

北京市八一学校 2022~2023 学年度第二学期 3 月月考

高三 数学

制卷人：荣 贺

审卷人：王明辉

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题卡交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = x^2\}$, $B = \{(x, y) | y = x\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{(0, 0)\}$ C. $\{(1, 1)\}$ D. $\{(0, 0), (1, 1)\}$

2. 已知复数 z 满足 $\frac{z}{2-i} = i$, 则复数 z 的虚部为 ()

- A. 1 B. i C. 2 D. $2i$

3. 已知 $f(x) = \sin x \cos x$, 则 $f(x)$ 的最小值与最小正周期分别是 ()

- A. $-\frac{1}{2}, \pi$ B. $-\frac{1}{2}, 2\pi$ C. $-2, \pi$ D. $-2, 2\pi$

4. 已知 m, n 表示两条不同直线, α 表示平面, 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $m // \alpha, n // \alpha$, 则 $m // n$ B. 若 $m // \alpha, m \perp n$, 则 $n \perp \alpha$
C. 若 $m \perp \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m \perp n$ D. 若 $m \perp \alpha, m \perp n$, 则 $n // \alpha$

5. 1682 年, 天文学家哈雷发现一颗大彗星的运行曲线和 1531 年、1607 年的彗星惊人地相似. 他大胆断定, 这是同一天体的三次出现, 并预言它将于 76 年后再度回归. 这就是著名的哈雷彗星, 它的回归周期大约是 76 年. 请你预测它在本世纪回归的年份 ()

- A. 2042 B. 2062 C. 2082 D. 2092

6. 已知从点 $(-5, 3)$ 发出的光线, 经 x 轴反射后, 反射光线恰好平分圆: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$ 的圆周, 则反射光线所在的直线方程为 ()

- A. $2x - 3y + 1 = 0$ B. $2x - 3y - 1 = 0$
C. $3x - 2y + 1 = 0$ D. $3x - 2y - 1 = 0$

7. 已知 $p: \frac{b+2}{a+2} > \frac{b}{a}$, $q: a > b > 0$, 则 p 是 q 的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 1$, $a_n = n + (-1)^{n-1} (n \geq 2)$, 则 $\frac{S_{24}}{S_{23}} =$ ()

- A. $\frac{13}{12}$ B. $\frac{23}{24}$ C. $\frac{25}{23}$ D. $\frac{13}{11}$

9. 设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为单位向量, 非零向量 $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, x, y \in \mathbf{R}$, 若 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 的夹角为 45° , 则 $\frac{|y|}{|a|}$ 的最大值为 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

10. 已知正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 2, 现将 $\triangle ACD$ 沿对角线 AC 旋转 180° , 记旋转过程中点 D 的位置为点 P , AC, AP, BC 中点分别为 O, E, F , 则在旋转过程中, 下列说法正确的是 ()

- A. 直线 AC, BP 不可能垂直 B. $PB + PD$ 最大为 $4\sqrt{2}$
C. $\triangle ACD$ 旋转形成的几何体是半球 D. 存在 EF 与平面 BOP 成角为 60° 的位置

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分.

11. 若 $(x-a)^5$ 的二项式展开式中 x^2 的系数为 10, 则 $a =$ _____.

12. 已知角 α 终边经过点 $P(m, -3)$, 且 $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, 则 $\sin \alpha$ 的值为 _____.

13. 若双曲线 $C: \frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$, 则双曲线 C 的离心率为 _____.

14. 已知函数 $f(x) = a + 2\sin x$, $g(x) = \log_2 x$.

(1) 写出一个 a 的值 _____, 使得函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上恰有两个零点;

(2) 若 $\exists x_1 \in [0, 2\pi]$, $\exists x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

15. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数, 首项 $a_1 = 3$, 且对任意正整数 n , 总存在正整数 m , 使得

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_m$, 则关于此数列公差 d 的论述中, 正确的序号有 _____.

①公差 d 可以为 1;

②公差 d 可以不为 1;

③符合题意的公差 d 有有限个;

④符合题意的公差 d 有无限多个.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $b = 2\sqrt{3}$, 再从下面两个条件中, 选出一个作为已知, 解答下面问题.

(I) 若 $a = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(II) 求 $a + c$ 的取值范围.

