

北京首师大附中 2019 届高三数学（文）8 月开学考

2018.8

一、选择题（每小题 5 分，共 40 分）

1. 下列复数中，与  $z=1+i$  的乘积为实数的是（ ）

- A.  $-i$                       B.  $1-i$                       C.  $i$                           D.  $1+i$

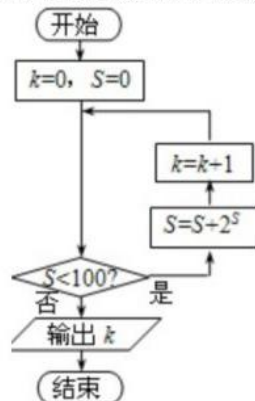
2. 已知等差数列  $\{a_n\}$  中， $a_1+a_2=1$ ， $a_4+a_5=-8$ ，则公差为（ ）

- A.  $-3$                       B.  $-\frac{7}{6}$                       C.  $\frac{3}{2}$                           D.  $-\frac{3}{2}$

3. 已知曲线：①  $y^2=x$ ，②  $x^2+y^2=1$ ，③  $y=x^3$ ，④  $x^2-y^2=1$ . 上述四条曲线中，满足“若曲线与直线  $y=kx+b$  有且仅有一个公共点，则它们必相切”的曲线的序号是（ ）

- A. ①                          B. ②                          C. ③                          D. ④

4. 某程序框图如图所示，该程序运行后输出的  $k$  的值是（ ）



- A. 4                          B. 5                          C. 6                          D. 7

5. 设函数  $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$  的图象为  $C$ ，下列结论中正确的是（ ）

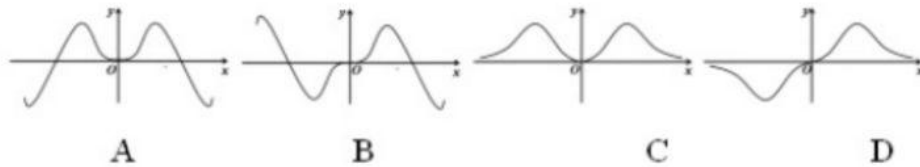
- A. 函数  $f(x)$  的最小正周期是  $2\pi$   
 B. 图象  $C$  关于点  $(\frac{\pi}{6}, 0)$  对称  
 C. 图象  $C$  可由函数  $g(x) = \sin 2x$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位得到  
 D. 函数  $f(x)$  在区间  $(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2})$  上是增函数

6. 如果实数  $x, y$  满足不等式组  $\begin{cases} x - y - 3 \leq 0, \\ x - 2y - 3 \leq 0, \\ x \geq 1, \end{cases}$  目标函数  $z = kx - y$  的最大值为 6, 最小值为 0,

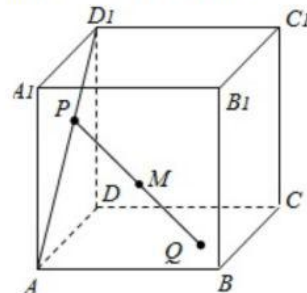
则实数  $k$  的值为 ( )

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

7. 函数  $f(x) = \cos x \cdot \ln(x^2 + 1)$  的部分图象可能是 ( )



8. 如图, 正方体  $ABCD - A'B'C'D'$  中, 点  $P$  为线段  $AD'$  上一动点, 点  $Q$  为底面  $ABCD$  内 (含边界) 一动点,  $M$  为  $PQ$  的中点, 点  $M$  构成的点集是一个空间几何体, 则该几何体为 ( )



- A. 棱柱                      B. 棱锥                      C. 棱台                      D. 球

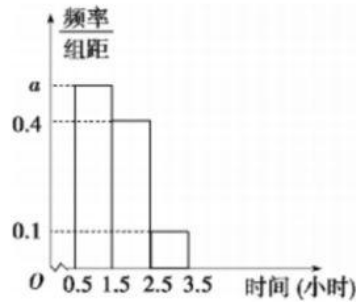
二、填空题 (每小题 5 分, 共 30 分)

9. 若抛物线  $y^2 = 2px$  的焦点与双曲线  $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$  的右焦点重合, 则实数  $p$  的值为\_\_\_\_\_.

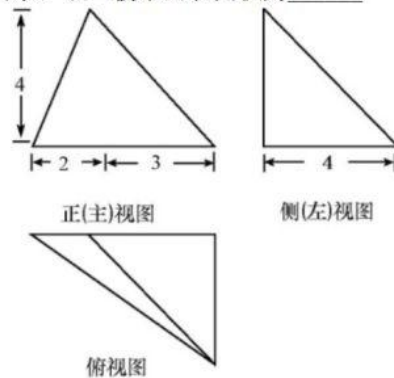
10. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $M$  为边  $AB$  的中点, 若  $\overline{OP} \parallel \overline{OM}$ , 且  $\overline{OP} = x\overline{OA} + y\overline{OB} (x \neq 0)$ , 则

$\frac{y}{x} =$ \_\_\_\_\_.

