2019 北京东城高一（上）期末

数　　学

本试卷共 4 页，共 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题共 30 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-1>0\}$,那么下列结论正确的是

A. $0\in A$　　B. $1\in A$　　C. $-1\in A$　　D. $1\notin A$

2. 命题“$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan x>0$”的否定是

A. $\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan x_0\leqslant 0$　　B. $\exists x_0\notin(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan x_0\leqslant 0$

C. $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan x\leqslant 0$　　D. $\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan x_0>0$

3. 下列结论成立的是

A. 若 $ac>bc$, 则 $a>b$　　B. 若 $a>b$, 则 $a^2>b^2$

C. 若 $a>b, c>d$, 则 $a+c>b+d$　　D. 若 $a>b, c>d$, 则 $a-d>b-c$

4. 在单位圆中，200° 的圆心角所对的弧长为

A. $\frac{9}{10}\pi$　　B. $\frac{10}{9}\pi$　　C. 9π　　D. 10π

5. 函数 $f(x)=\frac{4}{x}-2^x$ 零点所在区间是

A. $(0,\frac{1}{2})$　　B. $(\frac{1}{2},1)$　　C. $(1,\frac{3}{2})$　　D. $(\frac{3}{2},2)$

6. $\sin 1,\sin 2,\sin 3$ 的大小关系是

A. $\sin 1<\sin 2<\sin 3$　　B. $\sin 3<\sin 2<\sin 1$

C. $\sin 2<\sin 3<\sin 1$　　D. $\sin 3<\sin 1<\sin 2$

7. 设 $x\in R$, 则“$2-x\geqslant 0$”是“$|x+1|\leq 1$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 若实数 x,y 满足 $2x+y=1$，则 $x\cdot y$ 的最大值为

A. 1　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{16}$

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，当 $x<0$ 时，$f(x)=2^{x+1}+1$, 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(-x)=-f(x)$，当 $x>\frac{1}{2}$ 时，$f(x+\frac{1}{2})=\frac{1}{f(x)}$，则 $f(2019)=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

10. 已知非空集合 A, B 满足以下两个条件：

（i）$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A\cap B=\varnothing$

(ii)若 $x\in A$，则 $x+1\in B$.

则有序集合对（A，B）的个数为

A. 12　　B. 13　　C. 14　　D. 15

第二部分（非选择题　　共 70 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

11. $\sin(-\frac{5\pi}{6})=$____________

12. 函数 $f(x)=\sqrt{1-\ln x}$的定义域________________

13. $(\frac{1}{27})^{-\frac{1}{3}}+\log_9 25-\log_3 15=$____________

14. 已知函数 f(x)满足下列性质：

（i）定义域为 R，值域为 $[1,+\infty)$；

（ii）在区间（$-\infty$，0）上时减函数；

（iii）图象关于 $x=2$ 对称。

请写出满足条件的 f(x)的解析式________________（写出一个即可）

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x, x\leq 0\\ 2f(x-1), x>0\end{cases}$

(i) $f(2)=$________________；

（ii）若方程 $f(x)=\frac{3}{2}x+a$ 有且只有一个实根，则实数 a 的取值范围是____________。

三、解答题共 6 小题，共 50 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16.（本小题 8 分）

已知全集 U=R，集合 $A=\{x\mid x^2-x-12\leq 0\}$，非空集合 $B=\{x\mid m-1\leq x\leq 2m+3\}$

(I)求当 $m=-3$ 时，$C_U(A\cup B)$；

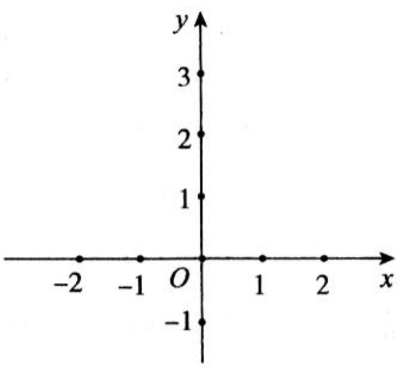
（II）若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围。

(17)(本小题 8 分)

已知函数 $f(x)-1+\frac{|x|-x}{2}(-2\leq x\leq 2)$

(I)画出 f(x)的图象；

(II)根据图象写出 f(x)的值域、单调区间.