条件① $\sqrt{3}c \cos B = b \sin C$; 条件 ② $2a - c = 2b \cos C$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

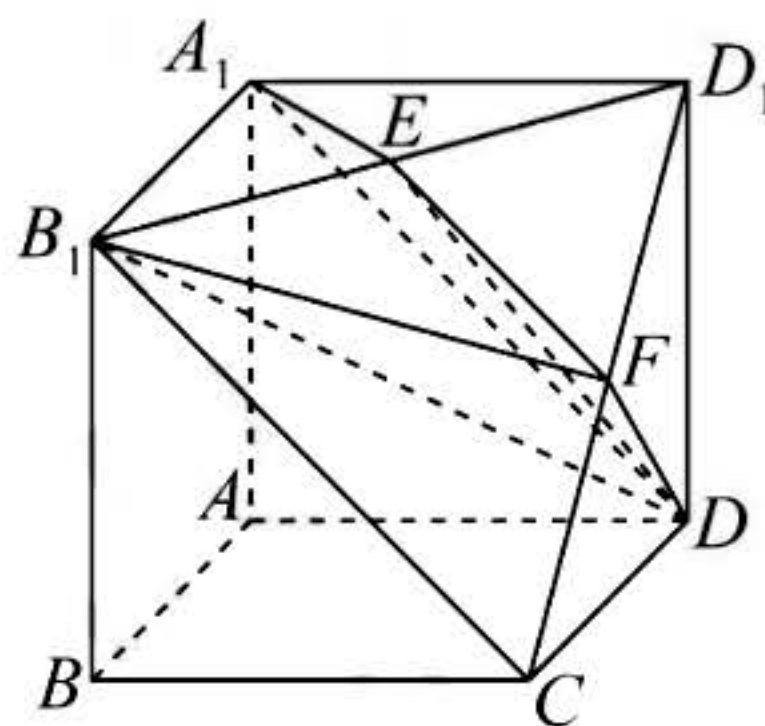
17. (本小题 14 分)

如图所示, 在多面体 $A_1B_1D_1DCBA$ 中, 四边形 AA_1B_1B , ADD_1A_1 , $ABCD$ 均为边长为 2 的正方形, E 为 B_1D_1 的中点, 过 A_1, D, E 的平面交 CD_1 于点 F .

(I) 证明: $EF \parallel B_1C$.

(II) 求平面 B_1DE 与平面 $ABCD$ 成角的余弦值.

(III) 直接写出三棱锥 $C - DEF$ 的体积.



18. (本小题共 13 分)

根据 B 市 2020 年人口普查的数据, 在该市 15 岁及以上常住人口中, 各种受教育程度人口所占比例(精确到 0.01) 如下表所示:

受教育程度 性别	未上学	小学	初中	高中	大学 专科	大学 本科	硕士 研究生	博士 研究生
男	0.00	0.03	0.14	0.11	0.07	0.11	0.03	0.01
女	0.01	0.04	0.11	0.11	0.08	0.12	0.03	0.00
合计	0.01	0.07	0.25	0.22	0.15	0.23	0.06	0.01

(I) 已知 B 市 15 岁及以上常住人口在全市常住人口中所占比例约为 85%, 从全市常住人口中随机选取 1 人, 试估计该市民年龄为 15 岁及以上且受教育程度为硕士研究生的概率;

(II) 从 B 市 15 岁及以上常住人口中随机选取 2 人, 记这 2 人中受教育程度为大学本科及以上的人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 若受教育程度为未上学、小学、初中、高中、大学专科及以上的受教育年限分别记为 0 年、6 年、9 年、12 年、16 年, 设 B 市 15 岁及以上男性与女性常住人口的平均受教育年限分别为 a 年和 b 年, 依据表中的数据直接写出 a 与 b 的大小关系.(结论不要求证明)

19. (本小题 15 分)

已知椭圆: $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(-4, 0)$, 半短轴长为 2.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 过点 $P(2, 1)$ 作斜率为 k 的直线 l , 交椭圆 E 于 B, C 两点 (B, C 不与 A 重合), 若直线 AB, AC 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$, 求 k 的值.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = 4\sqrt{x} - x^2$, $g(x) = e^x + e^{-x}$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(III) 证明: 任意 $x \geq 0$, $f(x) < \frac{3}{2}g(x)$.