11. 某校某年级 100 名学生, 已知这些学生完成家庭作业的时间均为区间  $[0.5, 3.5]$  内 (单位: 小时), 现将这 100 人完成家庭作业的时间分为 3 组:  $[0.5, 1.5)$ ,  $[1.5, 2.5)$ ,  $[2.5, 3.5]$  加以统计, 得到如图所示的频率分布直方图. 在这 100 人中, 采用分层抽样的方法抽取 10 名学生研究其视力状况与完成作业时间的相关性, 则在抽取样本中, 完成作业的时间小于 2.5 个小时的有\_\_\_\_\_人.



12. 某三棱锥的三视图如图所示, 该三棱锥的表面积为\_\_\_\_\_.



13. 已知函数  $y = g(x)$  的图象可以由  $f(x) = \sin 2x$  的图象向右平移  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) 个单位得到, 这两个函数的部分图象如图所示, 则  $\varphi =$ \_\_\_\_\_.

14. 在数列  $\{a_n\}$  中, 若  $a_n^2 - a_{n-1}^2 = p$ , ( $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, p$  为常数), 则称  $\{a_n\}$  为“等方差数列”. 下列是对“等方差数列”的判断:

- ①若  $\{a_n\}$  是等方差数列, 则  $\{a_n^2\}$  是等差数列;
- ②  $\{(-1)^n\}$  是等方差数列;
- ③若  $\{a_n\}$  是等方差数列, 则  $\{a_{kn}\}$  ( $k \in \mathbb{N}^*, k$  为常数) 也是等差数列;
- ④  $\{a_n\}$  既是等方差数列, 又是等差数列, 则该数列为常数列.

其中正确命题的序号为\_\_\_\_\_. (将所有正确的命题序号填在横线上)

三、解答题（6 小题，共 80 分）

15.（本题 13 分）如图，在  $\triangle ABC$  中， $\angle B = \frac{\pi}{3}$ ， $AB = 8$ ，点  $D$  在边  $BC$  上，且  $CD = 2$ ，

$$\cos \angle ADC = \frac{1}{7}.$$



- (I) 求  $\sin \angle BAD$ ；  
(II) 求  $BD$ ， $AC$  的长.

16.（本题 13 分）已知等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q > 1$ ，且  $a_3 + a_4 + a_5 = 28$ ， $a_4 + 2$  是  $a_3$ 、 $a_5$  的等差中项. 数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = 1$ ，数列  $\{(b_{n+1} - b_n)a_n\}$  的前  $n$  项和为  $2n^2 + n$ .

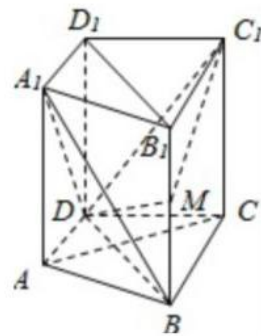
- (I) 求  $q$  的值；  
(II) 求数列  $\{b_n\}$  的通项公式.

17. (本题 13 分) 诚信是立身之本, 道德之基. 某校学生会创设了“诚信水站”, 既便于学生用水, 又推进诚信教育, 并用“ $\frac{\text{周实际回收水费}}{\text{周投入成本}}$ ”表示每周“水站诚信度”. 为了便于数据分析, 以四周为一周期, 下表为该水站连续十二周 (共三个周期) 的诚信度数据统计:

	第一周	第二周	第三周	第四周
第一个周期	95%	98%	92%	88%
第二个周期	94%	94%	83%	80%
第三个周期	85%	92%	95%	96%

- (I) 计算表中十二周“水站诚信度”的平均数  $\bar{x}$ ;
- (II) 分别从上表每个周期的 4 个数据中随机抽取 1 个数据, 设随机变量  $X$  表示取出的 3 个数据中“水站诚信度”超过 91% 的数据的个数, 求随机变量  $X$  的分布列和期望;
- (III) 已知学生会分别在第一个周期的第四周末和第二个周期的第四周末各举行了一次“以诚信为本”的主题教育活动. 根据已有数据, 说明两次主题教育活动的宣传效果, 并根据已有数据陈述理由.

18. (本题 13 分) 如图所示, 在直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $DB=BC$ ,  $DB \perp AC$ , 点  $M$  是棱  $BB_1$  上一点.



- (I) 求证:  $B_1D_1 \parallel$  平面  $ABD$ ;
- (II) 求证:  $MD \perp AC$ ;
- (III) 试确定点  $M$  的位置, 使得平面  $DMC_1 \perp$  平面  $CC_1D_1D$ .

19. (本题 14 分) 已知点  $P(2,1)$  在椭圆  $C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上.

- (I) 求椭圆的离心率;  
 (II) 若直线  $l: x - 2y + m = 0 (m \neq 0)$  与椭圆  $C$  交于两个不同的点  $A, B$ , 直线  $PA, PB$  与  $x$  轴分别交于  $M, N$  两点, 求证:  $|PM| = |PN|$ .

20 (本题 14 分) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ , 且  $f'(-1) = 0$ .

- (I) 试问含  $a$  的代数式表示  $b$ ;  
 (II)  $a \leq 1$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;  
 (III) 令  $a = -1$ , 并且设方程  $f(x) = m$  有三个不等的实数根, 求实数  $m$  的取值范围.



北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线\_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

## 北京高考资讯

### 关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980