2022 北京北师大二附中高三 12 月月考

数　　学

一、选择题（共 10 小题；共 40 分）

1. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3,4\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

A. $\{2,5\}$　　B. $\{3,5\}$　　C. $\{4,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

2. 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程是（　　）

A. $x=-2$　　B. $x=-1$　　C. $x=1$　　D. $x=2$

3. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\geq 0$，则 $\neg p$ 是（　　）

A. $\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2<0$　　B. $\forall x\notin\mathbf{R}$，$x^2\geq 0$

C. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2\geq 0$　　D. $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2<0$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1=1$，$a_5=9$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项和是（　　）

A. 15　　B. 20　　C. 25　　D. 35

5. 从 2 名教师和 5 名学生中，选出 3 人参加“我爱我的祖国”主题活动．要求入选的 3 人中至少有 1 名教师，则不同的选取方案的种数是（　　）

A. 20　　B. 25　　C. 30　　D. 55

6. 已知 $a>b$，且 $ab\neq 0$，则下列不等式中一定成立的是（　　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$

C. $a^3>b^3$　　D. $\log_2|a|>\log_2|b|$

7. 已知角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$，则 $\cos 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{24}{25}$　　B. $-\frac{7}{25}$　　C. $\frac{7}{25}$　　D. $\frac{16}{25}$

8. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=2$，$AC=3$，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3\sqrt{3}$，则 $\left|\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}\right|(\lambda\in\mathbf{R})$ 的最小值是（　　）

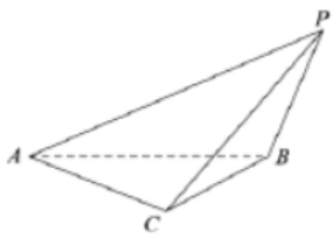
A. $\frac{3}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $2\sqrt{3}$

9. 如图是等轴双曲线形拱桥，现拱顶离水面 5 m，水面宽 $AB=$ 30 m．若水面下降 5 m，则水面宽是（　　）（结果精确到 0.1 m）（参考数值：$\sqrt{2}\approx 1.41,\sqrt{5}\approx 2.24,\sqrt{7}\approx 2.65$）

A. 43.8 m　　B. 44.8 m

C. 52.3 m　　D. 53.0 m

10. 如图，等腰直角 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC=2$，点 P 为平面 ABC 外一动点，满足 $PB=AB$，$\angle PBA=\frac{\pi}{2}$，给出下列四个结论：



①存在点 P，使得 平面$PAC\perp$平面PBC；

②存在点 P，使得 平面$PAC\perp$平面PAB；

③设 $\triangle PAC$ 的面积为 S，则 S 的取值范围是 $(0,4]$；

④设二面角 $A-PB-C$ 的大小为 α，则 α 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$.

其中正确结论是（　　）

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

二、填空题（共 5 小题；共 25 分）

11. 复数 $\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$（i 是虚数单位）的虚部是________.

12. 在 $(x-2)^6$ 的展开式中，x^3 的系数是________.

13. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，点 A 的坐标为 $(4,0)$，若以线段 OA 为直径的圆与直线 $y=2x$ 在第一象限交于点 B，则直线 AB 的方程是________.

14. 某地区每年各个月份的月平均最高气温近似地满足周期性规律，因此第 n 个月的月平均最高气温 $G(n)=A\cos(\omega n+\varphi)+k$ 来刻画，其中正整数 n 表示月份且 $n\in[1,12]$，例如 $n=1$ 表示 1 月份，n 和 k 是正整数，$\omega>0$，$\varphi\in(0,\pi)$. 统计发现，该地区每年各个月份的月平均最高气温有以下规律：

①该地区月平均最高气温最高的 7 月份与最低的 1 月份相差 30 摄氏度；

② 1 月份该地区月平均最高气温为 3 摄氏度，随后逐月递增直到 7 月份达到最高；

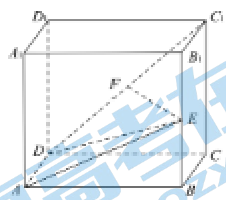
③每年相同的月份，该地区月平均最高气温基本相同.

