

2023 北京陈经纶中学高二 10 月月考

数 学

本试卷共 8 页，120 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 直线 $x - y - 2 = 0$ 的倾斜角是 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

2. 已知点 $A(1,1,0)$, $B(-1,0,2)$, $C(0,2,0)$ 都在平面 α 内，则平面 α 的一个法向量的坐标可以是 ()

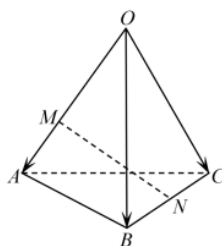
- A. $(2,2,3)$ B. $(1,-1,\frac{1}{2})$ C. $(1,1,-\frac{3}{2})$ D. $(2,-2,-1)$

3. 过点 $P(-1,3)$ 且垂直于直线 $x - 2y + 3 = 0$ 的直线方程为 ()

- A. $2x + y - 1 = 0$ B. $2x + y - 5 = 0$ C. $x + 2y - 5 = 0$ D. $x - 2y + 7 = 0$

4. 如图，空间四边形 $OABC$ 中， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ，点 M 在 \overline{OA} 上，且满足 $\overline{OM} = 2\overline{MA}$ ，点 N 为 BC 的中点，则 $\overline{MN} =$ ()

- A. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ B. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$
C. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$ D. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$



5. 若直线 $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ 与直线 $2\sqrt{3}x + my + 3 = 0$ 平行，则它们之间的距离是 ()

- A. 1 B. $\frac{5}{4}$ C. 3 D. 4

6. 已知 $\vec{a} = (2,3,-2)$, $\vec{b} = (-4,2,1)$, $\vec{c} = (10,3,\lambda)$ ，若 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 共面，则实数 λ 等于 ()

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $-\frac{11}{2}$

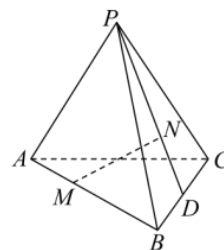
7. 直线 $l: ax + y + 1 = 0$ 与连接 $A(2,3)$, $B(-3,2)$ 的线段相交，则 a 的取值范围是 ()

- A. $[-1,2]$ B. $[2,+\infty) \cup (-\infty,-1)$ C. $[-2,1] \cup (2,3)$ D. $(-\infty,-2] \cup [1,+\infty)$

8. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $\triangle PAC$ 是边长为 3 的正三角形， M 是 AB 上一点，

$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{MB}$ ， D 为 BC 的中点， N 为 PD 上一点且 $\overline{PN} = \frac{2}{3}\overline{PD}$ ，则 $|MN| =$ ()

- A. 5 B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{3}$

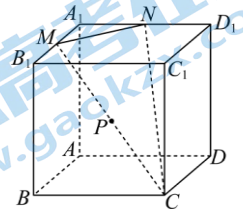


9. $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(0,2)$, $E(-1,0)$, $F(1,0)$ ，一束光线从点 F 出发射到 BC 上

的点 D ，经 BC 反射后，再经 AC 反射，落到线段 AE 上（不含端点），则 FD 的斜率的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

10. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， M ， N 分别是棱 A_1B_1 ， A_1D_1 的中点，点 E 在 BD 上，点 F 在 B_1C 上，且 $BE=CF$ ，点 P 在线段 CM 上运动，给出下列四个结论：



- ①当点 E 是 BD 中点时，直线 $EF \parallel$ 平面 DCC_1D_1 ；
 ②直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；
 ③存在点 P ，使得 $\angle B_1PD_1 = 90^\circ$ ；
 ④ $\triangle PDD_1$ 面积的最小值是 $\frac{5\sqrt{5}}{6}$ 。其中所有正确结论的个数是（ ）

