高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|x^2-2x-8\leqslant 0\}$，$B=\{x|x=3k-2,k\in \mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2,-1,1,2,4\}$　　B. $\{-1,1,2\}$

C. $\{-2,-1,1,4\}$　　D. $\{-2,1,4\}$

2. 设复数 z 满足 $3\bar{z}-2z=2+5\mathrm{i}$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A. $\sqrt{5}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

3. 已知直线 $l_1:ax-y+1=0$，$l_2:ax+4y+2=0$，则“$a=2$”是“$l_1\perp l_2$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. $\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^5$ 的展开式中 x 的系数为

A. -10　　B. 10

C. -40　　D. 40

5. 设函数 $f(x)=1-\frac{2\cdot 3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$，则

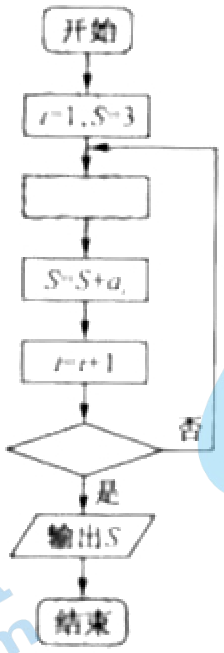
A. $y=x^3+|f(x)|$ 是奇函数　　B. $y=x^3+|f(x)|$ 是偶函数

C. $y=x^3|f(x)|$ 是偶函数　　D. $y=x^3|f(x)|$ 是奇函数

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 的顶点为 O，始边为 x 轴非负半轴，若 $0<\alpha<2\pi$，点 $P(1+\tan\frac{\pi}{12},1-\tan\frac{\pi}{12})$ 在角 α 的终边上，则 α 的值为

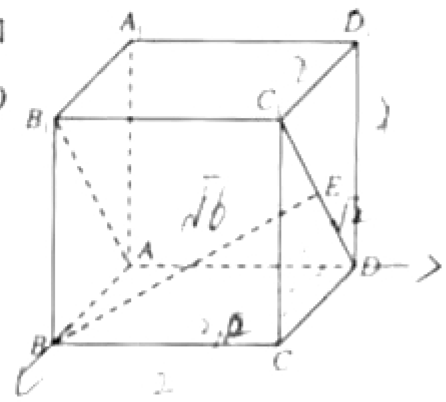
A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

7. 下图是计算 $3+3^2+3^3+3^4+3^5$ 的程序框图,则图中执行框与判断框中应分别填入



A. $a_i=3^i,i\geqslant4$?　　B. $a_i=3^{i+1},i\geqslant4$?　　C. $a_i=3^i,i\geqslant5$?　　D. $a_i=3^{i+1},i\geqslant5$?

8. 在我国古代数学名著《九章算术·商功》中刘徽注解"邪解立方得二堑堵". 如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中"邪解"得到一堑堵 $ABCDC_1B_1$,E 为 C_1D 的中点,则异面直线 AB_1 与 BE 所成的角为



A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

9. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2,过 F_1 的直线 l 与双曲线 C 的左支交于 A、B 两点. 若 $|AB|=|BF_2|$,则 $|AF_2|=$

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

10. 将函数 $f(x)=3\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象,且直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 和 $x=\frac{5\pi}{12}$ 是函数 $y=g(x)$ 图象的两条相邻的对称轴,则 $f(x)=$

A. $3\cos(3x+\frac{\pi}{3})$　　B. $3\cos(3x+\frac{5\pi}{12})$　　C. $3\cos(3x+\frac{\pi}{4})$　　D. $3\cos(3x+\frac{\pi}{6})$

11. 已知直线 $l:x+y-1=0$ 将圆 $C:x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 分为 M,N 两部分,且 M 部分的面积小于 N 部分的面积,若在圆 C 内任取一点,则该点落在 M 部分的概率为