根据已知信息，得到 $G(n)$ 的表达式是________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+4\mathrm{e}, & x\le 0\\ \frac{\mathrm{e}^x}{x}, & x>0\end{cases}$，若存在 $x_1\le 0$，$x_2>0$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1f(x_2)$ 的取值范围是________.

三、解答题（共 6 小题；共 85 分）

16. 如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$DD_1\perp$ 平面$ABCD$，E，F 分别是 BB_1，DC_1 的中点，$DA=1$，$DC=DD_1=2$.



（1）求证：EF∥平面$ABCD$；

（2）求直线 DC_1 与平面 EAD 所成角的正弦值.

17. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，设 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}$，已知 $c=\sqrt{7}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为已知，求 a 与 $\sin C$ 的值.

条件①：$b=3$；条件②：$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$；条件③：$\cos B=\frac{\sqrt{7}}{14}$.

18. 某企业为了解职工 A 款 APP 和 B 款 APP 的用户量情况，对本单位职工进行简单随机抽样，获得数据如下表：

	男职工		女职工	
	使用	不使用	使用	不使用
A 款 APP	72 人	48 人	40 人	80 人
B 款 APP	60 人	60 人	84 人	36 人

假设所有职工对两款 APP 是否使用相互独立.

（1）分别估计该企业男职工使用 A 款 APP 的概率、该企业女职工使用 A 款 APP 的概率.

（2）从该企业男，女职工中各随机抽取 1 人，记这 2 人中使用 A 款 APP 的人数为 X，求 X 的分布列及数学期望.

（3）据电商行业发布的市场分析报告显示，A 款 APP 的用户中男性占 52.04% 、女性占 47.96%；B 款 APP 的用户中男性占 38.92% 、女性占 61.08%. 试分析该企业职工使用 A 款 APP 的男、女用户占比情况和使用 B 款 APP 的男、女用户占比情况哪一个与市场分析报告中的男、女用户占比情况更相符.

19. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-1$.

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）设函数 $g(x)=f(x)+t\ln x$，当 $t\leq 1$ 时，求 $g(x)$ 零点的个数.

20. 已知抛物线 $y^2=x$.

（1）过抛物线焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，求 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的值（其中 O 为坐标原点）；

（2）过抛物线上的一点 $C(x_0,y_0)$，分别作两条直线交抛物线于另外两点 $P(x_P,y_P)$，$Q(x_Q,y_Q)$，交直线 $x=-1$ 于 $A_1(-1,1)$，$B_1(-1,-1)$ 两点，求证：$y_P\cdot y_Q$ 为常数；

（3）已知点 $D(1,1)$，在抛物线上是否存在异于点 D 的两个不同点 M，N，使得 $DM\perp MN$?若存在，求 N 点纵坐标的取值范围；若不存在，请说明理由.

21. 已知数列 $A_n: a_1,a_2,\cdots a_n(n\geq 2)$ 满足：① $|a_1|=1$；② $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=2(k=1,2,\cdots,n-1)$.

记 $S(A_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

（1）直接写出 $S(A_3)$ 的所有可能值；

（2）证明：$S(A_n)>0$ 的充要条件是 $a_n>0$；

（3）若 $S(A_n)>0$，求 $S(A_n)$ 的所有可能值的和.

参考答案

第一部分

1. A

【解析】因为 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3,4\}$，

所以 $\complement_U A=\{2,5\}$.

故选 A.

2. B

【解析】$y^2=4x$ 中 $p=2$，准线方程 $x=-\frac{p}{2}=-1$.

3. D

【解析】$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2\geq 0$ 的否定为 $\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2<0$.

4. C

【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，

所以 $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$，

所以 $S_5=\frac{a_1+a_5}{2}\times 5=\frac{1+9}{2}\times 5=25$.

5. B

【解析】教师 1 人，学生 2 人，则共有 $C_2^1C_5^2=2\times\frac{5\times 4}{2}=20$ 种，

教师 2 人，学生 1 人，则共有 $C_2^2C_5^1=5$ 种，

则共有 $20+5=25$ 种方案.

