# 2023 北京育才学校高二 10 月月考

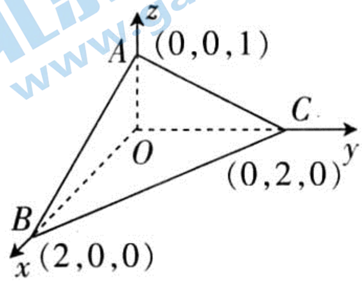
# 数　　学

## 一、选择题（每小题 4 分，8 道小题,共 32 分）

1.　空间任意四个点 A，B，C，D，则$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$=(　　)

A. $\overrightarrow{DB}$　　B. $\overrightarrow{AC}$　　C. $\overrightarrow{AB}$　　D. $\overrightarrow{BA}$

2.　若△ABC 在空间直角坐标系中的位置及顶点坐标如图所示，则 BC 边上的中线的长是(　　).




A.$\sqrt{2}$　　B.2

C.$\sqrt{3}$　　D.3

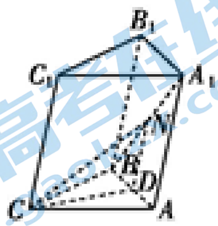
3.　若不重合的平面 α 与 β 的法向量分别是$\vec{a}$=(1，0，-2)，$\vec{b}$=(-1，0，2)，则平面 α 与 β 的位置关系是(　　)

A.平行　B.垂直　C.相交不垂直　D.无法判断

4.　如图所示，在三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 中，N 是 $A_1B$ 的中点，若$\overrightarrow{CA}=\vec{a},\overrightarrow{CB}=\vec{b},\overrightarrow{CC_1}=\vec{c}$，则$\overrightarrow{CN}$=(　　)

A. $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$　　B. $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

C. $\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　D. $\vec{a}+\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$




5.　在空间直角坐标系中，P(3，-2，1)，则点 P 关于坐标平面 xOz 的对称点的坐标为(　　)

A.(-3，-2，-1)　B.(3，2，1)　C.(-3，2，-1)　D.(3，-2，-1)

6.　向量$\vec{a}$=(2，4，x)，$\vec{b}$=(2，y，2)，若$|\vec{a}|$=6，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，则 x+y 的值为（　　）

A. - 3　B.1　C. - 3 或 1　D.3 或 1

7.　在正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 $A_1B$ 和平面 $A_1B_1CD$ 所成的角为(　　)

A.$\frac{\pi}{12}$　B.$\frac{\pi}{6}$　C.$\frac{\pi}{4}$　D.$\frac{\pi}{3}$

8.　已知$\vec{a}$=(2，-1，3)，$\vec{b}$=(-1，4，-2)，$\vec{c}$=(3，2，λ)，若$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$三向量共面，则实数 λ 等于(　　)

A.2　B.3　C.4　D.5

## 二、填空题（每小题 4 分，5 道小题,共 20 分）

9.　设{$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$}是空间向量的一个单位正交基底，$\vec{a}=3\vec{e_1}-4\vec{e_2}+2\vec{e_3}$，$\vec{b}=-2\vec{e_1}-3\vec{e_2}+4\vec{e_3}$，则$\vec{a}+\vec{b}$的坐标是________.

10.　设$\vec{a}$=(3，5，-4)，$\vec{b}$=(2，-1，-2)，计算$|\vec{a}-2\vec{b}|$=______.

11.　已知 A(3，5，-7)，B(-1，3，3)，且$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，则 C 点的坐标为______.

12.在如图所示的坐标系中，已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，给出下列结论：

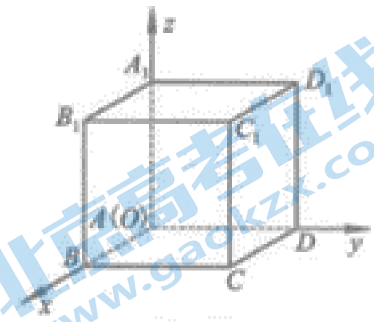
①直线 $DD_1$ 的一个方向向量为(0，0，1)；

②直线 $BC_1$ 的一个方向向量为(0，1，1)；

③平面 $ABB_1A_1$ 的一个法向量为(0，1，0)；

④平面 $B_1CD$ 的一个法向量为(1，1，1).