21. (本小题 15 分)

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 当 $n \leq 4$ 时, $\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_4}{4}$; 当 $n > 4$ 时,

$a_n = \max\{a_1 + a_{n-1}, a_2 + a_{n-2}, a_3 + a_{n-3}, \dots, a_{n-1} + a_1\}$, 其中 $\max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_s$ 这 s 个数中最大的数.

(I) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项为 1, 4, 3, 8, 写出 a_5, a_6, a_9, a_{10} 的值;

(II) 是否存在 $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{N}$, 使 $a_{100} = p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + p_4 a_4$, 且 $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 100$? 请说明理由;

(III) 设 $b_n = na_4 - 4a_n$, 证明: $b_{4k+i} \geq b_{4(k+1)+i}, k \in \mathbb{N} (i = 1, 2, 3, 4)$.

3 月月考 参考答案

高三 数学

一、选择题

DCACB ABABD

二、填空题

11. -1 ; 12. $-\frac{3}{5}$; 13. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 14. $(-2,0) \cup (0,2)$ 中的数即可; $[-2,3]$; 15. ①②③.

三、解答题共 6 小题, 共 85 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

16. (本小题满分 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $b=2\sqrt{3}$, 再从下面两个条件中, 选出一个作为已知, 解答下面问题.

(I) 若 $a=2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(II) 求 $a+c$ 的取值范围.

条件① $\sqrt{3}c \cos B = b \sin C$; 条件② $2a - c = 2b \cos C$.

注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

【解】若选条件①,

由 $\sqrt{3}c \cos B = b \sin C$ 及正弦定理, 得 $\sqrt{3} \cos B \sin C = \sin C \sin B$,

因为 $0 < C < \pi$, 所以 $\sin C \neq 0$,

所以 $\tan B = \sqrt{3}$, 因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

若选条件②,

由 $2a - c = 2b \cos C$ 及余弦定理 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, 得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$,

由 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, 即 $\cos B = \frac{1}{2}$,

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(1) 由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$,

即 $12 = 4 + c^2 - 2 \cdot 2c \times \frac{1}{2}$, 解得 $c = 4$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = 6\sqrt{3}$.

(2) 因为 $b = 2\sqrt{3}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$,

因为 $\pi - C = A + B = A + \frac{\pi}{3}$,

所以 $a + c = 4(\sin A + \sin C) = 4[\sin A + \sin(A + \frac{\pi}{3})] = 2\sqrt{3} \cos A + 6 \sin A = 4\sqrt{3} \sin(A + \frac{\pi}{6})$,

因为 $0 < A < \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$, $\sin(A + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{1}{2}, 1]$,

所以 $a + c \in (2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}]$.

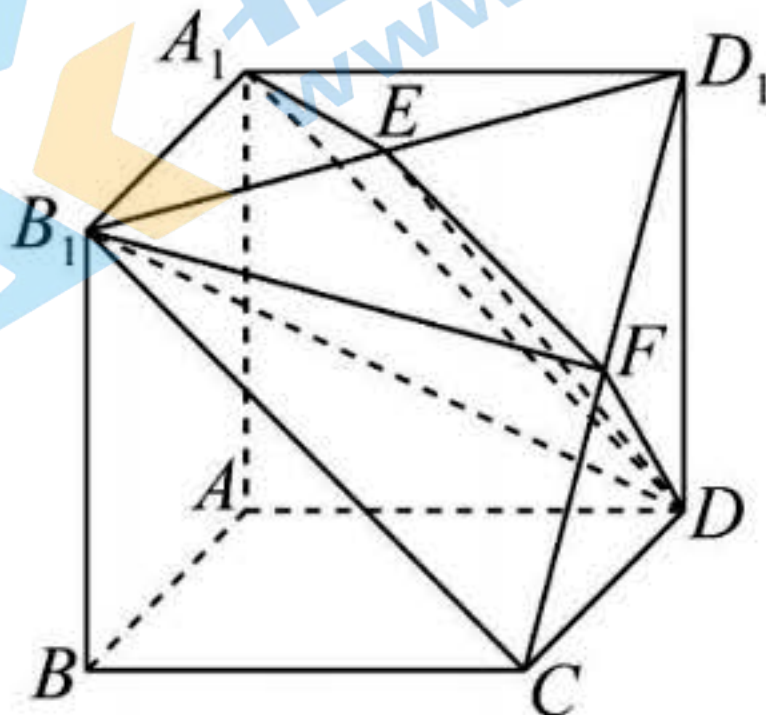
17. (本小题 14 分)

如图所示, 在多面体 $A_1B_1D_1DCBA$ 中, 四边形 AA_1B_1B , ADD_1A_1 , $ABCD$ 均为边长为 2 的正方形, E 为 B_1D_1 的中点, 过 A_1, D, E 的平面交 CD_1 于点 F .