6. C

【解析】A 选项：当 $a>b>0$ 时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，

所以 A 不一定成立；

B 选项：当 $a>b>0$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，

所以 B 不一定成立.

C 选项：因为 $a>b$，

所以 $a^3>b^3$，

所以 C 一定成立；

D 选项：当 $1>a>b$ 时，$\log_2|a|<\log_2|b|$.

7. C

【解析】因为角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$，

所以 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，

所以

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \\ &= \frac{7}{25}.\end{aligned}$$

8. A

【解析】$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC = 2 \times 3\cos\angle BAC = -3\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle BAC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $\angle BAC \in [0, \pi]$，

所以 $\angle BAC = \frac{5\pi}{6}$，

因为

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AB}\right|^2 &= \left(\overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AB}\right)^2 \\ &= \overrightarrow{AC}^2 + \lambda^2\overrightarrow{AB}^2 - 2\lambda\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= 9 + 4\lambda^2 + 6\sqrt{3}\lambda,\end{aligned}$$

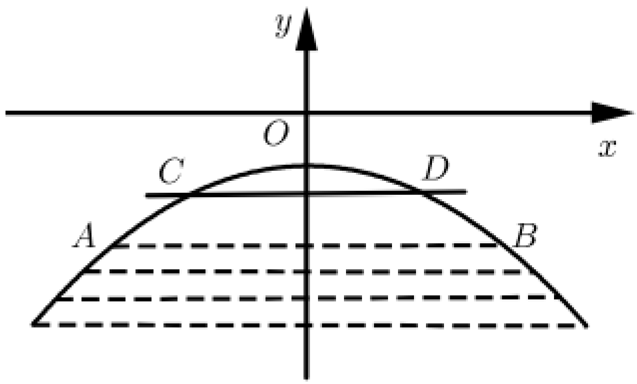
所以当 $\lambda = \frac{-6\sqrt{3}}{2\times 4} = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$ 时，

$$\left|\overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AB}\right|^2_{\min} = 9 + 4 \cdot \frac{27}{16} - 6\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{9}{4},$$

即 $\left|\overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AB}\right|_{\min} = \frac{3}{2}$.

9. B

【解析】如图所示，建立平面直角坐标系为：



因为拱桥是等轴双曲线，

则设双曲线方程 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1(a > 0)$，$C(0, -a)$，

又因为 $|AB| = 30$，$|CD| = 5$，则 $B(15, -a-5)$，

将 B 代入双曲线方程，可得 $\frac{(-a-5)^2}{a^2} - \frac{15^2}{a^2} = 1$，

解得 $a = 20$，即 $\frac{y^2}{20^2} - \frac{x^2}{20^2} = 1$，

当水面下降 5 m，纵坐标 $Y_N = -a - 10$，

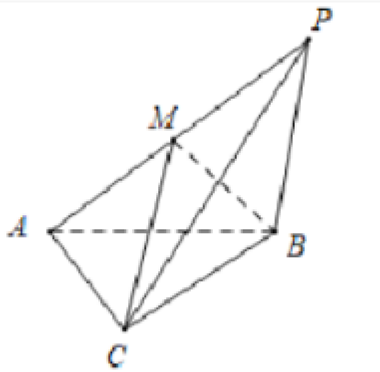
代入双曲线方程可得 $X_N = 10\sqrt{5}$，

所有 $|MN| = 2X_N = 20\sqrt{5} \approx 44.8$.

故选：B．

10. B

【解析】如图所示：



①当 $PB\perp BC$ 时，又 $PB\perp AB$，$BC\cap AB=B$，

所以 $PB\perp$ 平面ABC，

所以 $PB\perp AC$，

又 $AC\perp BC$，$PB\cap BC=B$，

所以 $AC\perp$ 平面PBC，

又 $AC\subset$ 平面PAC，

所以 平面$PAC\perp$ 平面PBC，故正确．

②取 AP 的中点 M，连接 BM，CM，

因为 $PB=AB$，

所以 $MB\perp AP$，

假设 平面$PAC\perp$ 平面PAB，则 $MB\perp$ 平面PAC，则 $MB\perp CM$，

而 $BM=BC=2$，$\angle BMC\neq 90°$，不成立，故错误；

③因为 $AP=4$，$AC=2$，

所以 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\angle PAC=4\sin\angle PAC$，

