

2019 北京房山区高二（上）期中

数 学

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将答题纸交回，试卷自行保存。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

(1) 红星中学 2019 年对高一美术生划定录取分数线，专业成绩 x 不低于 90 分，文化课总分 y 高于 375 分，体育成绩 z 超过 35 分，用不等式组表示为

(A) $\begin{cases} x \geq 90 \\ y \geq 375 \\ z > 35 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x \geq 90 \\ y \geq 375 \\ z \geq 35 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x > 90 \\ y > 375 \\ z > 35 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x \geq 90 \\ y > 375 \\ z > 35 \end{cases}$

(2) 命题“ $\exists a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 < 2ab$ ”的否定形式是

(A) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 2ab$ (B) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 < 2ab$
(C) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \geq 2ab$ (D) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \leq 2ab$

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$, 且 $a_n = a_{n+1} + 3 (n \in \mathbb{N}^n)$, 则下列说法正确的是

- (A) 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，3 为公差的等差数列
(B) 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项，-3 为公差的等差数列
(C) 数列 $\{a_n\}$ 是以 -3 为首项，3 为公差的等差数列
(D) 数列 $\{a_n\}$ 是以 -3 为首项，-3 为公差的等差数列

(4) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+3a}$, $a_1 = 2$, 则 a_4 的值为

(A) $\frac{16}{5}$ (B) $\frac{8}{5}$ (C) $\frac{8}{7}$ (D) $\frac{2}{19}$

(5) 已知实数 $m > 0$, $n > 0$, 且 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 3$. 则

(A) mn 有最大值 $\frac{9}{8}$ (B) mn 有最小值 $\frac{9}{8}$
(C) mn 有最大值 $\frac{8}{9}$ (D) mn 有最小值 $\frac{8}{9}$

(6) 已知条件 $p: x = \pm 1$, 条件 $q: x^3 = x$, 则 p 是 q 成立的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(7) 已知 $a > 0$, $-1 < b < 0$, 则 a 、 ab 、 ab^2 之间的大小关系是

(A) $a > ab^2 > ab$ (B) $a < ab < ab^2$
(C) $ab > a > ab^2$ (D) $ab > ab^2 > a$

(8) 已知关于 x 的不等式 $\frac{x+1}{x-a} > 0$ 的解集 $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 2\}$, 则实数 a 取值的集合为

(A) $\{a | a \leq 2\}$ (B) $\{a | a \geq 2\}$

- (C) $\{a|a = 2\}$ (D) $\{a|a > 2\}$

(9) 在复平面内, 复数 $\frac{i}{1+i}$ 对应的点位于 ()

- (A) 第一象限 (B) 第二象限
(C) 第三象限 (D) 第四象限

(10) 依据市场调查结果预测, 某种家用商品以年初开始的 n 个月内累计的需求量 s_n (万件) 近似地满足 $s_n = \frac{n}{90}(21n - n^2 - 5)$ ($n=1, 2, 3, \dots, 12$), 则按此预测在本年度内, 需求量超过 1.5 万件的月份是 ()

- (A) 8 月、9 月 (B) 7 月、8 月
(C) 6 月、7 月 (D) 5 月、6 月

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

(11) 复数 $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}i$ 的共轭复数为 _____

(12) 不等式 $\frac{1}{x-1} + 1 < 0$ 的解集是 _____

(13) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 2$, $a_5 = \frac{1}{8}$, 则公比 $q =$ _____

(14) 类比等比数列的定义, 我们可以得到等积数列的定义: 如果一个数列从第二项起, 每一项与它前一项的乘积等于同一个常数, 那么这个数列叫等积数列, 这个常数叫等积数列的公积。首项为 3, 公积为 6 的等积数列的前 4 项分别是 _____, 该数列前 n 项和公式为 _____

(15) 已知三个不等式: ① $c \neq 0$, ② $a > b$, ③ $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2}$, 以其中两个作条件, 余下的一个作为结论, 则可以组成 _____ 个真命题。

(16) 已知 $f(n+1) = f(n) - \frac{1}{4}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 且 $f(2) = 2$, 则 $f(2019) =$ _____

三、解答题: 本大题共 6 小题, 其中第 (17) 题、第 (18) 题每题 9 分; 第 (19) 题 10 分; 第 (20) 题、第 (21) 题、第 (22) 题, 每题 14 分; 共 70 分。

(17) (本小题满分 9 分)

已知 $x \in \mathbb{R}$, 试比较代数式 x^3 与代数式 $x^2 - x + 1$ 的大小。

(18) (本小题满分 9 分)

某高校校园要规划一块长方形绿地, 且长方形绿地的长与宽的差为 30 米, 若长方形绿地的面积不少于 4000 平方米, 则这块绿地的长与宽至少应为多少米

(19) (本小题满分 10 分)

已知复数 $z = (2+i)m^2 - \frac{6m}{1-i}(i-1)$ ($m \in \mathbb{R}$)

(I) 当实数 m 取什么值时, 复数 z 是纯虚数?

(II) 当实数 m 取什么值时, 复数 z 在复平面内对应的点位于第二、四象限角平分线上?

(20) (本小题满分 14 分)

设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, s_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $s_7=7$, $s_{15}=75$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式与前 n 项和公式;

(II) 设 T_n 为数列 $\left\{\frac{s_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和, 求 T_n

(21) (本小题满分 14 分)

给定两个命题 p : 对任意实数 x , 函数 $y=ax^2+2x+1$ 的值大于零恒成立; q : 关于 x 的方程 $x^2-x+a=0$ 有实根, 如果 p 与 q 中有且只有一个命题为真命题, 求实数 a 的取值范围。

(22) (本小题满分 14 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 s_n , 且 $a_1=a$ ($a \neq 3$), $a_{n+1}=s_n+3^n$, $n \in \mathbb{N}^*$,

(I) 设 $b_n=s_n-3^n$, 求 b_1, b_2, b_3 的值, 并求出数列 $\{b_n\}$ 的通用公式;

(II) 若 $a_{n+1} \geq a_n$, 求实数 a 的取值范围。