其中正确结论的序号为____________.



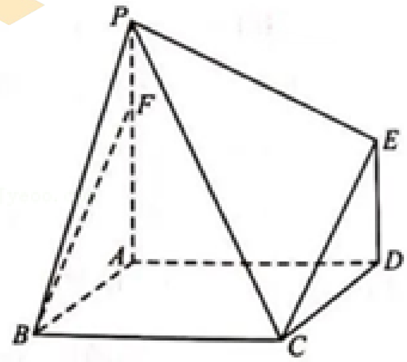

## 三、 解答题（共 4 道小题,共 48 分）

13.（12 分）如图，四边形 ABCD 是矩形，PA⊥平面 ABCD，DE⊥平面 ABCD，点 F 在棱 PA 上.

(1) 求证：PA∥平面 CDE；（4 分）

(2) 平面 PAB∥平面 CDE；（4 分）

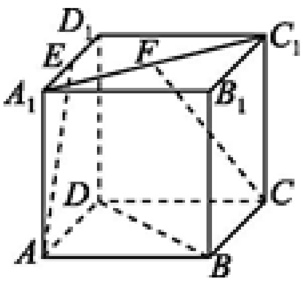
(3) 求证：BF⊥AD.（4 分）




14.（12 分）如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 $A_1D_1$，$A_1C_1$ 的中点.

(1) 求异面直线 BD 与 CF 所成角的大小；（6 分）

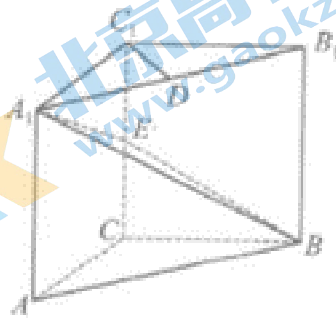
(2) 求异面直线 AE 与 CF 所成角的余弦值.（6 分）




15.（12 分）如图，在三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AA_1$⊥平面 ABC，$AA_1=AC=BC=2$，$\angle ACB=90°$，D，E 分别是 $A_1B_1$，$CC_1$ 的中点.

(1) 求直线 $BC_1$ 与平面 $A_1BE$ 所成角的正弦值；（4 分）

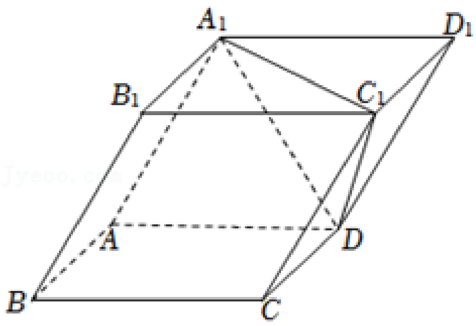
(2) 求平面 $A_1BE$ 与平面 $BC_1D$ 所成锐二面角的余弦值.（4 分）




16.（12 分）如图，在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$，中，底面 ABCD 是正方形，平面 $A_1ADD_1$⊥平面 ABCD，AD=2，$AA_1=A_1D$.

(1) 求证：$A_1D$⊥AB；（5 分）

(2) 若直线 AB 与平面 $A_1DC_1$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$，求 $AA_1$ 的长度.（7 分）



# 北京育才学校 2023-2024 学年度第一学期
# 高二数学十月月考试卷



## 一、选择题（每小题 4 分，8 道小题,共 32 分）

1.【正确答案】 D

【答案解析】方法一：$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BA}$.

方法二：$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}$.