当点 P 在 $\triangle ABC$ 平面上，且 C，P 在 A，B 的异侧 $\angle PAC=90°$，

当 C，P 在 A，B 的同侧时，A，C，P 共线，$\angle PAC=0°$，

因为点 P 为平面 ABC 外，则 S 的取值范围是 $(0,4)$，故错误．

④因为 $\angle ABC=45°$，当点 P 在平面 ABC 内时 $\alpha=0$，当点 P 运动时，设点 A 到平面 PBC 的距离为 h，

因为 $PB\perp AB$，则 $\frac{h}{AB}\leq\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\alpha\leq\frac{\pi}{4}$，

所以 α 的取值范围是 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$，故正确．

第二部分

11. -1

【解析】因为 $\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=-(\mathrm{i}-\mathrm{i}^2)=-1-\mathrm{i}$,

所以复数 $\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$（i 是虚数单位）的虚部是 -1.

12. -160

【解析】二项式 $(x-2)^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\times x^{6-r}\times(-2)^r$,

含 x^3 的项为 $T_4=\mathrm{C}_6^3\times x^3\times(-2)^3=-160x^3$,

则 x^3 的系数是 -160.

13. $x+2y-4=0$

【解析】线段 OA 的中点是 $(2,0)$，$|OA|=4$,

则以线段 OA 为直径的圆是 $(x-2)^2+y^2=4$,

联立 $\begin{cases}y=2x,\\(x-2)^2+y^2=4,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{4}{5},\\y=\frac{8}{5},\end{cases}$ 则 $B\left(\frac{4}{5},\frac{8}{5}\right)$ ，

$k_{AB}=\frac{\frac{8}{5}-0}{\frac{4}{5}-4}=-\frac{1}{2}$，则直线 AB 的方程是 $y=-\frac{1}{2}(x-4)$,

整理为：$x+2y-4=0$.

故答案为：$x+2y-4=0$

14. $G(n)=15\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{5\pi}{6}\right)+18$，$n$ 是正整数且 $n\in[1,12]$

【解析】由题意可知 $\begin{cases}-A+k=3,\\(A+k)-(-A+k)=30,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}A=15,\\k=18,\end{cases}$

$7-1=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}$，解得：$\omega=\frac{\pi}{6}$,

当 $x=7$ 时，$\frac{\pi}{6}\times 7+\varphi=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$,

得：$\varphi=-\frac{7}{6}\pi+2k\pi$, 因为 $\varphi\in(0,\pi)$，所以 $\varphi=\frac{5}{6}\pi$,

所以 $G(n)$ 的表达式是，$G(n)=15\cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{5\pi}{6}\right)+18$，$n$ 是正整数且 $n\in[1,12]$.

15. $[-4\mathrm{e}^2,0]$

【解析】因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $x_1+4\mathrm{e}=\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}$，所以 $x_1=\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}-4\mathrm{e}$,

因为 $x_1\le 0$，所以 $\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}\le 4\mathrm{e}$,

当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x x-\mathrm{e}^x}{x^2}=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$,

由 $f'(x)>0$ 得 $x>1$，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<1$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最小值 e，所以 $\mathrm{e}\le\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}\le 4\mathrm{e}$,

所以 $x_1f(x_2)=\left(\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}-4\mathrm{e}\right)\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}=\left(\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}\right)^2-4\mathrm{e}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}$,

令 $t=\frac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2}$，则 $\mathrm{e}\le t\le 4\mathrm{e}$,