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

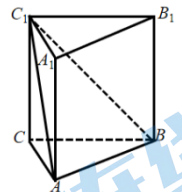
第二部分（非选择题 共 80 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 若直线 $l_1: mx + y - 1 = 0$ 与 $l_2: (4m - 3)x + my - 1 = 0$ 平行，则实数 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标为 $A(3, 3)$ 、 $B(2, -2)$ 、 $C(-7, 1)$ ，则 BC 边上的高所在的直线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ； $\triangle ABC$ 的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，所有棱长均为 1，且 $AA_1 \perp$ 底面 ABC ，则点 B_1 到平面 ABC_1 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



14. 已知点 $A(-3, 1)$ ，点 M 、 N 分别是 x 轴和直线 $2x + y - 5 = 0$ 上的两个动点，则 $|AM| + |MN|$ 的最小值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

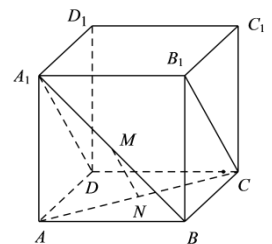
15. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AB = 2$ ， $AA_1 = \sqrt{3}$ ， O 为 BC 的中点， M 是棱 B_1C_1 上一动点，过 O 作 $ON \perp AM$ 于点 N ，则线段 MN 长度的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。已知点

$A(-1, 0)$ 、 $B(1, 0)$ 、 $C(0, 1)$ ，直线 $y = ax + b$ ($a > 0$) 将

$\triangle ABC$ 分割为面积相等的两部分，则 b 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

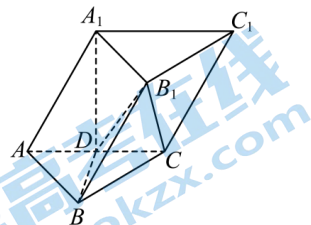
三、解答题共 4 小题，共 50 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17. (本小题 12 分) 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 2， M 、 N 分别为 A_1B 、 AC 的中点。



- (I) 证明： $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ；
 (II) 求 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角的大小。

18. (本小题 12 分) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=BC, AC=AA_1$, 点 D 为棱 AC 的中点, 平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C , 且 $\angle A_1AC = 60^\circ$.



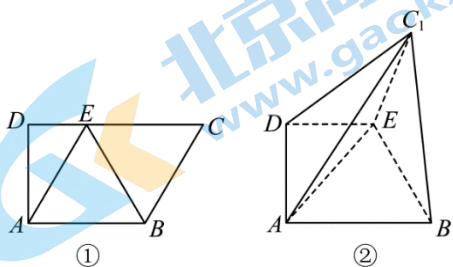
(I) 求证: $A_1D \perp$ 平面 ABC ;

(II) 若 $AB \perp BC$, 求二面角 $D-B_1C-B$ 的正弦值.

19. (本小题 13 分) 图①是直角梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\angle D = 90^\circ$, 四边形 $ABCE$ 是边长为 2 的菱形, 并且 $\angle BCE = 60^\circ$, 以 BE 为折痕将 $\triangle BCE$ 折起, 使点 C 到达 C_1 的位置, 且 $AC_1 = \sqrt{6}$.

(I) 求证: 平面 $BC_1E \perp$ 平面 $ABED$;

(II) 在棱 DC_1 上是否存在点 P , 使得点 P 到平面 ABC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$? 若存在, 求出直线 EP 与平面 ABC_1 所成角的正弦值; 若不存在, 请说明理由.



20. (本小题 13 分) 设 n 为正整数, 集合 $A = \{a | a = (t_1, t_2, \dots, t_n),$

$t_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, n\}$. 对于集合 A 中的任意元素 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $\beta = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,

记 $M(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [(x_1 + y_1 - |x_1 - y_1|) + (x_2 + y_2 - |x_2 - y_2|) + \dots + (x_n + y_n - |x_n - y_n|)]$.

