

文科数学

(考试时间: 120 分钟 全卷满分: 150 分)

注意事项:

1. 答卷前, 考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在答题卡上, 并认真核准条形码上的准考证号、姓名、考场号、座位号及科目, 在规定的位罝贴好条形码。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其它答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上, 写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将答题卡交回。

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合要求的。

1. 集合 $A = \{x | x^2 = 2x\}$, $B = \{1, 2\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $\{0, 1, 2\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{2\}$ D. $\{1, 2\}$

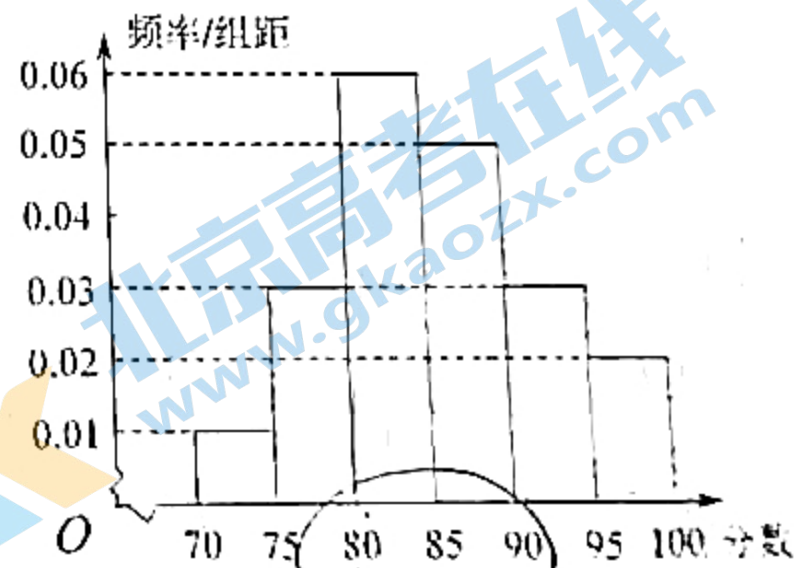
2. 已知 i 是虚数单位, 复数 z 满足 $z \cdot (1+i) = 1-i$, 则 z 的虚部是

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

3. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x \leq 3, \\ x + y \geq 1, \\ y \leq 1. \end{cases}$ 则 $x - y$ 的最大值为

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

4. 为落实党中央的“三农”政策, 某市组织该市所有乡镇干部进行了一期“三农”政策专题培训, 并在培训结束时进行了结业考试。右图是该次考试成绩随机抽样样本的频率分布直方图, 则下列关于这次考试成绩的估计错误的是



- A. 众数为 82.5
~~B. 中位数为 85~~
 C. 平均数为 86
~~D. 有一半以上干部的成绩在 80~90 分之间~~

5. 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 内部任取一点 P , 则 P 到正方形各个顶点距离均大于 1 的概率为

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $1 - \frac{\pi}{4}$ C. $2 - \frac{\pi}{4}$ D. $4 - \frac{\pi}{4}$

6. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $2a_n - S_n = 3$, 则 $a_5 =$

- A. 96 B. 64 C. 48 D. 32

7. 已知一个直角三角形的两条直角边分别为 2 和 $2\sqrt{3}$, 以它的斜边所在直线为旋转轴, 其余两边旋转一周所围成的旋转体的表面积为

- A. $(12 + 4\sqrt{3})\pi$ B. $(6 + 2\sqrt{3})\pi$ C. $(4 + 3\sqrt{3})\pi$ D. $(3 + \sqrt{3})\pi$