(18)(本小题 8 分)

在平面直角坐标系 x0y 中，角 a 的顶点与原点 0 重合，始边与 x 轴的正半轴重合，它的终边过点 $P(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5})$，以角。的终边为始边，逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$得到角尽 β

(I)求 tanα 的值；

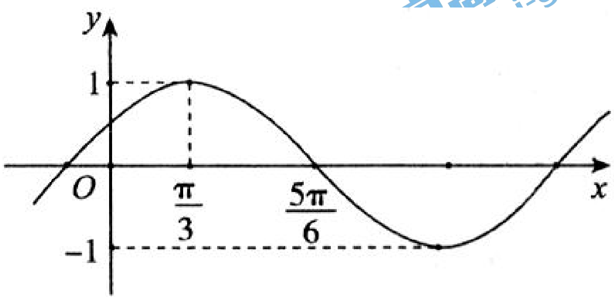
(II)求 cos（α+β）的值.

19.(本小题 10 分)

函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示。

（I）求 f(x)的解析式；

（II）将函数 y=f(x)的图象向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，得到函数 y=g(x)的图象，令 F（x）=f(x)+g(x),求函数 F（x）的单调递增区间。



(20)(本小题 8 分)

2018 年 10 月 24 日，世界上最长的跨海大桥一港珠澳大桥正式通车.在一般情况下，大桥上的车流速度 v(单位：千米/时)是车流密度 x(单位：辆/千米)的函数.当桥上的车流密度达到 220 辆/千米时，将造成堵塞，此时车流速度为 0；当车流密度不超过 20 辆/千米时，车流速度为 100 千米/时.研究表明：当 20≤x≤220 时，车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数.

(I)当 0≤x≤220 时，求函数 v(x)的表达式；

(II)当车流密度 x 为多大时，车流量(单位时间内通过桥上某观测点的车辆数，单位：辆/时 f(x)=x·v(x)可以达到最大？并求出最大值。

21.（本小题 8 分）

已知 f(x)时定义在[-1，1]上的奇函数，且 f(-1)=-1,当 a,b∈[-1,1],a+b≠0 时，有$\frac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$成立。

（I）求 f(x)在区间[-1,1]上的最大值；

（II）若对任意的 a∈[-1,1]都有 $f(x)\geqslant 2m^2-am-4$,求实数 m 的取值范围。

数学试题答案

一、选择题(共 10 小题，每小题 3 分. 共 30 分)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	A	D	B	C	D	B	C	A	A

二、填空题(共 5 小题. 每小题 4 分，共 20 分)

(11) $-\frac{1}{2}$ (12) $(0,e]$ (13) 2 (14) $f(x)=(x-2)^2+1$ (答案不唯一) (15) 4 $\left[\frac{1}{2},1\right)$

三、解答题(共 6 小题，共 50 分)

(16)(共 8 分)

解：(Ⅰ)当 $m=-3$ 时，$B=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant -3\}$.

由已知 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 4\}$，所以 $A\cup B=\{x\mid -4\leqslant x\leqslant 4\}$.

所以 $\complement_U(A\cup B)=\{x\mid x<-4$ 或 $x>4\}$. ………………………………………… 4 分

(Ⅱ)因为 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 4\}$ 且 $B\subseteq A$，

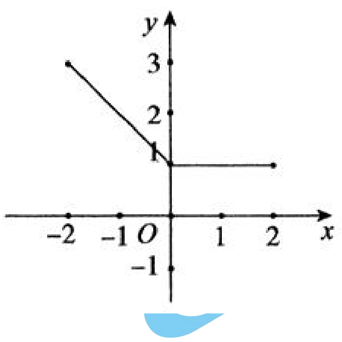
所以 $\begin{cases} m-1\leqslant 2m+3, \\ m-1\geqslant -3, \\ 2m+3\leqslant 4. \end{cases}$

解得 $-2\leqslant m\leqslant \frac{1}{2}$.