(I) 当 $n=3$ 时, 若 $\alpha = (1, 1, 0)$, $\beta = (0, 1, 1)$, 求 $M(\alpha, \alpha)$ 和 $M(\alpha, \beta)$ 的值;

(II) 当 $n=4$ 时, 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意元素 α, β , 当 α, β 相同时, $M(\alpha, \beta)$ 是奇数; 当 α, β 不同时, $M(\alpha, \beta)$ 是偶数. 求集合 B 中元素个数的最大值;

(III) 给定不小于 2 的 n , 设 B 是 A 的子集, 且满足: 对于 B 中的任意两个不同的元素 α, β , $M(\alpha, \beta) = 0$. 写出一个集合 B , 使其元素个数最多, 并说明理由.

参考答案

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	A	A	B	B	D	D	D	D	C

9. 解析: 设直线 BC 方程为 $y=kx+b$, 则 $\begin{cases} 0=2k+b \\ 2=b \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k=-1 \\ b=2 \end{cases}$, 即 $BC: y=-x+2$, 即 $BC: x+y-2=0$,

设 $A(-2,0)$ 关于直线 BC 对称的点为 $A_1(x,y)$, 则 $\begin{cases} \frac{y}{x+2}=1 \\ \frac{x-2}{2}+\frac{y}{2}-2=0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$, 即 $A_1(2,4)$, $k_{A_1F}=4$,

同理可得:

点 $E(-1,0)$ 关于直线 $AC: y=x+2$ 的对称点为 $E_1(-2,1)$,

点 $E_1(-2,1)$ 关于直线 $BC: y=-x+2$ 的对称点为 $E_2(1,4)$,

如图所示:

利用光线反射的性质可知, 当这束光线反射后最终经过点 A 时, 则其先经过点

N ; 当这束光线反射后最终经过点 E 时, 则其先经过点 M ;

所以点 M, N 之间为点 D 的变动范围,

因为 $E_2(1,4)$, $F(1,0)$, 所以直线 FE_2 , 即直线 FM 斜率不存在, 而

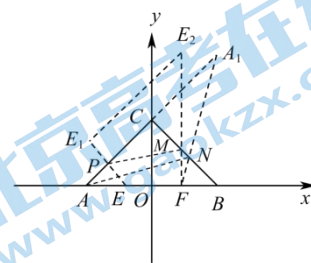
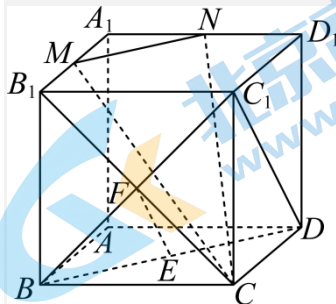
$k_{FN}=k_{A_1F}=4$,

所以 $k_{FD} > k_{FN}=4$, 即 $k_{FD} \in (4, +\infty)$. 故选: D

10. 解析: 对于①, 点 E 是 BD 中点, $BD=B_1C=2\sqrt{2}$,

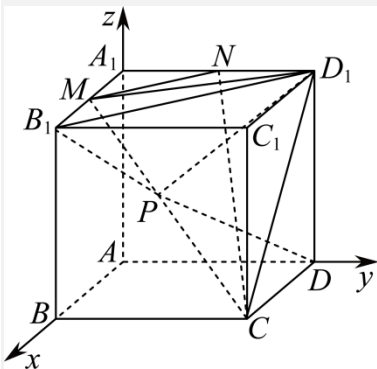
而 $BE=CF$, 故 $CF=BE=\sqrt{2}$, 即 F 为 B_1C 的中点,

连接 DC_1 , 则 $EF \parallel DC_1$, 因为 $EF \not\subset$ 平面 DCC_1D_1 , $DC_1 \subset$ 平面 DCC_1D_1 ,