(I) 证明: $EF \parallel B_1C$.

(II) 求平面 B_1DF 与平面 $ABCD$ 成角的余弦值.

(III) 直接写出三棱锥 $C-DEF$ 的体积.



【解】(1) 证明: 连接 A_1D , 由正方形的性质可知 $A_1B_1 \parallel AB \parallel DC$, 且 $A_1B_1 = AB = DC$, 所以四边形 A_1B_1CD 为平行四边形, 从而 $B_1C \parallel A_1D$, 又 $A_1D \subset$ 平面 A_1DE , $B_1C \not\subset$ 平面 A_1DE , 所以 $B_1C \parallel$ 平面 A_1DE . 因为 $B_1C \subset$ 平面 B_1CD_1 , 且平面 $A_1DE \cap$ 平面 $B_1CD_1 = EF$, 所以 $EF \parallel B_1C$.

(2) 解: 由 (1) 知 F 为 CD_1 的中点, 设 $AB = 2$, 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $D(0, 2, 0)$, $B_1(2, 0, 2)$, $F(1, 2, 1)$.

设平面 B_1DF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

因为 $\overrightarrow{DB_1} = (2, -2, 2)$, $\overrightarrow{DF} = (1, 0, 1)$,

所以 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB_1} = 2x - 2y + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DF} = x + z = 0 \end{cases}$, 令 $x = 1$, 得 $\vec{n} = (1, 0, -1)$.

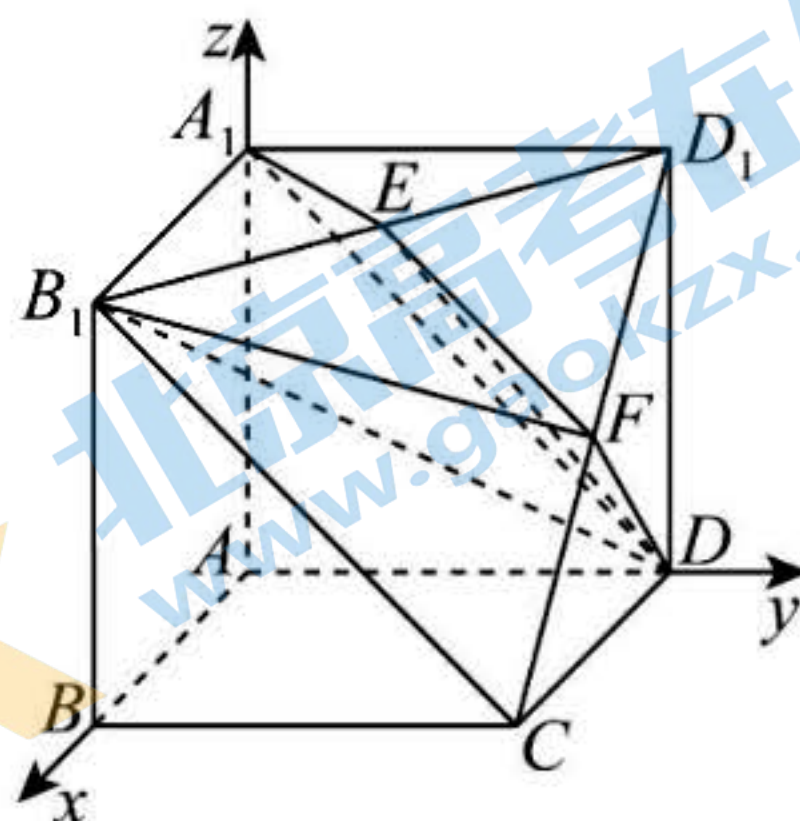
由 z 轴 $\perp$ 平面 $ABCD$,

则 $\vec{m} = (0, 0, 1)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量,

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-1}{1 \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以平面 B_1DF 与平面 $ABCD$ 的余弦值 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $\frac{1}{3}$.