8. 物理学家和数学家牛顿 (Issac Newton) 提出了物体在常温下温度变化的冷却模型: 设物体的初始温度是 T_1 (单位: $^{\circ}\text{C}$), 环境温度是 T_0 (单位: $^{\circ}\text{C}$), 且经过一定时间 t (单位: min) 后物体的温度 T (单位: $^{\circ}\text{C}$) 满足 $\frac{T_1 - T_0}{T - T_0} = e^{kt}$ (k 为正常数). 现有一杯 100°C 的热水, 环境温度为 20°C , 冷却到 40°C 需要 16 min, 那么这杯热水要从 40°C 继续冷却到 30°C , 还需要的时间为

- A. 6 min B. 7 min C. 8 min D. 9 min

9. 已知 $f(x) = 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$, 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位得到函数 $g(x)$, 则使得 $g(x)$ 是偶函数的 φ 的最小值是

- A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{3}$

10. 设 F_1, F_2 是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左右焦点, 过 F_2 作 C 的一条渐近线的垂线, 垂足为 P , 与另一条渐近线交于点 Q , $\overline{QP} = 2\overline{PF_2}$, 且 ΔQF_1F_2 的面积为 b^2 , 则 C 的离心率为

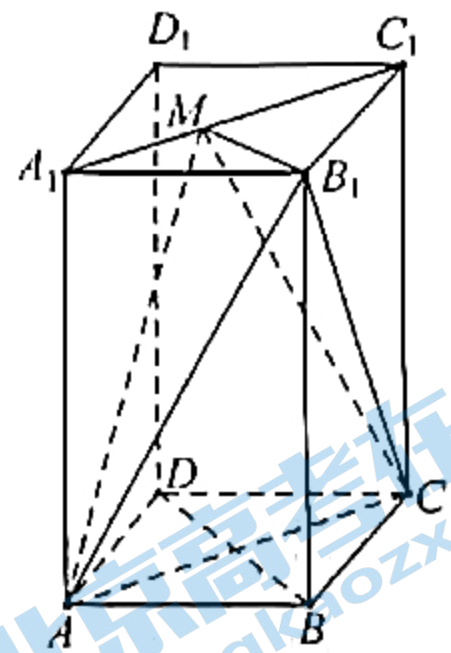
- A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $2\sqrt{3}$ D. $\sqrt{10}$

11. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是线段 A_1C_1 上的动点, 有下列结论:

- ① $AM \perp BD$;
 ② $\exists M$, 使 $AM \parallel BC$;
 ③ 三棱锥 $A - MB_1C$ 体积为定值;
 ④ 三棱锥 $A - MB_1C$ 在平面 BCC_1B_1 上的正投影的面积为常数.

其中正确的是

- A. ①②③
 B. ①③
 C. ②③④
 D. ①④



12. 已知 $a = 10^{10}$, $b = 9^{11}$, $c = 11^9$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $c < a < b$ B. $b < a < c$ C. $a < b < c$ D. $c < b < a$

二、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$, $a_2 - a_1 = 1$, 则 $a_{75} - a_{50} =$ _____.

14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 若 $\overline{DP} = \frac{1}{4}\overline{DC}$, $\overline{AP} = x\overline{AB} + y\overline{AD}$, 则 $x + y =$ _____.

15. 若函数 $f(x) = a - \frac{x}{|x| + 1}$ 为奇函数, 则关于 x 的不等式 $f(x^2) + f(2x - 3) > a$ 的解集为 _____.

16. 过抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点 F 作两条相互垂直的直线 l_1, l_2 , 若 l_1 和 l_2 分别交该抛物线于 A, B 和 C, D 两点, 则 $|FA| \cdot |FB| + |FC| \cdot |FD|$ 的最小值为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17—21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