所以实数 m 的取值范围为 $\left[-2,\frac{1}{2}\right]$. ………………………………………… 8 分

(17)(共 8 分)

解：(Ⅰ) $f(x)=\begin{cases} 1-x, -2\leqslant x<0, \\ 1, 0\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$ ………………………………………… 3 分



(Ⅱ)由(Ⅰ)的图象知 $f(x)$ 的值域为 $[1,3]$，$f(x)$ 的单调减区间为 $[-2,0]$，无增区间. ……

(18)(共 8 分)

解:(Ⅰ)由角 α 的终边过点 $P(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$,

得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{4}{3}$. …………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\frac{7}{25}$.

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})$

$=\cos 2\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)$

$=\frac{17\sqrt{2}}{50}$. …………………………………………………………… 8 分

(19)(共 10 分)

解:(Ⅰ)因为 $\frac{2\pi}{\omega}=4(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=2\pi$,

所以 $\omega=1$.

又因为 $\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$,

所以 $\frac{\pi}{3}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

即 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$.

因为 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$,

所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

所以 $f(x)$ 的解析式是 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})$. ………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由已知 $g(x)=\sin[(x+\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{6}]=\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$，

所以 $f(x)+g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos x$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\cos x$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$$

$$=\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{3}).$$

函数 $y=\sin x$ 的单调递增区间为$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}](k\in\mathbf{Z})$.

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

得 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

所以 $F(x)$的单调递增区间为$[2k\pi-\frac{5\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{6}](k\in\mathbf{Z})$. ……………………… 10 分

(20)(共 8 分)

解：(Ⅰ)由题意，

当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时，$v(x)=100$；

当 $20\leqslant x\leqslant 220$ 时，设 $v(x)=ax+b$，

因为$v(20)=20a+b=100$，

$v(220)=220a+b=0$，

所以$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\ b=110.\end{cases}$

所以 $v(x)=\begin{cases}100, & 0\leqslant x\leqslant 20,\\ -\dfrac{1}{2}x+110, & 20<x\leqslant 220.\end{cases}$ …………………………………………… 4 分

(Ⅱ)依题意,并由(Ⅰ)可得,

$$f(x)=\begin{cases}100x, & 0\leqslant x\leqslant 20,\\ -\dfrac{1}{2}x^2+110x, & 20<x\leqslant 220.\end{cases}$$

当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时,$f(x)$的最大值为 $f(20)=2000$;

当 $20<x\leqslant 220$ 时,$f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-110)^2+6050$;

当 $x=110$ 时,$f(x)$的最大值为 $f(110)=6050$.

综上所述,当车流密度为 110 辆/千米时,车流量最大,最大值为 6050 辆/时. … 8 分

(21)(共 8 分)

解:(Ⅰ)任取 $x_1,x_2\in[-1,1]$,且 $x_1<x_2$,则 $-x_2\in[-1,1]$.

因为 $f(x)$为奇函数,

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)$$
$$=\frac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}(x_1-x_2).$$

由已知得 $\dfrac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1+(-x_2)}>0$,$x_1-x_2<0$,

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$.

所以 $f(x)$在区间$[-1,1]$上单调递增.

所以 $f(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值为 $f(1)$.

因为 $f(x)$是定义在$[-1,1]$上的奇函数,所以 $f(1)=-f(-1)=1$.

所以 $f(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值为 1. ………………………………………… 4 分

(Ⅱ)因为 $f(x)$在区间$[-1,1]$上单调递增,

所以 $f(x)\geqslant f(-1)=-1$.

所以 $2m^2-am-4\leqslant -1$ 对任意的 $a\in[-1,1]$恒成立.

令 $g(a)=-am+2m^2-3$.

若 $g(a)\leqslant 0$ 对任意的 $a\in[-1,1]$恒成立,只需 $\begin{cases}g(-1)\leqslant 0,\\ g(1)\leqslant 0.\end{cases}$

解得 $-1\leqslant m\leqslant 1$.

所以实数 m 的取值范围为$[-1,1]$. ………………………………………… 8 分