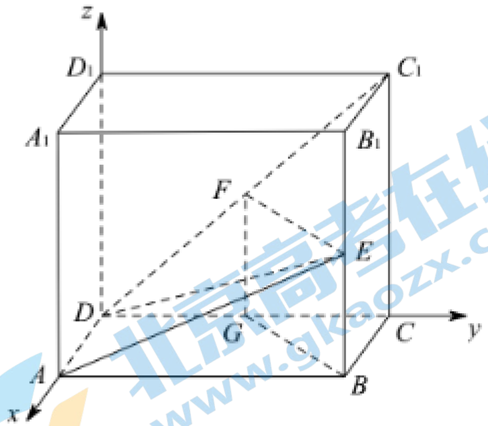
所以 $x_1 f(x_2) = t^2 - 4\mathrm{e}t = (t - 2\mathrm{e})^2 - 4\mathrm{e}^2$，

所以当 $t = 2\mathrm{e}$ 时，$x_1 f(x_2)$ 取得最小值 $-4\mathrm{e}^2$；当 $t = 4\mathrm{e}$ 时，$x_1 f(x_2)$ 取得最大值 0，

所以 $x_1 f(x_2)$ 的取值范围是 $[-4\mathrm{e}^2, 0]$.

第三部分

16. （1） 取 CD 的中点 G，连接 FG，BG.



因为 F 是 DC_1 的中点，

所以 $FG /\!/ CC_1$，$FG = \frac{1}{2}CC_1$.

因为 E 是 BB_1 的中点，

所以 $EB /\!/ CC_1$，$EB = \frac{1}{2}CC_1$.

所以 $FG /\!/ EB$，$FG = EB$.

所以四边形 $FGBE$ 是平行四边形.

所以 $EF /\!/ BG$.

因为 $EF \not\subset$ 平面$ABCD$，$BG \subset$ 平面$ABCD$，

所以 $EF /\!/$ 平面$ABCD$.

（2） 因为底面 $ABCD$ 为矩形，$DD_1 \perp$ 平面$ABCD$，

所以 $DA \perp DC$，$DD_1 \perp DA$，$DD_1 \perp DC$.

以点 D 为坐标原点，分别以直线 DA，DC，DD_1 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 D_{xyz}.

因为 $DA = 1$，$DC = DD_1 = 2$，

所以 $D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$E(1,2,1)$，$C_1(0,2,2)$.

所以 $\overrightarrow{DA} = (1,0,0)$，$\overrightarrow{DE} = (1,2,1)$，$\overrightarrow{DC_1} = (0,2,2)$.

设平面 EAD 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

所以 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DA} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DE} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x = 0, \\ x + 2y + z = 0. \end{cases}$ 令 $y = 1$，则 $z = -2$.

所以 $\vec{n} = (0,1,-2)$.

所以 $\cos\langle \overrightarrow{DC_1}, \vec{n} \rangle = \frac{-2}{2\sqrt{2} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以直线 DC_1 与平面 EAD 所成角的正弦值 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

17. （一）选择条件①：$b=3$；条件②：$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

因为 $b=3$，$c=\sqrt{7}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{7}\cdot\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\cos A=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

由余弦定理可得 $a^2=9+7-2\times 3\times\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

所以 $a=2$. （负值舍去），

由正弦定理可得 $\sin C=\frac{c\cdot\sin A}{a}$.

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $a=2$，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（二）选择条件①：$b=3$；条件③：$\cos B=\frac{\sqrt{7}}{14}$.

因为 $\cos B=\frac{\sqrt{7}}{14}$,

所以 $\sin B=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

由正弦定理可得 $\sin C=\frac{c\cdot\sin B}{b}$,

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由余弦定理可得 $9=a^2+7-2\cdot a\cdot\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}$.

所以 $a=2$. （负值舍去），

所以 $a=2$，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（三）选择条件②：$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$；条件③：$\cos B=\frac{\sqrt{7}}{14}$.

因为 $\cos B=\frac{\sqrt{7}}{14}$,

所以 $\sin B=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

因为 $b=3$，$S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $\frac{1}{2}\cdot a\cdot\sqrt{7}\times\frac{3\sqrt{21}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以 $a=2$.

由余弦定理可得 $b^2=4+7-2\times 2\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{7}}{14}$.

所以 $b=3$. （负值舍去），

由正弦定理可得 $\sin C=\frac{c\cdot\sin B}{b}$.