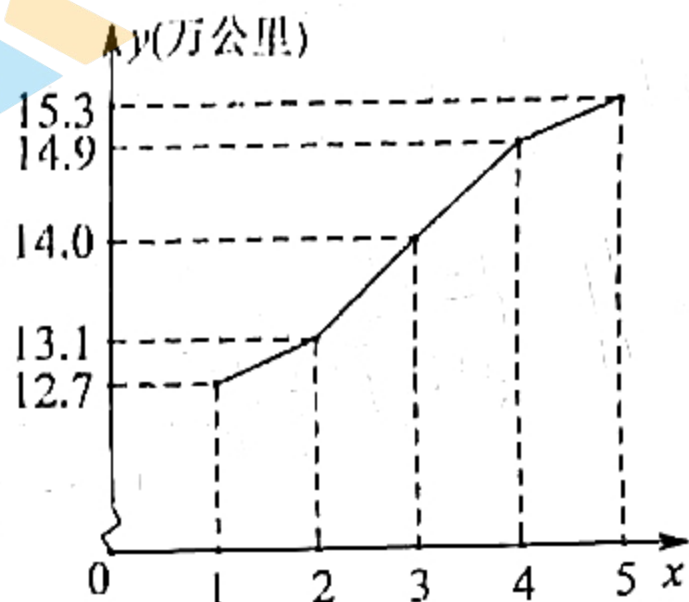
铁路作为交通运输的重要组成部分，是国民经济的大动脉，在我国经济发展中发挥着重要的作用。截止 2021 年，中国铁路营业里程达到 15.3 万公里。下图是我国 2017~2021 年铁路营业里程折线图，其中 x 表示年份数与 2016 的差， y (单位：万公里) 表示各年的营业里程数。

(1) 由折线图易知 y 与 x 具有较强的线性关系，试用最小二乘法求 y 关于 x 的回归直线方程，并预测 2022 年营业里程为多少万公里？

(2) 从 2017~2021 年的五个营业里程数中随机抽取两个数，求所取得的两个数中，至少有一个超过 14 的概率。

附：回归直线的斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$



18. (12 分)

在① $\cos 2A = \cos(B + C)$ ，② $a \sin C = \sqrt{3}c \cos A$ 这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并给出解答。

问题：在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，_____。

(1) 求 A ；

(2) $b=2, c=4$ ，求 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线 AD 的长。

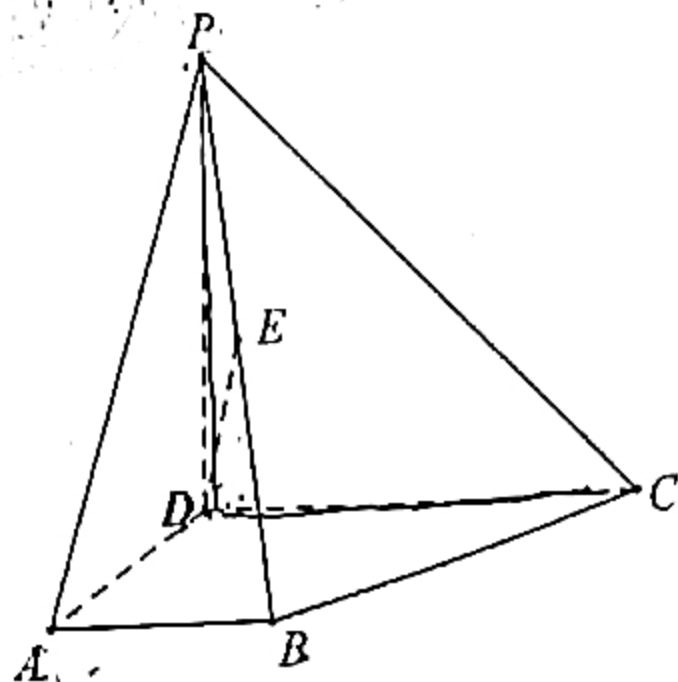
注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分。

19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $AD \perp PD$ ， $AB = AD = 1$ ， $CD = 2$ ， $PD = 3$ ， E 为线段 PB 的中点，且 $DE \perp BC$ 。

(1) 求证： $PD \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2) 若过三点 C, D, E 的平面将四棱锥 $P-ABCD$ 分成上、下两部分，求上面部分的体积 V 。



关注北京高考在线官方微信：北京高考资讯(微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

20. (12分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - 2\sqrt{x}$.