2.【正确答案】 C

【答案解析】A(0,0,1)，B(2,0,0)，C(0,2,0)，BC 中点坐标为(1,1,0)，由距离公式得 $\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$.
故选 C.

3.【正确答案】 A

【答案解析】∵$\vec{a}$=(1，0，-2)，$\vec{b}$=(-1，0，2)，

∴$\vec{a}+\vec{b}$=(1-1，0+0，-2+2)=(0，0，0)，即$\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$．由此可得$\vec{a}\parallel\vec{b}$

∵ $\vec{a}$ 、$\vec{b}$ 分别是平面 α 与 β 的法向量

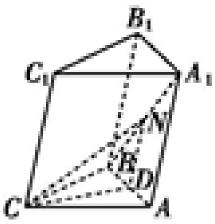
∴平面 α 与 β 的法向量平行，可得平面 α 与 β 互相平行.

4.【正确答案】 B

【答案解析】取 AB 的中点 D，连接 CD，DN(如图)，

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

，故选 B.




5.【正确答案】 B

【答案解析】本题考查空间中点的对称．因为点 P 关于坐标平面 xOz 对称，所以对称点的横坐标、竖坐标不变，纵坐标变为相反数，所以对称点的坐标为(3，2，1).

6.【正确答案】 C

【答案解析】∵$|\vec{a}|=6$，且$\vec{a}\perp\vec{b}$，∴$\sqrt{2^2+4^2+x^2}=6$，4+4y+2x＝0，

解得 $\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}$，或 $\begin{cases}x=-4\\y=1\end{cases}$．则 x+y=﹣3 或 1.

7.【正确答案】 B

【答案解析】以 D 为原点，DA 所在直线为 x 轴，DC 所在直线为 y 轴，$DD_1$ 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，设正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则 $A_1$(1，0，1)，B(1，1，0)，D(0，0，0)，C(0，1，0)，

∴$\overrightarrow{A_1B}$=(0，1，-1)，$\overrightarrow{DA_1}$=(1，0，1)，$\overrightarrow{DC}$=(0，1，0).

设平面 $A_1B_1CD$ 的法向量为$\vec{n}$=(x，y，z)，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA_1}=x+z=0,\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=y=0,\end{cases}$

取 x=1，则$\vec{n}$=(1，0，-1).

设直线 $A_1B$ 和平面 $A_1B_1CD$ 所成的角为 θ，则$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{A_1B}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

∴$\theta=\frac{\pi}{6}$，∴直线 $A_1B$ 和平面 $A_1B_1CD$ 所成的角为$\frac{\pi}{6}$．故选 B.

8.【正确答案】 C

【答案解析】∵$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，∴可取作此平面的一个基向量.

∵$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$三向量共面，∴存在实数 $\lambda_1$，$\lambda_2$ 使得 $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$ .

$$\therefore\begin{cases}3=2\lambda_1-\lambda_2\\2=-\lambda_1+4\lambda_2\\\lambda=3\lambda_1-2\lambda_2\end{cases}，解得\begin{cases}\lambda_1=2\\\lambda_2=1\\\lambda=4\end{cases}$$

## 二、填空题（每小题 4 分，5 道小题,共 20 分）

9.【正确答案】(1，-7，6)

【答案解析】$\vec{a}$=(3，-4，2)，$\vec{b}$=(-2，-3，4)，

∴$\vec{a}+\vec{b}$=(1，-7，6) 故答案为：(1，-7，6).

10.【正确答案】 $5\sqrt{2}$

【答案解析】∵$\vec{a}$=(3，5，-4)，$\vec{b}$=(2，-1，-2)，

∴ $\vec{a}-2\vec{b}$=(-1，7，0)，∴$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$，

11.【正确答案】(-3，2，8)

【答案解析】已知 A(3，5，-7)，B(-1，3，3)，

则：$\overrightarrow{AB}=$(-4，-2，10)，由于：$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-2,-1,5)$

所以解得：点 C 坐标为（-3,2,8）.