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{4}-\frac{1}{2\pi}$

12. 若 $a=\ln\sqrt{1-0.01^{0.02}}$,$b=0.02\sin0.01$,$c=0.01\sin0.02$,则

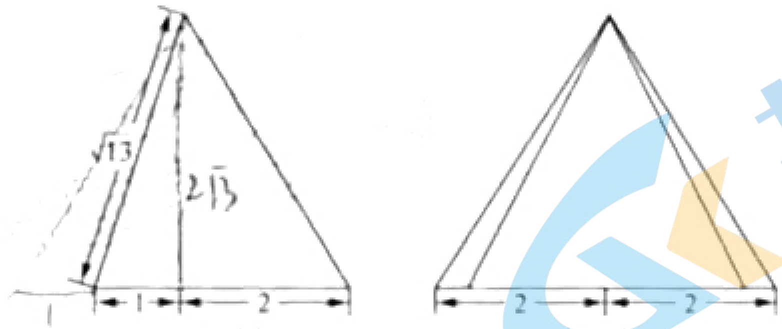
A. $a<b<c$　　B. $a<c<b$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(-3,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,m)$,若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,则 $m=$________.

14. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{m^2-1}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$ 的两个焦点分别为 F_1,F_2,点 P 为椭圆上一点,且 $\triangle PF_1F_2$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$,则椭圆 C 的短轴长为________.

15. 已知某圆锥被一过该圆锥顶点的平面所截得到的几何体的正视图与侧视图如图所示，若该圆锥的顶点与底面圆周都在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为________.



正视图　　侧视图

16. 在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，且满足 $2a+c=2b\cos C$，则角 B 的大小为________；设 D 为边 AC 上一点，且$\angle ABD=\angle CBD$，$BD=1$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$的最小值为________.（第一空 2 分，第二空 3 分）

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

某校组织了全体学生参加“建党 100 周年”知识竞赛，从高一、高二年级各随机抽取 50 名学生的竞赛成绩（满分 100 分），统计如下表：

分数段	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
高一年级	3	10	12	15	10
高二年级	4	6	10	18	12

（1）分别估计高一、高二年级竞赛成绩的平均值$\overline{x}_1$与$\overline{x}_2$（同一组中的数据以该组数据所在区间中点的值作代表）；

（2）学校规定竞赛成绩不低于 80 分的为优秀，根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并判断是否有 90%的把握认为竞赛成绩优秀与年级有关？

	非优秀	优秀	合计
高一年级			
高二年级			
合计			100

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

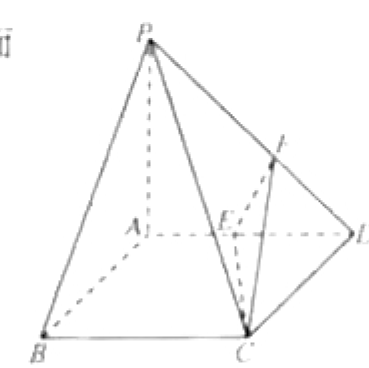
$P(K^2\geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.01
k_0	2.072	2.706	3.841	6.635

18.（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，$\angle BCD=120°$，$PA\perp$底面 $ABCD$，$PA=AD=2$，E 是 AD 的中点，F 为 PD 上一点，且 $PB//$平面 CEF.

（1）求 PF；

（2）求平面 PAB 与平面 CEF 所成角的正弦值.



19. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，2 为公差的等差数列，数列$\{b_n\}$满足 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=3b_1-\frac{1}{2}(a_n+3)\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(1)证明：数列$\{b_n\}$是等比数列；

(2)设 $c_n=(1-2\log_3 b_n)a_n$，求数列$\left\{\frac{1}{c_n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

20. (12 分)

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$的焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 相交于 A,B 两点，PA,PB 是 C 的两条切线，A,B 是切点. 当 $AB/\!/x$ 轴时，$|AB|=2$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)证明：$|PF|^2=|AF|\cdot|FB|$.

21. (12 分)

已知函数 $f(x)=e^x+x^2-x+1$.

(1)求 $f(x)$的单调性；

(2)若 $x<0$，$\frac{(f(x)-x^2-1)a+2x}{f(x)}\geqslant-1$，求实数 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的倾斜角为 α 且过点 $M(1,1)$. 以原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2$.

(1)写出直线 l 的参数方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2)若直线 l 与曲线 C 交于不同的两点 A,B，求$||AM|-|MB||$的最大值.

23. [选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|2x-a|+2|x+1|$.

(1)当 $a=2$ 时，求不等式 $f(x)\leqslant5$ 的解集；

(2)若存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)\leqslant2a+1$ 成立，求实数 a 的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　因为 $A=\{x\mid x^2-2x-8\leq 0\}=\{x\mid -2\leq x\leq 4\}$，$B=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\}$，所以 $A\cap B=\{-2,1,4\}$.