故直线 $EF \parallel$ 平面 DCC_1D_1 ，①正确；

对于②，连接 B_1D_1, M, N 分别是棱 A_1B_1, A_1D_1 的中点，



故 $B_1D_1 \parallel MN$ ， $B_1D_1 \not\subset$ 平面 CMN ， $MN \subset$ 平面 CMN ，

故 $B_1D_1 \parallel$ 平面 CMN ，

故直线 B_1D_1 到平面 CMN 的距离等于点 D_1 到平面 CMN 的距离，设为 h ；

$$MN = \frac{1}{2} B_1D_1 = \sqrt{2}, CN = CM = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1^2} = 3, V_{C-MND_1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) \times 2 = \frac{1}{3},$$

$$S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}, \text{ 故 } V_{D_1-CMN} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{17}}{2} \times h,$$

由于 $V_{C-MND_1} = V_{D_1-CMN}$ ，故 $\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{17}}{2} \times h, \therefore h = \frac{2\sqrt{17}}{17}$ ，②错误；

对于③，以点 A 为坐标原点， AB, AD, AA_1 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系，

则 $M(1,0,2), C(2,2,0), B_1(2,0,2), D_1(0,2,2)$ ，

$\overline{MC} = (1, 2, -2)$ ，设 $\overline{MP} = t \cdot \overline{MC} = (t, 2t, -2t), t \in [0, 1]$ ，

故 $P(t+1, 2t, -2t+2)$ ，则 $\overline{PB_1} = (1-t, -2t, 2t), \overline{PD_1} = (-t-1, 2-2t, 2t)$ ，

由 $\angle B_1PD_1 = 90^\circ$ ，得 $\overline{PB_1} \cdot \overline{PD_1} = (1-t)(-t-1) + (-2t)(2-2t) + 2t \cdot 2t = 9t^2 - 4t - 1 = 0$ ，

解得 $t = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{9} \in [0, 1]$ ，故存在点 P ，使得 $\angle B_1PD_1 = 90^\circ$ ，③正确；

对于④，由③知 $P(t+1, 2t, -2t+2)$ 在 DD_1 上的投影为 $(0, 2, -2t+2)$ ，

故 $P(t+1, 2t, -2t+2)$ 到 DD_1 的距离为 $d = \sqrt{(t+1)^2 + (2-2t)^2} = \sqrt{5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}$ ，

则 $\triangle PDD_1$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times 2 \times d = \sqrt{5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}}, t \in [0, 1]$ ，

当 $t = \frac{3}{5} \in [0, 1]$ 时， $5\left(t-\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}$ 取得最小值 $\frac{16}{5}$ ，

故 $\triangle PDD_1$ 的面积 S 取到最小值 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，④错误，

故所有正确结论的个数是 2,

故选: C

第二部分 (非选择题 共 80 分)

二、填空题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

11. 3

12. $3x - y - 6 = 0, 24$

13. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

14. $\frac{12\sqrt{5}}{5}$

15. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

16. $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$

三、解答题共 4 小题, 共 50 分。解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程。

17. 【解析】(I) 如图, 以点 D 为坐标原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, DD_1 为 z 轴建立空间直角坐标系。

则 $A(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $A_1(2,0,2)$, $B(2,2,0)$, $B_1(2,2,2)$, $M(2,1,1)$, $N(1,1,0)$ 。

所以 $\overrightarrow{MN} = (-1, 0, -1)$,

因为 $DC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$,

因为 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$, 所以 $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{DC}$,

因为 $MN \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1

(II) $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{DA_1} = (2, 0, 2)$, $\overrightarrow{A_1B} = (0, 2, -2)$ 。

设平面 A_1B_1CD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{DA_1} \cdot \vec{n} = 2x + 2z = 0 \\ \overrightarrow{DC} \cdot \vec{n} = 2y = 0 \end{cases}, \text{令 } z = 1, \text{ 则 } x = -1, y = 0,$$

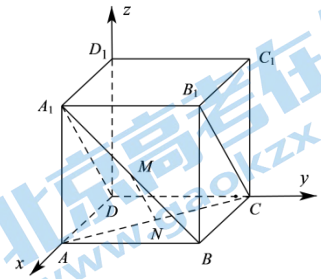
所以 $\vec{n} = (-1, 0, 1)$

设 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-2|}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

因为 $0^\circ \leq \theta < 180^\circ$,

所以 A_1B 与平面 A_1B_1CD 所成角为 30° 。



18. 【解析】(I) 如图, 连接 A_1C .

