{4}$.

所以 a 的取值范围是 $(\frac{e}{2},\frac{e^2}{4})\cup(\frac{e^2}{4},+\infty)$. ………………………………………… 15 分

(20)(本小题 15 分)

解：(Ⅰ)因为椭圆 E 的短轴长为 2，

所以 $2b=2$. 所以 $b=1$.

因为离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{3}{4}=\frac{a^2-1}{a^2}$，解得 $a^2=4$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………… 3 分

(Ⅱ)①若直线 l 的斜率不存在，不符合题意. ……………………………………………… 4 分

②若直线 l 的斜率存在，设为 k，所以直线 l 的方程为 $y=kx+2$. ……………………… 5 分

联立方程组 $\begin{cases} y=kx+2, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y，化简得 $(4k^2+1)x^2+16kx+12=0$. ……………… 6 分

所以 $\Delta=16(4k^2-3)>0$，得 $k<-\frac{\sqrt{3}}{2}$，或 $k>\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………… 7 分

因为 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，且 $y_1>y_2$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-16k}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{12}{4k^2+1}$. …………………… 8 分

直线 AP 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x$，即 $y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$. …………………… 9 分

直线 BQ 的方程为 $y+1=\frac{y_2+1}{x_2}x$，即 $y=\frac{y_2+1}{x_2}x-1$. …………………… 10 分

因为直线 AP 与直线 BQ 交于点 N，

所以点 N 的纵坐标 $y_N=\frac{x_1(y_2+1)+x_2(y_1-1)}{x_1(y_2+1)-x_2(y_1-1)}$. …………………… 11 分

所以 $y_N=\frac{x_1(kx_2+2+1)+x_2(kx_1+2-1)}{x_1(kx_2+2+1)-x_2(kx_1+2-1)}=\frac{2kx_1x_2+3x_1+x_2}{3x_1-x_2}$

$$=\frac{2k\cdot\frac{12}{4k^2+1}+3x_1+x_2}{3x_1-x_2}=\frac{24\times\frac{k}{4k^2+1}+3x_1+x_2}{3x_1-x_2}=\frac{24\times(-\frac{1}{16})(x_1+x_2)+3x_1+x_2}{3x_1-x_2}$$

$=\frac{\frac{3}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2}{3x_1-x_2}=\frac{1}{2}$. …………………… 14 分

所以点 N 在直线 $y=\frac{1}{2}$ 上. …………………… 15 分

(21)(本小题 15 分)

解：(Ⅰ)数列 1,2,1 和数列 3,1. …………………… 4 分

(Ⅱ)因为对于 $1\leqslant i<j\leqslant n$，使得 $a_i>a_j$ 的正整数对 (i,j) 有 k 个，且存在 m 的 6 减数列，

所以 $C_n^2\geqslant 6$，得 $n\geqslant 4$. …………………… 5 分

①当 $n=4$ 时，因为存在 m 的 6 减数列，

所以数列中各项均不相同.

所以 $m\geqslant 1+2+3+4=10>6$. …………………… 6 分

②当 $n=5$ 时，因为存在 m 的 6 减数列，

所以数列各项中必有不同的项.

所以 $m\geqslant 6$. …………………… 7 分

若 $m=6$，满足要求的数列中有四项为 1，一项为 2.

所以 $k\leqslant 4$，不符合题意.

所以 $m>6$.

③当 $n\geqslant 6$ 时，因为存在 m 的 6 减数列，

所以数列各项中必有不同的项.

所以 $m>6$. …………………… 8 分

综上所述，若存在 m 的 6 减数列，则 $m>6$.

（也可以就 n 的取值展开讨论或者直接利用枚举法给出证明）

（Ⅲ）若数列中的每一项都相等，则 $k=0$.

若 $k\neq 0$，所以数列 A 存在大于 1 的项.

若末项 $a_n\neq 1$，将 a_n 拆分成 a_n 个 1 后 k 变大，

所以此时 k 不是最大值.

所以 $a_n=1$.

当 $t=1,2,\cdots,n-1$ 时，若 $a_t<a_{t+1}$，交换 a_t,a_{t+1} 的顺序后 k 变为 $k+1$，

所以此时 k 不是最大值.

所以 $a_t\geqslant a_{t+1}$.

若 $a_t-a_{t+1}\notin\{0,1\}$，所以 $a_t\geqslant a_{t+1}+2$.

所以将 a_t 改为 a_t-1，并在数列末尾添加一项 1，所以 k 变大.

所以此时 k 不是最大值.

所以 $a_t-a_{t+1}\in\{0,1\}$.

若数列 A 中存在相邻的两项 $a_t\geqslant 3$，$a_{t+1}=2$，设此时 A 中有 x 项为 2，将 a_t 改为 2，并在数列末尾添加 a_t-2 项 1 后，k 的值至少变为 $k+x+1-x=k+1$，

所以此时 k 不是最大值.

所以数列 A 的各项只能为 2 或 1.

所以数列 A 为 $2,2,\cdots,2,1,1,\cdots,1$ 的形式. ………………………………………… 13 分

设其中有 x 项为 2，有 y 项为 1，

因为存在 2024 的 k 减数列，

所以 $2x+y=2024$，

所以 $k=xy=(2024-2x)x=-2x^2+2024x$.

所以当且仅当 $x=506$，$y=1012$ 时，k 取最大值为 512072.

所以若存在 2024 的 k 减数列，k 的最大值为 512072. ……………………………… 15 分

北京高一高二高三期末试题下载

京考一点通团队整理了【**2024 年 1 月北京各区各年级期末试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期末**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

微信搜一搜

京考一点通