2. A　设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，由题意可知，$3(a-bi)-2(a+bi)=2+5i$，即 $a-5bi=2+5i$，根据复数相等的定义，得 $a=2$，$b=-1$，所以 $z=2-i$，即 $|z|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

3. A　$l_1\perp l_2$ 的充要条件是 $a^2-4=0$，解得 $a=\pm2$，所以"$a=2$"是"$l_1\perp l_2$"的充分不必要条件.

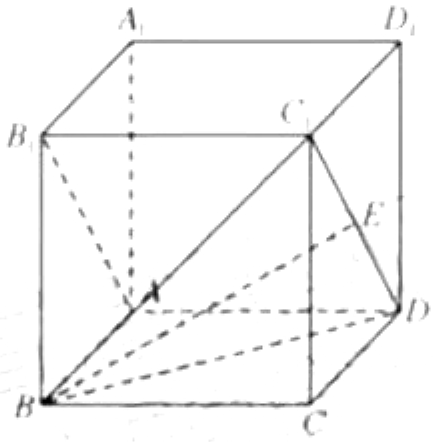
4. B　$\left(\frac{2}{x}-\sqrt{x}\right)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=(-1)^r2^{5-r}C_5^rx^{r-5}\cdot x^{\frac{r}{2}}=(-1)^r2^{5-r}C_5^rx^{\frac{3r}{2}-5}$，令 $\frac{3r}{2}-5=1$，得 $r=4$，故展开式中 x 的系数 $(-1)^4\times2C_5^4=10$.

5. D　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$，由 $f(-x)=\frac{3^{-x}-3^x}{3^{-x}+3^x}=-\frac{3^x-3^{-x}}{3^{-x}+3^x}=-f(x)$，得 $f(x)$ 为奇函数，则 $|f(x)|$ 为偶函数. 又知 $y=x^3$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $y=x^3|f(x)|$ 是奇函数. 显然 A、B、C 均不正确.

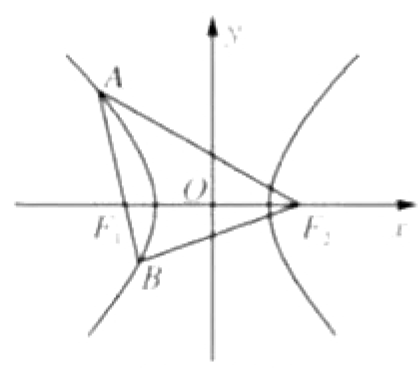
6. B　$\tan\alpha=\frac{1-\tan\frac{\pi}{12}}{1+\tan\frac{\pi}{12}}=\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12})=\tan\frac{\pi}{6}$，考虑到 $0<\alpha<2\pi$ 及点 P 在第一象限，得 $\alpha=\frac{\pi}{6}$. 故选 B.

7. D　由于首个计算数据为 $3+3^2$，所以执行框应为 $a=3^{i+1}$，第一次执行时，$S=3+3^2$，$i=2$；第二次执行时，$S=3+3^2+3^3$，$i=3$；第三次执行时，$S=3+3^2+3^3+3^4$，$i=4$；第四次执行时，$S=3+3^2+3^3+3^4+3^5$，$i=5$. 故判断框应为 $i<5$?.

8. A　如图，在堑堵 $ABCDC_1B_1$ 中，$AB\parallel DC_1$，则 $\angle C_1EB$ 或其补角为直线 AB 与 BE 所成的角. 连结 BC_1，BD，由正方体的性质可知，$BC_1=BD=C_1D$，所以 $\triangle BDC_1$ 为等边三角形. 又知 E 为 C_1D 的中点，所以 $BE\perp C_1D$，即 $\angle C_1EB=\frac{\pi}{2}$. 故异面直线 AB 与 BE 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$.



第 8 题图



第 9 题图

9. C　$a=2$，设 $|AF_2|=t$，根据双曲线的定义，得 $|AF_1|=t-2a$；$|BF_1|=|BF_2|-2a$，则 $|AB|=|AF_1|+|BF_1|=(t-2a)+(|BF_2|-2a)=|BF_2|$，解得 $t=4a$，所以 $|AF_2|=4a=8$. 故选 C.

