

2018 北京市房山区高三（上）期末

数 学（文）

2018.1

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 若集合 $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ ， $N = \{x | -1 \leq x < 2\}$ ，则集合 $M \cap N$ 等于

- (A) $\{-1, 0, 1\}$ (B) $\{-1, 0, 2\}$ (C) $\{-1, 1, 2\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 2\}$

(2) 在复平面内，复数 $\frac{3i}{1+2i}$ 在复平面中对应的点在

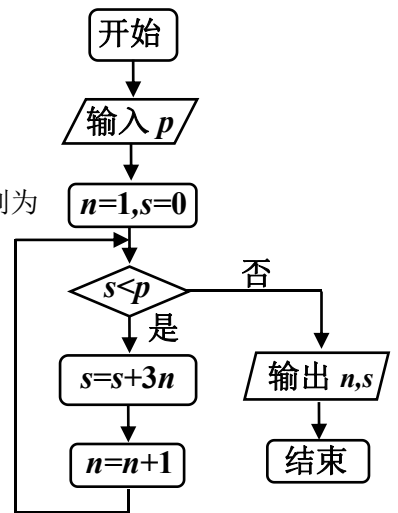
- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

(3) 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq 0, \\ y \leq x, \\ 2x - y - 4 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + y$ 的最大值为

- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

(4) 某程序的框图如图所示，执行该程序，若输入的 p 为 12，则输出的 n, s 的值分别为

- (A) $n = 3, s = 18$
(B) $n = 4, s = 9$
(C) $n = 3, s = 9$
(D) $n = 4, s = 18$



(5) 下列函数中，满足 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 且在定义域内是单调递增函数的是

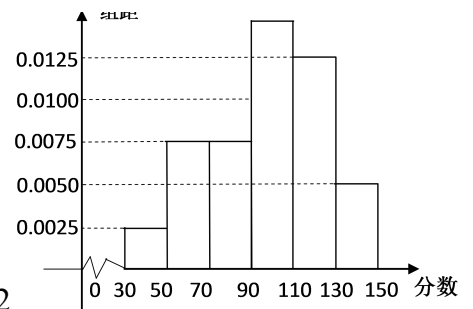
- (A) $f(x) = x^3$ (B) $f(x) = 3^x$ (C) $f(x) = \lg x$ (D) $f(x) = \tan x$

(6) 某市举行“中学生诗词大赛”，分初赛和复赛两个阶段进行，规定：初赛成绩大于 90 分的具有复赛资格，某校有 800 名学生参加了初赛，所有学生的成绩均在区间 $(30, 150]$ 内，其频率分布直方图如图。则获得复赛资格的人数为

- (A) 640 (B) 520 (C) 280 (D) 240

(7) 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率大于 $\sqrt{2}$ 的充分不必要条件是

- (A) $m > \frac{1}{2}$ (B) $m \geq 1$ (C) $m > 1$ (D) $m > 2$



(8) 已知 $\triangle ABC$ 是边长为1的等边三角形, P 为平面 ABC 内一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最小值是

- (A) $-\frac{1}{8}$ (B) $-\frac{3}{8}$ (C) $-\frac{4}{3}$ (D) -1

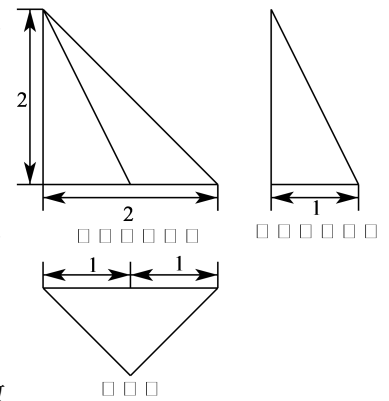
第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(9) 在 $\triangle ABC$ 中, 三个内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c . 若 $b = 4, \angle B = \frac{\pi}{6}, \sin A = \frac{1}{3}$ 则 $a =$ _____.

(10) 若抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点坐标为 $(2, 0)$, 则 $p =$ _____, 准线方程为_____.

(11) 某三棱锥的三视图如图所示, 则该三棱锥的
体积为_____.



(12) 如果直线 $y = x - 1$ 把圆 $x^2 + y^2 + kx + my - 4 = 0$ 的面积分成相等的两部分.

则 $m - k =$ _____.

(13) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x, & x > 1, \\ 2^x, & x \leq 1, \end{cases}$ 则 $f(0) =$ _____, 若函数

$g(x) = f(x) + x - 3$, 则 $y = g(x)$ 的零点个数为_____.

(14) 有三张卡片, 分别写有1和3, 1和5, 3和5. 甲, 乙, 丙三人各取走一张卡片, 甲看了乙的卡片后说: “我与乙的卡片上相同的数字不是3”, 乙看了丙的卡片后说: “我与丙的卡片上相同的数字不是1”, 丙说: “我的卡片上的数字之和不是8”, 若这三个人的说法都与事实相符, 则甲的卡片上的数字是_____.