12.【正确答案】①②③

【答案解析】设正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，

因为 $DD_1$∥$AA_1$，且$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，所以直线 $DD_1$ 的一个方向向量为(0，0，1)，故选项①正确；

因为 $BC_1$∥$AD_1$，且$\overrightarrow{AD_1}=(0,1,1)$，所以直线 $BC_1$ 的一个方向向量为(0，1，1)，故选项②正确；

因为直线 AD⊥平面 $ABB_1A_1$，且$\overrightarrow{AD}=(0,1,0)$，所以平面 $ABB_1A_1$ 的一个法向量为(0，1，0)，故选项③正确；

因为 $C_1$(1，1，1)，且$\overrightarrow{AC_1}$与平面 $B_1CD$ 不垂直，故选项④错误.

## 四、 解答题（共 4 道小题,共 48 分）

13.【正确答案】

证 又 PA⊄平面 CDE，DE⊂平面 CDE

∴PA∥平面 CDE，

又四边形 ABCD 是矩形，

∴AB∥CD，

又 AB⊄平面 CDE，CD⊂平面 CDE，

∴AB∥平面 CDE，

(2) 平面 PAB∥平面 CDE；（4 分）

结合 PA∥平面 CDE，

又 AB，PA⊂平面 PAB，AB∩PA=A，

∴平面 PAB∥平面 CDE

(3) 求证：BF⊥AD.（4 分）

【正确答案】由线面垂直证明线线垂直或用三垂直定理证明

证明：$\because PA\perp$ 平面$ABCD$ $\quad\therefore PA\perp AD$

$\because$ 矩形$ABCD$ $\quad\therefore AB\perp AD$

又$PA\cap AD=A$

$\therefore AD\perp$ 平面$PAB$

$\because BF\subset$ 平面$PAB$ $\quad\therefore AD\perp BF$

14 （【正确答案】 证明：连接 AC，因为 BD⊥CA，BD⊥$A_1A$，CA∩$A_1A$=A，所以 BD⊥平面 $ACC_1A_1$，又 CF⊂平面 $ACC_1A_1$，所以 BD⊥CF．或 用向量证明、计算

所以异面直线 BD 与 CF 所成角的大小为$\dfrac{\pi}{2}$

(2) 求异面直线 AE 与 CF 所成角的余弦值.（6 分）

【正确答案】 设正方体的棱长为 2，以 D 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 A(2，0，0)，C(0，2，0)，E(1，0，2)，F(1，1，2)，

则$\overrightarrow{AE}$=(-1，0，2)，$\overrightarrow{CF}$=(1，-1，2)，

所以 $|\cos<\overrightarrow{AE}，\overrightarrow{CF}>|=\frac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{10}$，

所以异面直线 AE 与 CF 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{30}}{10}$.

15.【正确答案】

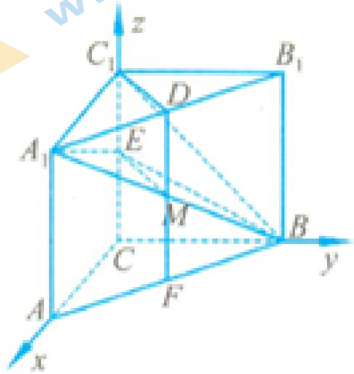
如图建立空间直角坐标系 C-xyz 则 A(2，0，0)，B(0，2，0)，

E(0，0，1)，$A_1$(2，0，2).

$\therefore \overrightarrow{C_1B}$=(0，2，-2)，$\overrightarrow{EA_1}$=(2，0，1)，$\overrightarrow{EB}$=(0，2，-1).

设平面 $A_1BE$ 的法向量为$\vec{n}$=(x，y，z)，则$\begin{cases}\overrightarrow{EA_1}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{EB}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x+z=0\\ 2y-z=0\end{cases}$令 x=1，则$\vec{n}$=(1，-1，-2).