18. (本小题共 13 分)

根据 B 市 2020 年人口普查的数据, 在该市 15 岁及以上常住人口中, 各种受教育程度人口所占比例(精确到 0.01) 如下表所示:

受教育程度 性别	未上学	小学	初中	高中	大学 专科	大学 本科	硕士 研究生	博士 研究生
男	0.00	0.03	0.14	0.11	0.07	0.11	0.03	0.01
女	0.01	0.04	0.11	0.11	0.08	0.12	0.03	0.00
合计	0.01	0.07	0.25	0.22	0.15	0.23	0.06	0.01

(I) 已知 B 市 15 岁及以上常住人口在全市常住人口中所占比例约为 85%, 从全市常住人口中随机选取 1 人, 试估计该市民年龄为 15 岁及以上且受教育程度为硕士研究生的概率;

(II) 从 B 市 15 岁及以上常住人口中随机选取 2 人, 记这 2 人中受教育程度为大学本科及以上的人数为 X , 求 X 的分布列和数学期望;

(III) 若受教育程度为未上学、小学、初中、高中、大学专科及以上的受教育年限分别记为 0 年、6 年、9 年、12 年、16 年, 设 B 市 15 岁及以上男性与女性常住人口的平均受教育年限分别为 a 年和 b 年, 依据表中的数据直接写出 a 与 b 的大小关系.(结论不要求证明)

解: (1) 因为在该市 15 岁及以上常住人口中, 受教育程度为硕士研究生的人口所占比例为 0.06, 则估计该市民年龄为 15 岁及以上且受教育程度为硕士研究生的概率 $85\% \times 0.06 = 0.051$;

(2) 该市 15 岁及以上常住人口中, 受教育程度为大学本科及以上的人口所占比例为 $0.23 + 0.06 + 0.01 = 0.3$,

X 的可能取值为 0, 1, 2,

$$P(X=0) = C_2^0 \times (0.3)^0 \times (1-0.3)^2 = 0.49,$$

$$P(X=1) = C_2^1 \times 0.3 \times (1-0.3) = 0.42,$$

$$P(X=2) = C_2^2 \times (0.3)^2 \times (1-0.3)^0 = 0.09,$$

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	0.49	0.42	0.09

$$E(X) = 0 \times 0.49 + 1 \times 0.42 + 2 \times 0.09 = 0.6.$$

(3) $a > b$.

19. (本小题 15 分)

已知椭圆: $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(-4, 0)$, 半短轴长为 2.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 过点 $P(2, 1)$ 作斜率为 k 的直线 l , 交椭圆 E 于 B, C 两点 (B, C 不与 A 重合), 若直线 AB, AC 的斜率之积为 $-\frac{1}{4}$, 求 k 的值.

解: (1) 依题意可知 $a = 4, b = 2$,

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 可求直线 $l: y - 1 = k(x - 2)$, 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$.

联立直线与椭圆的方程 $\begin{cases} y = kx + 1 - 2k, \\ x^2 + 4y^2 = 16. \end{cases}$

消 y 得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8k(1 - 2k)x + 4(1 - 2k)^2 - 16 = 0$.

易知点 $P(2, 1)$ 在椭圆的内部, 则必有 $\Delta > 0$,

则 $x_1 + x_2 = -\frac{8k(1 - 2k)}{1 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4(1 - 2k)^2 - 16}{1 + 4k^2}$,

又 $k_{AB} = \frac{y_1 - 0}{x_1 + 4} = \frac{kx_1 + 1 - 2k}{x_1 + 4}, k_{AC} = \frac{y_2 - 0}{x_2 + 4} = \frac{kx_2 + 1 - 2k}{x_2 + 4}, k_{AB} \cdot k_{AC} = -\frac{1}{4}$,

所以有 $\frac{kx_1 + 1 - 2k}{x_1 + 4} \cdot \frac{kx_2 + 1 - 2k}{x_2 + 4} = -\frac{1}{4}$,

整理可得 $(1 + 4k^2)x_1 x_2 + 4[1 + k(1 - 2k)](x_1 + x_2) + [16 + 4(1 - 2k)^2] = 0$,

则 $(1 + 4k^2) \cdot \frac{4(1 - 2k)^2 - 16}{1 + 4k^2} - 4[1 + k(1 - 2k)] \frac{8k(1 - 2k)}{1 + 4k^2} + [16 + 4(1 - 2k)^2] = 0$,

即 $8(1 + 4k^2)(1 - 2k)^2 - 4[1 + k(1 - 2k)] \cdot 8k(1 - 2k) = 0$.