因为侧面 AA_1C_1C 为菱形, 且 $\angle A_1AC = 60^\circ$,

所以 $\triangle AA_1C$ 为等边三角形, 所以 $A_1D \perp AC$.

又因为平面 $ABC \perp$ 平面 AA_1C_1C ,

$A_1D \subset$ 平面 AA_1C_1C , 平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 $ABC = AC$,

所以 $A_1D \perp$ 平面 ABC .

(II) 由 (I) 的过程可知, 可以点 D 为坐标原点, 分别以 DB, DC, DA_1 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $D-xyz$.

不妨设 $AC = 2$, 由题可知

$$D(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0), A(0,-1,0), A_1(0,0,\sqrt{3}).$$

由 $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$, 可得 $B_1(1,1,\sqrt{3})$.

设平面 DCB_1 的法向量为 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

而 $\overrightarrow{CB_1} = (1,0,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DC} = (0,1,0)$,

$$\text{则有} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{CB_1} = x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DC} = y_1 = 0 \end{cases},$$

取 $z_1 = \sqrt{3}$, 得 $\vec{n} = (-3,0,\sqrt{3})$.

设平面 BB_1C 的法向量为 $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

而 $\overrightarrow{CB} = (1,-1,0)$, $\overrightarrow{CB_1} = (1,0,\sqrt{3})$,

$$\text{则有} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{CB_1} = x_2 - y_2 = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{CB} = x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases},$$

取 $z_2 = \sqrt{3}$, 得 $\vec{m} = (-3,-3,\sqrt{3})$.

设平面 DB_1C 与平面 BB_1C 夹角为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{m}|}{|\vec{n}| |\vec{m}|} = \frac{9+3}{2\sqrt{3} \times \sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

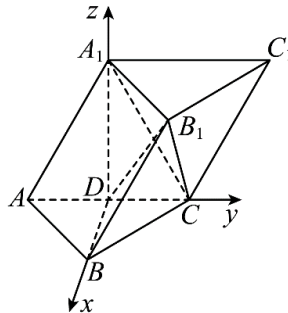
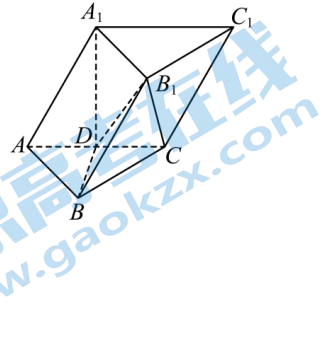
所以 $\sin \theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

由题意知, 二面角 $D-B_1C-B$ 是锐角,

所以二面角 $D-B_1C-B$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

19. 【解析】(I) 在图①中, 连接 AC , 交 BE 于 O ,

\because 四边形 $ABCE$ 是边长为 2 的菱形, $\angle BCE = 60^\circ$,



$$\therefore AC \perp BE, \quad OA = OC = \sqrt{3};$$

在图②中，相交直线 OA, OC_1 均与 BE 垂直，

$\therefore \angle AOC_1$ 是二面角 $A-BE-C_1$ 的平面角，

$$\therefore AC_1 = \sqrt{6}, \quad \therefore OA^2 + OC_1^2 = AC_1^2, \quad \therefore OA \perp OC_1, \quad \angle AOC_1 = 90^\circ,$$

\therefore 平面 $BC_1E \perp$ 平面 $ABED$.