三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上的值域.

(16) (本小题13分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 6$, $a_5 + a_8 = 26$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $b_n = 2^{a_n} + n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(17) (本小题13分)

为加速京津冀一体化的旅游发展, 以倡导亲子游览, 增进和谐家庭为目的, 由中国关心下一代工作委员会事业发展中心发起的 2017—2018 北京亲子年票京津冀跨年版, 共收入京津冀 100 多个亲子游玩学习的好去处, 年票单价 198 元. 某一旅游公司工作人员为了考察年票的使用情况, 进行了抽样调查, 各地区销售数量如下表所示. 拟采用分层抽样的方法抽出容量为 6 的样本.

地区	北京	天津	河北
数量	150	100	50

(I) 求这 6 张年票中分别来自三个地区的年票数量;

(II) 若在这 6 张年票中随机抽取 2 张, 求至少有 1 张来自于北京的概率;

(III) 为迎接北京冬奥会, 年票中特提供了多样化选择的平台, 有十渡爱琴海滑雪场(房山), 陶然亭冰雪嘉年华(西城), 八达岭滑雪场(延庆), 钓鱼岛滑雪场(怀柔), 门票价格分别是 98 元, 110 元, 100 元, 70 元, 年票规则是只允许使用一次. 假设一名顾客在年票有效期内只在这四个滑雪场选择两个场所游玩, 请回答去哪两个滑雪场更划算(只写结论).

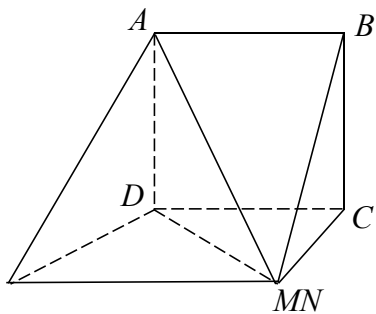
(18) (本小题14分)

如图几何体 $ADM-BCN$ 中, $ABCD$ 是正方形, $CD \parallel MN$, $AD \perp MD$, $CD \perp CN$, $\angle MDC = 120^\circ$, $\angle CDN = 30^\circ$, $MN = 2MD = 4$.

(I) 求证: $AB \parallel$ 平面 $CDMN$;

(II) 求证: $DN \perp$ 平面 AMD ;

(III) 求三棱锥 $A-DMN$ 的体积.



(19) (本小题14分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 $A(-2, 0)$, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程及离心率;

(II) 若直线 $l: x = ty - 1$ 交椭圆 C 于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$.

(i) 求证: $y_1 y_2 = -\frac{3}{t^2 + 4}$;

(ii) 若 $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{4}{5}$, 求 t 的值.

(20) (本小题13分)

已知函数 $f(x) = x \ln x + mx^2$.

(I) 当 $m = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若 $\forall x \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x) < 0$ 成立, 求 m 的取值范围;

(III) 当 $m < 0$ 时, 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 求 $g(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值.

数学试题答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	(A)	(A)	(C)	(D)	(B)	(B)	(D)	(B)

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) $\frac{8}{3}$ (10) $p = 4, x = -2$ (11) $\frac{2}{3}$ (12) 2 (13) 1, 2 (14) 1和5

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15)解：(I) $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x$

$$= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x - \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore T = \frac{2\pi}{2} = \pi \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(II) 由 (I) 得 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$.

因为 $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, 所以 $-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$,

所以 $-\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, 因此 $0 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$,

所以 $f(x)$ 的值域为 $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. \dots\dots\dots 13 分

(16) 解：(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d , 则

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 6 \\ a_1 + 4d + a_1 + 7d = 26 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 2 \end{cases}$.

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n$. \dots\dots\dots 7 分

(II) 由 (I) 可得 $b_n = 2^{2n} + n = 4^n + n$

所以 $s_n = \frac{4(1-4^n)}{1-4} + \frac{n(1+n)}{2} = \frac{4^{n+1}-4}{3} + \frac{n+n^2}{2}$13分

(17) 解: (I) $150+100+50=300$

$$6 \times \frac{150}{300} = 3, \quad 6 \times \frac{100}{300} = 2, \quad 6 \times \frac{50}{300} = 1$$

所以, 来自北京、天津、河北三个地区的年票数量分别是3,2,1.