- (1) 若 $a = 2$, 求曲线 $f(x)$ 在点 $x = 1$ 处的切线方程;
- (2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0, 16]$ 上有两个零点, 求 a 的取值范围.

21. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , G 为 E 的上顶点, 且 $\overrightarrow{F_1G} \cdot \overrightarrow{F_2G} = -2$.

- (1) 求 E 的方程;
- (2) 过坐标原点 O 作两条直线 l_1, l_2 分别交 E 于 A, B 和 C, D 两点, 直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 . 是否存在常数 t , 使 $k_1 k_2 = t$ 时, 四边形 $ACBD$ 的面积 S 为定值? 如果存在, 求出 t 的值; 如果不存在, 请说明理由.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (10分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系. 直线 m 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta = -2$, 动点 P 在直线 m 上, 将射线 OP 按逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到射线 OP' , 射线 OP' 上一点 Q 满足 $|OQ| \cdot |OP| = 8$, 设点 Q 的轨迹为曲线 C .

- (1) 求曲线 C 的极坐标方程;
- (2) 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbf{R})$, l 与曲线 C 相交于点 A (与 O 不重合), 若 $\triangle OAB$ 的顶点 B 也在曲线 C 上, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值, 并求这时点 B 的直角坐标.

23. (10分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, $a + b + c = 3$.

- (1) 求 $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1}$ 的最大值;
- (2) 求证: $\frac{a^2+c^2}{b} + \frac{b^2+a^2}{c} + \frac{c^2+b^2}{a} \geq 6$.

宜宾市普通高中 2019 级第二次诊断测试

文科数学参考答案

一、选择题：ACDC, BCBC, BABA

二、填空题：13. 25; 14. $\frac{5}{4}$; 15. (-3,1); 16. 4

三、解答题：

17. 解 (1) 由已知得 $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$,1分

$\bar{y} = \frac{1}{5}(12.7+13.1+14.0+14.9+15.3) = 14$,2分

$\therefore \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i y_i - 5 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5 \cdot \bar{x}^2} = \frac{1 \times 12.7 + 2 \times 13.1 + 3 \times 14 + 4 \times 14.9 + 5 \times 15.3 - 5 \times 3 \times 14}{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 5 \times 3^2}$
 $= \frac{12.7 + 26.2 + 42 + 59.6 + 76.5 - 210}{1 + 4 + 9 + 16 + 25 - 45} = \frac{7}{10} = 0.7$ 4分

$\therefore \hat{a} = 14 - 0.7 \times 3 = 11.9$, $\therefore y = 0.7x + 11.9$,5分

\therefore 2022 年的营业里程数为 $0.7 \times 6 + 11.9 = 16.1$ (万公里)6分

(2) 将 12.7, 13.1, 14.0, 14.9, 15.3 这五个数由小到大排列为 a, b, c, d, e , 其中 d, e 超过 14 万公里, 从中任取两个数得: $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$, 共 10 个8分

其中至少有一个超过 14 万公里的有 7 个,10分

设至少有一个超过 14 万公里的事件为 A , 则 $P(A) = \frac{7}{10}$12分

18. 解: (1) 若选①, 即 $\cos 2A = \cos(B+C)$, 得 $2\cos^2 A - 1 = -\cos A$ 2分

$\therefore 2\cos^2 A + \cos A - 1 = 0$, $\therefore \cos A = -1$ 或 $\frac{1}{2}$,4分

$\because A \in (0, \pi)$, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$,6分

(2) $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线 $\therefore AD = \frac{1}{2}(AB + AC)$,8分

$\therefore AD^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + 2AB \cdot AC \cos \frac{\pi}{3} + AC^2) = \frac{1}{4}(c^2 + 2c \cdot b \cos \frac{\pi}{3} + b^2)$

$= \frac{1}{4}(4^2 + 2 \times 4 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} + 2^2) = 7$ 11分

$\therefore AD = \sqrt{7}$ 12分

注: 若用余弦定理解参照给分.