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以 $a=2$，$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. （1） 由所给数据可知，男职工使用 A 款 APP 的人数为 72，用频率估计概率，可得男职工使用京东 APP 的概率约为 $\frac{72}{120}=\frac{3}{5}$.

同理，女职工使用 A 款 APP 的概率约为 $\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$.

（2） X 的可能取值为 0，1，2.

所以 $P(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$；$P(X=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{8}{15}$；$P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{5}$

X 的数学期望 $EX=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{5}=\frac{14}{15}$.

（3） 样本中，A 款 APP 的男、女用户为 $72+40=112$（人），其中男用户占 $\frac{72}{112}\approx 64.3\%$；女用户占 $\frac{40}{112}\approx 35.7\%$.

样本中，B 款 APP 的男、女用户为 $60+84=144$（人），其中男用户占 $\frac{60}{144}\approx 41.7\%$；女用户占 $\frac{84}{144}\approx 58.3\%$.

所以该企业职工使用 B 款 APP 的情况与官方发布的男、女用户情况更相符.

19. （1） 因为 $f(x)=\frac{1}{x}-1$，所以 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，所以 $f(1)=0$，$f'(1)=-1$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=-(x-1)$，即 $x+y-1=0$.

（2） 因为 $g(x)=f(x)+t\ln x$，所以 $g(x)=\frac{1}{x}+t\ln x-1(x>0)$，

所以 $g'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{t}{x}=\frac{tx-1}{x^2}$.

①当 $t\le 0$ 时，$g'(x)\le 0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

因为 $g(1)=0$，所以 $g(x)$ 有且仅有一个零点；

②当 $0<t<1$ 时，令 $g'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{t}$，令 $g'(x)<0$，得 $x<\frac{1}{t}$.

所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{t}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{t},+\infty\right)$ 上单调递增.

因为 $g(1)=0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{t}\right)$ 上有且仅有一个零点.

因为 $g\left(\frac{1}{t}\right)<g(1)=0$，即 $t+t\ln\frac{1}{t}-1<0$，则 $\ln\frac{1}{t}<\frac{1}{t}-1<\frac{1}{t}$，

所以，$e^{1/t}>\frac{1}{t}$，则 $g\left(e^{1/t}\right)=\frac{1}{e^{1/t}}>0$，

所以 $\exists x_0\in\left(\frac{1}{t},+\infty\right)$，使得 $g(x_0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{t},+\infty\right)$ 上有且仅有一个零点.

所以当 $0<t<1$ 时，$g(x)$ 有两个零点；

③当 $t=1$ 时，$g'(x)=\frac{x-1}{x^2}$.

令 $g'(x)>0$，得 $x>1$，令 $g'(x)<0$，得 $x<1$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取得最小值，且 $g(1)=0$，所以 $g(x)$ 有且仅有一个零点.

综上所述，当 $t\le 0$ 或 $t=1$ 时，$g(x)$ 有且仅有一个零点；

当 $0<t<1$ 时，$g(x)$ 有两个零点.

20.（1） 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$F\left(\frac{1}{4},0\right)$，直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{1}{4}$，

由 $\begin{cases} y^2=x, \\ x=my+\frac{1}{4} \end{cases}$ 得 $y^2-my-\frac{1}{4}=0$，

所以 $y_1y_2=-\frac{1}{4}$，解得 $x_1x_2=\frac{1}{16}$，

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-\frac{3}{16}$.

（2） 设 $C(y_0^2,y_0)$，显然 $y_0\neq\pm1$，

直线 $A_1P: y-1=\frac{y_0-1}{y_0^2+1}(x+1)$，由 $\begin{cases} y-1=\frac{y_0-1}{y_0^2+1}(x+1), \\ y^2=x \end{cases}$ 得 $(y-y_0)[(y_0-1)y-y_0-1]=0$，

所以 $y_P=\frac{y_0+1}{y_0-1}$，

直线 $B_1Q: y+1=\frac{y_0+1}{y_0^2+1}(x+1)$，由 $\begin{cases} y+1=\frac{y_0+1}{y_0^2+1}(x+1), \\ y^2=x \end{cases}$ 得 $(y-y_0)[(y_0+1)y+y_0-1]=0$，

所以 $y_Q=\frac{1-y_0}{y_0+1}$，

所以 $y_P\cdot y_Q=\frac{y_0+1}{y_0-1}\cdot\frac{1-y_0}{y_0+1}=-1$.