(II) 来自北京的年票记作 a_1, a_2, a_3 ; 来自天津的年票记作 b_1, b_2 ; 来自河北的年票记作 c .

$$\Omega = \{ (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, c), (a_2, a_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, c), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, c), (b_1, b_2), (b_1, c), (b_2, c) \}$$

共15种, 其中至少有1张来自于北京的年票共有12种。

故至少有1张来自于北京的概率 $p = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

(III) 选择去陶然亭冰雪嘉年华(西城)和八达岭滑雪场(延庆)更划算

(18)解: (I) 在正方形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$;

又 $\because CD \subset \text{面}MNCD, AB \not\subset \text{面}MNCD$;

$\therefore AB \parallel \text{面}MNCD$ 5分

(II) \because 四边形 $ABCD$ 是正方形

$\therefore AD \perp DC$

$\because AD \perp MD, CD \cap MD = D, CD, MD \subset \text{平面}MNCD$

$\therefore AD \perp \text{平面}MNCD$

$\because DN \subset \text{平面}MNCD$

$\therefore AD \perp DN$

$\because \angle MDC = 120^\circ, \angle CDN = 30^\circ$

$\therefore \angle MDN = 90^\circ$

$\therefore ND \perp MD$

$\because AD \cap MD = D, AD, MD \subset \text{平面}AMD$

$\therefore DN \perp \text{面}AMD$ 10分

(III) $\because MN = 2MD = 4$

$\therefore DN = 2\sqrt{3}, CD = 3, CN = \sqrt{3}$



$$\therefore S_{\triangle MDN} = \frac{1}{2} DM \cdot DN = \frac{1}{2} 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore V_{A-DMN} = \frac{1}{3} S_{\triangle MDN} \cdot DA = \frac{1}{3} 2\sqrt{3} \cdot 3 = 2\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

(19) 解: (I) 由题: $a = 2$

又过点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

$$\therefore \frac{1}{4} + \frac{3}{4b^2} = 1 \therefore b = 1$$

$$\therefore c^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore c = \sqrt{3} \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) (1) 由题 $\begin{cases} x = ty - 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ 整理得: $(t^2 + 4)y - 2ty - 3 = 0$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{2}{t^2 + 4}, y_1 y_2 = -\frac{3}{t^2 + 4}$$

$$\therefore y_1 y_2 = -\frac{3}{t^2 + 4} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(2) 由题, 直线 $l: x = ty - 1$ 恒过 $(-1, 0)$. 设直线 l 与 x 轴交于点 M , 则 $M(-1, 0)$

$$\therefore |AM| = 1$$

$$\therefore |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2 + 4}\right)^2 + \frac{12}{t^2 + 4}}$$

$$\therefore S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} |AM| \cdot |y_1 - y_2| = \therefore \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{t^2 + 4}\right)^2 + \frac{12}{t^2 + 4}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore 4t^4 + 7t^2 - 11 = 0$$

$$\therefore t^2 = 1, \text{ 或 } t^2 = -\frac{11}{4} \text{ (舍)}$$



∴ $t = \pm 1$

.....14分

(20)解: (I) 当 $m = 1$ 时, $f(x) = x \ln x + x^2$

所以 $f'(x) = \ln x + 2x + 1$.

所以 $f(1) = 1$, 切点为 $(1, 1)$.

$f'(1) = 3$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 1 = 3(x - 1)$ 即 $y = 3x - 2$

.....4分

(II) 定义域为 $\{x | x > 0\}$

$$x \ln x + mx^2 < 0$$

$$m < -\frac{\ln x}{x}$$

$$\text{设 } h(x) = -\frac{\ln x}{x}$$

$$h'(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

令 $h'(x) = 0$ 得 $x = e$

当 x 变化时, $h(x)$, $h'(x)$ 的变化如下表

x	$(0, e)$	e	$(e, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗

所以 $h(x)_{\min} = h(e) = -\frac{1}{e}$.

.....9分

所以 $m < -\frac{1}{e}$

(III) 因为 $g'(x) = \frac{1}{x} + m = \frac{1+mx}{x}$, $x \in [1, 2]$, 令 $\frac{1+mx}{x} = 0$, 则 $x = -\frac{1}{m}$

当 $m \leq -1$ 时, $0 < -\frac{1}{m} \leq 1$, $g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 为减函数

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(1) = m$

当 $-1 < m < -\frac{1}{2}$ 时, $1 < -\frac{1}{m} < 2$ 时

x	$\left(1, -\frac{1}{m}\right)$	$-\frac{1}{m}$	$\left(-\frac{1}{m}, 2\right)$
$g'(x)$	+	0	-

$g(x)$	\nearrow	极大值	\searrow
--------	------------	-----	------------

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(-\frac{1}{m}) = -1 - \ln(-m)$

当 $-\frac{1}{2} \leq m < 0$ 时, $-\frac{1}{m} \geq 2$ 时, $g'(x) \geq 0$ 恒成立, $g(x)$ 为增函数

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(2) = 2m + \ln 2$ ……

北京高考在线是长期为中学老师、家长和考生提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划以及实用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

<http://www.gaokzx.com/>

北京高考资讯微信：bj-gaokao

北京高考资讯

关于我们

北京高考资讯隶属于太星网络旗下，北京地区高考领域极具影响力的升学服务平台。

北京高考资讯团队一直致力于提供最专业、最权威、最及时、最全面的高考政策和资讯。期待与更多中学达成更广泛的合作和联系。

长按二维码 识别关注



微信公众号：bj-gaokao

官方网址：www.gaokzx.com

咨询热线：010-5751 5980