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息。

若选②, 即 $a\sin C = \sqrt{3}c\cos A$, 由正弦定理得 $\sin A\sin C = \sqrt{3}\sin c\cos A$,3分

$Q A, C \in (0, \pi), \therefore \tan A = \sqrt{3}, \therefore A = \frac{\pi}{3}$,6分

(2) 同①.

19 (1) 证明: 连接 BD ,

$Q AB \perp AD, AB = AD = 1, PD = \sqrt{2}$

$Q AB \parallel CD, \therefore \angle BDC = \angle ABD = 45^\circ$,1分

$Q CD = 2, \therefore BC^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 2 \cos 45^\circ = 2$,

$\therefore BC^2 + BD^2 = BC^2, \therefore BC \perp BD$ 3分

$Q BC \perp DE, DE \cap DB = D, DE \subset \text{平面} PBD,$

$\therefore BC \perp \text{平面} PBD, \therefore BC \perp PD$,5分

$Q AD \perp PD, AD$ 与 BC 相交, $\therefore PD \perp \text{平面} ABCD$,6分

(2) 证明: 作 PA 的中点 F , 连接 EF, EC, DF

$Q E$ 为 PB 的中点, $\therefore EF \parallel \frac{1}{2} AB$,7分

$Q AB \parallel \frac{1}{2} CD, \therefore EF \parallel \frac{1}{4} CD, \therefore EF$ 与 CD 共面,

\therefore 平面 $CDFE$ 为过三点 C, D, E 的截面9分

$Q V_{P-CDE} = V_{B-CDE} = \frac{1}{2} V_{P-BCD}, PD \perp \text{平面} ABCD,$

$\therefore V_{P-CDE} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} (\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times 3 = \frac{1}{2}$

$Q V_{P-DFE} = \frac{1}{4} V_{P-CDE}, \therefore V_{P-DFE} = \frac{1}{8}$ 10分

$\therefore V = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ 12分

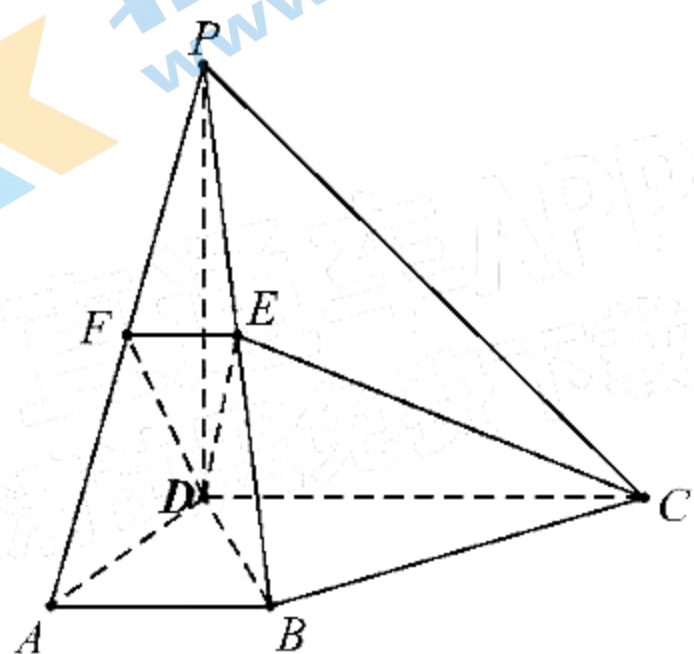
20. 解 (1) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$,

$a=2$ 时 $f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \therefore f'(1) = 1$ 2分

$Q f(1) = 2\ln 1 - 2\sqrt{1} = -2$

\therefore 曲线 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程 为 $y+2=x-1$, 即 $x-y-3=0$ 4分