(II) 以 O 为坐标原点， $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC_1}$ 正方向为 x, y, z 轴可建立如图②所示空间直角坐标系，则

$$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right), \quad C_1(0, 0, \sqrt{3}), \quad A(\sqrt{3}, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad E(0, -1, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{DC_1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}\right), \quad \overrightarrow{AD} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right), \quad \overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0),$$

$$\overrightarrow{AC_1} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}), \quad \overrightarrow{AE} = (-\sqrt{3}, -1, 0),$$

$$\text{设 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DC_1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda, \sqrt{3}\lambda\right), \quad \lambda \in [0, 1],$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\lambda, \sqrt{3}\lambda\right),$$

设平面 ABC_1 的一个法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}x + y = 0 \\ \overrightarrow{AC_1} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \quad \text{令 } x = 1,$$

$$\text{解得: } y = \sqrt{3}, \quad z = 1, \quad \therefore \vec{n} = (1, \sqrt{3}, 1);$$

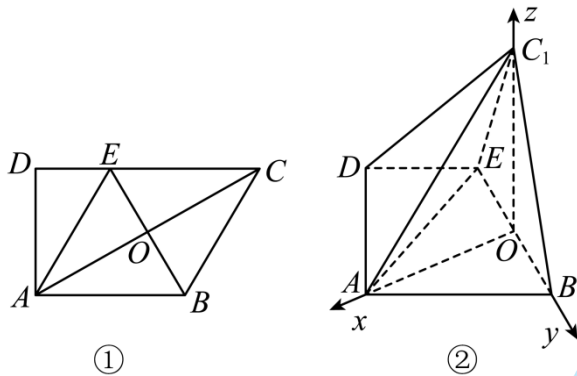
$$\therefore \text{点 } P \text{ 到平面 } ABC_1 \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|2\sqrt{3}\lambda - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

$$\text{解得: } \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda = \frac{3}{2} \text{ (舍)},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \therefore \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AE} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \left| \cos \langle \overrightarrow{EP}, \vec{n} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{EP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{EP}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

\therefore 直线 EP 与平面 ABC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.



20. 【解析】(I) 因为 $\alpha = (1, 1, 0)$, $\beta = (0, 1, 1)$,

$$\text{所以 } M(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2} [(1+1-|1-1|) + (1+1-|1-1|) + (0+0-|0-0|)] = 2,$$

$$M(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} [(1+0-|1-0|) + (1+1-|1-1|) + (0+1-|0-1|)] = 1.$$

(II) 设 $\alpha = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in B$, 则 $M(\alpha, \alpha) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

由题意知 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$, 且 $M(\alpha, \alpha)$ 为奇数,

所以 x_1, x_2, x_3, x_4 中 1 的个数为 1 或 3.

所以 $B \subseteq \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$.

将上述集合中的元素分成如下四组:

$(1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0)$; $(0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1)$; $(0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 1)$; $(0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1)$.

经验证, 对于每组中两个元素 α, β , 均有 $M(\alpha, \beta) = 1$.

所以每组中的两个元素不可能同时是集合 B 的元素.

所以集合 B 中元素的个数不超过 4.

又集合 $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ 满足条件,

所以集合 B 中元素个数的最大值为 4.

(III) 设 $S_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A, x_k = 1, x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = 0\} (k=1, 2, \dots, n)$,
 $S_{n+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0\}$, 则 $A = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{n+1}$.

对于 $S_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ 中的不同元素 α, β ,

经验证, $M(\alpha, \beta) \geq 1$.

所以 $S_k (k=1, 2, \dots, n-1)$ 中的两个元素不可能同时是集合 B 的元素.

所以 B 中元素的个数不超过 $n+1$.

取 $e_k = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S_k$ 且 $x_{k+1} = \dots = x_n = 0 (k=1, 2, \dots, n-1)$.

令 $B = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}) \cup S_n \cup S_{n+1}$, 则集合 B 的元素个数为 $n+1$, 且满足条件.

故 B 是一个满足条件且元素个数最多的集合.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：**京考一点通**，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！