即 $12k^2 - 8k + 1 = 0$,

解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{1}{6}$.

因为直线 l 不经过点 A , 可得 $k \neq \frac{1}{6}$.

所以, $k = \frac{1}{2}$.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = 4\sqrt{x} - x^2$, $g(x) = e^x + e^{-x}$.

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $g(x)$ 的单调区间;

(III) 证明: 任意 $x \geq 0$, $f(x) < \frac{3}{2}g(x)$.

解: (I) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2x$, 且 $f(1) = 3, f'(1) = 0$,

所以切线方程为 $y - 3 = 0 \cdot (x - 1)$, 即 $y = 3$.

(II) $g'(x) = e^x - e^{-x} = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{e^x}$,

当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 递增;

当 $x < 0$ 时, $e^x < 1$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 递减;

所以, 函数 $g(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 单调减区间为 $(-\infty, 0)$.

(III) 由 $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2x = 2(\frac{1}{\sqrt{x}} - x)$ 知,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $\frac{1}{\sqrt{x}} > 1$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\frac{1}{\sqrt{x}} < 1$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减;

所以 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时的最大值为 $f(1) = 3$;

由 (II) 知: $g(x)$ 在 $x \geq 0$ 时的最小值为 $g(0) = 2$, 即 $g(x) \geq 2$

所以 $f(x) \leq f(1) = 3, \frac{3}{2}g(x) \geq \frac{3}{2}g(0) = 3$,

但是, 两个函数的最值不同时取到,

所以 $f(x) < \frac{3}{2}g(x)$.

21. (本小题 15 分)

已知无穷数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 当 $n \leq 4$ 时, $\frac{a_n}{n} \leq \frac{a_4}{4}$; 当 $n > 4$ 时,

$a_n = \max\{a_1 + a_{n-1}, a_2 + a_{n-2}, a_3 + a_{n-3}, \dots, a_{n-1} + a_1\}$, 其中 $\max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_s\}$ 表示 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_s$ 这 s 个数中最大的数.

(I) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项为 1, 4, 3, 8, 写出 a_5, a_6, a_9, a_{10} 的值;

(II) 是否存在 $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{N}$, 使 $a_{100} = p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + p_4 a_4$, 且 $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 100$?
请说明理由;

(III) 设 $b_n = na_4 - 4a_n$, 证明: $b_{4k+i} \geq b_{4(k+1)+i}, k \in \mathbb{N} (i=1, 2, 3, 4)$.

解: (I) $a_5 = 9, a_6 = 12, a_9 = 17, a_{10} = 20$.

(II) 存在.

因为 $a_n = \max\{a_1 + a_{n-1}, a_2 + a_{n-2}, a_3 + a_{n-3}, \dots, a_{n-1} + a_1\}$,

所以, 存在 $i \in \{1, 2, \dots, 99\}$, 使得 $a_{100} = a_i + a_{100-i}$.

若 $i > 4$ 或 $100-i > 4$,

则将 a_i 或 a_{100-i} 继续分拆, 可写成数列中某两项的和, 如 $a_i = a_{i_1} + a_{i_2} (i_1 + i_2 = i)$.

依此类推, 有限次操作后,

存在 $j_1, j_2, \dots, j_k \in \{1, 2, 3, 4\}$, 使得 $a_{100} = a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_k}, j_1 + j_2 + \dots + j_k = 100$.

则存在 $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{N}$, 使得 $a_{100} = p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + p_4 a_4$,

所以 $p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 = 100$.

(III) $b_{4(k+1)+i} - b_{4k+i} = [4(k+1)+i]a_4 - 4a_{4(k+1)+i} - [(4k+i)a_4 - 4a_{4k+i}] = 4(a_4 - a_{4(k+1)+i} + a_{4k+i})$,

由 $a_n = \max\{a_1 + a_{n-1}, a_2 + a_{n-2}, a_3 + a_{n-3}, \dots, a_{n-1} + a_1\}$,

所以 $a_{4(k+1)+i} = \max\{a_1 + a_{4(k+1)+i-1}, a_2 + a_{4(k+1)+i-2}, \dots\} \geq a_4 + a_{4k+i}$,

所以 $b_{4k+i} \geq b_{4(k+1)+i}, k \in \mathbb{N} (i=1, 2, 3, 4)$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