(2) ① $a < 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 不合题意.6分



② $a > 0$ 时, 由 $f(x) = 0$ 得, $\frac{2}{a} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 7 分

令 $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, 则 $g'(x) = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}$ 8 分

由 $g'(x) = 0$ 得 $2 - \ln x = 0$, $x = e^2$

由 $g'(x) > 0$ 得 $2 - \ln x > 0$, $0 < x < e^2$

由 $g'(x) < 0$ 得 $2 - \ln x < 0$, $x > e^2$ 10 分

$$g(e^2) = \frac{\ln e^2}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}, g(16) = \frac{\ln 16}{\sqrt{16}} = \ln 2$$

由 $g(x)$ 的图象得, 当 $\ln 2 \leq \frac{2}{a} < \frac{2}{e}$ 时, $\frac{2}{a} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 在 $(0, 16]$ 有两个根, $f(x)$ 有两个零点

$\therefore a$ 的范围是 $(e, \frac{2}{\ln 2}]$ 12 分

注: 若用换元法, 直接求 $f'(x)$ 求解, 等参照给分.

21. 解: (1) 解: $Q G(0, 1)$, $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, $\therefore \overrightarrow{F_1G} = (c, 1)$, $\overrightarrow{F_2G} = (-c, 1)$ 1 分

$$\overrightarrow{F_1G} \cdot \overrightarrow{F_2G} = 1 - c^2 = -2, \therefore c^2 = 3 = a^2 - 1 \therefore a^2 = 4 \text{ 3 分}$$

$$\therefore E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \text{ 4 分}$$

(2) 设 $l_{AB}: y = k_1x$, $l_{CD}: y = k_2x$, 不妨设 $A(x_1, k_1x_1)$ ($x_1 > 0$), $C(x_2, k_2x_2)$ ($x_2 > 0$)

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ y = k_1x \end{cases} \text{ 联立得: } (4k_1^2 + 1)x_1^2 = 4,$$

$$\text{得 } x_1 = \frac{2}{\sqrt{1 + 4k_1^2}}, \text{ 同理 } x_2 = \frac{2}{\sqrt{1 + 4k_2^2}} \text{ 6 分}$$

$$\text{又 } |OA| = \sqrt{1 + k_1^2} \cdot x_1 \text{ 7 分}$$

$$\text{点 } C \text{ 到 } l_{AB}: k_1x - y = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|k_1x_2 - k_2x_2|}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \frac{x_2 \cdot |k_1 - k_2|}{\sqrt{1 + k_1^2}} \text{ 8 分}$$

$$\therefore S = 4S_{\triangle AOC} = 4 \times \frac{1}{2} \cdot |OA| \cdot d = 2\sqrt{1 + k_1^2} x_1 \cdot \frac{x_2 \cdot |k_1 - k_2|}{\sqrt{1 + k_1^2}} = 2x_1x_2 \cdot |k_1 - k_2|$$

$$= \frac{8|k_1 - k_2|}{\sqrt{1 + 4k_1^2} \sqrt{1 + 4k_2^2}} = \frac{8\sqrt{(k_1^2 + k_2^2) - 2k_1k_2}}{\sqrt{1 + 4(k_1^2 + k_2^2) + 16(k_1k_2)^2}}$$

$$= \frac{8\sqrt{(k_1^2 + k_2^2) - 2t}}{\sqrt{4(k_1^2 + k_2^2) + (16t^2 + 1)}} = \frac{4\sqrt{(k_1^2 + k_2^2) - 2t}}{\sqrt{(k_1^2 + k_2^2) + (4t^2 + \frac{1}{4})}} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

当 $4t^2 + \frac{1}{4} = -2t$, 即存在 $t = -\frac{1}{4}$, 使四边形 $ACBD$ 的面积为定值 4. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

(二) 选考题:

22 解: (1) 设 $Q(\rho, \theta)$, $P(\rho_1, \theta_1)$, 由已知得

$$\rho_1 \sin \theta_1 = -2, \quad \rho_1 \rho = 8, \quad \theta = \theta_1 + \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

则 $\frac{8}{\rho} \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -2$, \therefore 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta (\rho \neq 0)$ $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) l 的直角坐标方程为 $y = x$

C 的直角坐标方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4 (x \neq 0)$

由 $\begin{cases} y = x \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 (x \neq 0) \end{cases}$ 得点 A 的直角坐标为 $(2, 2)$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

由已知可设 B 的直角坐标为 $(2 + 2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$, 则

$$B \text{ 到 } l: x - y = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|2 \cos \alpha + 2 - 2 \sin \alpha|}{\sqrt{2}} = |\sqrt{2} - 2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})| \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} |OA| \cdot d = \sqrt{2} |2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}| \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = -1$, 即 $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ 时 ΔAOB 面积有最大值为 $2 + 2\sqrt{2}$ $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

这时点 B 的直角坐标为 $(2 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$ $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

23. 解: (1) $Q a, b, c \in \mathbf{R}^+, a + b + c = 3$

$$\begin{aligned} &\therefore (\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1})^2 \\ &= (a+b+c+3) + 2\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{b+1} + 2\sqrt{b+1} \cdot \sqrt{c+1} + 2\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{c+1} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 6 + 2\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{b+1} + 2\sqrt{b+1} \cdot \sqrt{c+1} + 2\sqrt{a+1} \cdot \sqrt{c+1} \\ &\leq 6 + (a+b+2) + (b+c+2) + (a+c+2) = 18 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \leq 3\sqrt{2}$ (当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等)

$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1}$ 的最大值为 $3\sqrt{2}$ $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(2) Q \frac{a^2 + c^2}{b} + \frac{b^2 + a^2}{c} + \frac{c^2 + b^2}{a} \geq \frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjgkzx\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息。

又 $Q \frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} = 2a(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}) \geq 4a$, 同理: $\frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a} \geq 4b, \frac{2ac}{b} + \frac{2bc}{a} \geq 4c$ 8分

$\therefore \frac{2ac}{b} + \frac{2ab}{c} + \frac{2bc}{a} \geq 2(a+b+c) = 6, ,$

$\therefore \frac{a^2+c^2}{b} + \frac{b^2+a^2}{c} + \frac{c^2+b^2}{a} \geq 6$ 10分

23.解: (1) 法一: 柯西不等式

$Q(\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1})^2 \leq [(a+1) + (b+1) + (c+1)](1+1+1) = 18$ 2分

$\therefore \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \leq 3\sqrt{2}$ (当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等)5分

(2) $Q \frac{a^2+c^2}{b} + \frac{b^2+a^2}{c} + \frac{c^2+b^2}{a} = (\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}) + (\frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{c}) + (\frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{a})$

$(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a})(b+a) \geq (a+b)^2,$

$\therefore (\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}) \geq (a+b)$ (当且仅当 $a=b$ 时取等)7分

同理可得: $(\frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b}) \geq (b+c)$ (当且仅当 $b=c$ 时取等)8分

$(\frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{c}) \geq (c+a)$ (当且仅当 $c=a$ 时取等)9分

$\therefore \frac{a^2+c^2}{b} + \frac{b^2+a^2}{c} + \frac{c^2+b^2}{a} = (\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}) + (\frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{c}) + (\frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{a}) \geq 2(a+b+c) = 6$

(当且仅当 $a=b=c$ 时取等)10分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯

官方微信公众号: bjkzx

官方网站: www.gaokzx.com

咨询热线: 010-5751 5980

微信客服: gaokzx2018

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯\(微信号:bjkzx\)](https://www.gkaozx.com), 获取更多试题资料及排名分析信息。