所以$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{C_1B},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{C_1B}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{C_1B}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.




所以直线 $BC_1$ 与平面 $A_1BE$ 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

(2) 求平面 $A_1BE$ 与平面 $BC_1D$ 所成锐二面角的余弦值.（4 分）

【正确答案】

$\overrightarrow{C_1B}$=(0，2，-2)，$\overrightarrow{C_1D}$=(1，1，0)

设平面 $C_1BD$ 的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{C_1B}=2y-2z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{C_1D}=x+y=0\end{cases}\quad\Rightarrow\vec{m}=(1,-1,-1)$$

$$\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\left|\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

所以平面 $A_1BE$ 与平面 $BC_1D$ 所成锐二面角的余弦值 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(3)

16.【正确答案】

证明：因为四边形 ABCD 为正方形，则 AB⊥AD，

因为平面 $A_1ADD_1$⊥平面 ABCD，平面 $A_1ADD_1$∩平面 ABCD=AD，AB⊂平面 ABCD，

∴AB⊥平面 $AA_1D_1D$，

∵$A_1D$⊂平面 $AA_1D_1D$，

所以，AB⊥$A_1D$.

(2) 若直线 AB 与平面 $A_1DC_1$ 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$，求 $AA_1$ 的长度.（7 分）

【正确答案】

取 AD 的中点 O，连接 $A_1O$，

∵$AA_1=A_1D$，O 为 AD 的中点，则 $A_1O$⊥AD，

因为平面 $AA_1D_1D$⊥平面 ABCD，平面 $AA_1D_1D$∩平面 ABCD=AD，$A_1O$⊂平面 AA1D1D，

所以，$A_1O$⊥平面 ABCD，

以点 O 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{OA_1}$的方向分别为 x、y、z 的正方向建立如下图所示的空间直角坐标系，设 $A_1O=a$，其中 a＞0， 则 A(0，-1，0)、B(2，-1，0)、$A_1$(0，0，a)、$C_1$(2，2，a)、D(0，1，0)，$\overrightarrow{AB}$=(2，0，0)，$\overrightarrow{A_1C_1}$=(2，2，0)，$\overrightarrow{A_1D}$=(0，1，-a)，

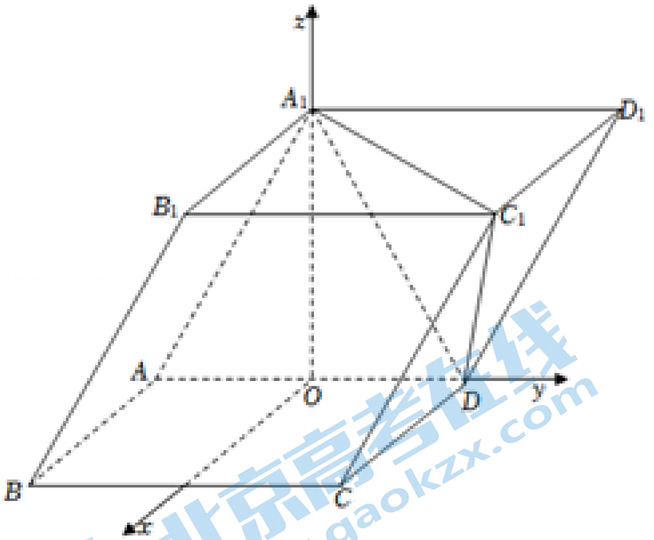
设平面 $A_1C_1D$ 的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=x+y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1D}=y-az=0\end{cases}$，

取 x=a，则$\vec{m}=(a,-a,-1)$，

由题意可得 $$|\cos<\overrightarrow{AB},\vec{m}>|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{2a}{2\sqrt{2a^2+1}}=\frac{a}{\sqrt{2a^2+1}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

∵a＞0，解得$a=\sqrt{3}$，则$|\overrightarrow{AA_1}|=\sqrt{1+a^2}=2$.



## 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！