（3） 设点 $M(y_3^2,y_3)$．$N(y_4^2,y_4)$，

所以 $\overrightarrow{DM}=(y_3^2-1,y_3-1)$，$\overrightarrow{MN}=(y_4^2-y_3^2,y_4-y_3)$，

因为 $DM\perp MN$，

所以 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{MN}=(y_3^2-1)(y_4^2-y_3^2)+(y_3-1)(y_4-y_3)=0$，

易得 $y_3\neq 1$，$y_4\neq y_3$，

所以 $(y_3+1)(y_4+y_3)+1=0$，

所以 $y_4=-\frac{1}{y_3+1}-y_3=-\frac{1}{y_3+1}-(y_3+1)+1$，

当 $y_3+1<0$ 时，由基本不等式得 $y_4=-\frac{1}{y_3+1}-(y_3+1)+1\ge 2\sqrt{\left(-\frac{1}{y_3+1}\right)\cdot[-(y_3+1)]}+1=3$，

当且仅当 $-\frac{1}{y_3+1}=-(y_3+1)$，即 $y_3=-2$ 时取等号，

当 $y_3+1>0$ 时，由基本不等式得 $y_4=-\frac{1}{y_3+1}-(y_3+1)+1\le -2\sqrt{\frac{1}{y_3+1}\cdot(y_3+1)}+1=-1$，

当且仅当 $\frac{1}{y_3+1}=y_3+1$，即 $y_3=0$ 时取等号，

综上所述，N 点纵坐标的取值范围是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

21.（1） $S(A_3)$ 的所有可能值是 -7，-5，-3，-1，1，3，5，7.

（2） 充分性：若 $a_n>0$，即 $a_n=2^{n-1}$.

所以满足 $a_n=2^{n-1}$，且前 n 项和最小的数列是 -1，-2，-4，$\cdots$，-2^{n-2}，2^{n-1}.

所以

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\cdots+a_n &\geq -(1+2+4+\cdots+2^{n-2})+2^{n-1} \\ &= -\frac{1-2^{n-2}\cdot 2}{1-2}+2^{n-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

所以 $S(A_n)>0$.

必要性：若 $S(A_n)>0$，即 $a_1+a_2+\cdots+a_n>0$.

假设 $a_n<0$，即 $a_n=-2^{n-1}$.

所以

$$\begin{aligned} S(A_n) &= a_1+a_2+\cdots+a_n \\ &\leq (1+2+4+\cdots+2^{n-2})-2^{n-1} \\ &= -1 \\ &< 0, \end{aligned}$$

与已知 $S(A_n)>0$ 矛盾.

所以 $S(A_n)>0$.

综上所述，$S(A_n)>0$ 的充要条件是 $a_n>0$.

（3） 由（2）知，$S(A_n)>0$ 可得 $a_n>0$. 所以 $a_n=2^{n-1}$.

因为数列 $A_n:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 2)$ 中 a_1 有 -1，1 两种，a_2 有 -2，2 两种，a_3 有 -4，4 两种，$\cdots$，a_{n-1} 有 -2^{n-2}，2^{n-2} 两种，a_n 有 2^{n-1} 一种，

所以数列 $A_n:a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 2)$ 有 2^{n-1} 个，

且在这 2^{n-1} 个数列中，每一个数列都可以找到前 $n-1$ 项与之对应项是相反数的数列.

所以这样的两数列的前 n 项和是 $2\times 2^{n-1}$.

所以这 2^{n-1} 个数列的前 n 项和是 $2\times 2^{n-1}\times\frac{1}{2}\times 2^{n-1}=2^{2n-2}$.

所以 $S(A_n)$ 的所有可能值的和是 2^{2n-2}.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 " 精益求精、专业严谨 " 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。