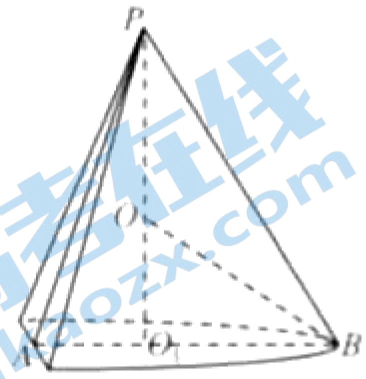
10. C　由题意可知，$g(x)=3\cos\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\varphi\right]=3\cos\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{6}+\varphi\right)$，由 $x=\frac{\pi}{12}$ 和 $x=\frac{5\pi}{12}$ 是函数 $y=g(x)$ 图象的两条相邻的对称轴，得 $\frac{1}{2}T=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$，解得 $T=\frac{2\pi}{3}$，于是 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$，解得 $\omega=3$，所以 $g(x)=3\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$. 由题意，得 $3\times\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{2}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，结合 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，故 $f(x)=3\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$.

11. B　设直线 l 与圆 C 交于 A，B 两点，由圆 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=4$ 可知，圆心 C 的坐标为 $(1,2)$，半径为 $r=2$. 因为圆心 C 到直线 l：$x+y-1=0$ 的距离为 $d=\frac{|1+2-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $|AB|=2\sqrt{2^2-2}=2\sqrt{2}$. 又 $|CA|=|CB|=2$，所以 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，从而扇形 CAB 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times2^2\times\frac{\pi}{2}=\pi$，所以 M 部分的面积为 $\pi-\frac{1}{2}\times2\times2=\pi-2$. 故在圆 C 内任取一点，则该点落在 M 部分的概率 $P=\frac{\pi-2}{4\pi}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}$.

12. B　$a=\ln\sqrt{1-0.01}<\ln1=0$，$b=0.02\sin0.01>0$，$c=0.01\sin0.02>0$，排除答案 C，D. 设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\in(0,\pi)$，则 $f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $g(x)=x\cos x-\sin x$，则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0(x\in(0,\pi))$，所以 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，从而 $g(x)<g(0)=0$，即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，从而 $f(0.01)>f(0.02)$，即 $\frac{\sin0.01}{0.01}>\frac{\sin0.02}{0.02}$，所以 $0.02\sin0.01>0.01\sin0.02$，即 $b>c$. 综上可知 $a<c<b$.

13. $-\frac{4}{3}$　因为 $\boldsymbol{a}=(-3,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,m)$，所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-1,2+m)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-7,2-2m)$，因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$，所以 $7(2+m)=(2-2m)$，解得 $m=-\frac{4}{3}$.

左右顶点时，$\triangle PF_1F_2$ 的面积最大，且 $\frac{1}{2}\cdot F_1F_2\cdot\sqrt{m-1}=\sqrt{3}$，解得 $m=2$，所以椭圆 C 的短轴长为 $2\sqrt{m-1}=2\sqrt{3}$.



15\. $\frac{64\pi}{3}$　该几何体如图所示，由正视图和侧视图可知，底面圆弧所在圆的半径为 $O_1B=2$，且 $AO_1=1$，$PA=\sqrt{13}$，所以 $PO_1=\sqrt{(\sqrt{13})^2-1^2}=2\sqrt{3}$，设球 O 的半径为 R，由球的性质可知，$R^2=(2\sqrt{3}-R)^2+2^2$，解得 $R=\frac{4}{\sqrt{3}}$，故球 O 的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{64\pi}{3}$.

16\. $\frac{2\pi}{3}$；2　由正弦定理，得 $2\sin A+\sin C=-2\sin B\cos C$，由 $\sin A=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，得 $2\cos B\sin C+\sin C=0$，由 $0<C<\pi$，得 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$，由 $0<B<\pi$，得 $B=\frac{2\pi}{3}$，由题意，得 $\frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}a\times 1\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}c\times 1\times\sin\frac{\pi}{3}$，化简得 $ac=a+c$，由基本不等式，得 $ac=a+c\geq 2\sqrt{ac}$，即 $ac\geq 4$（当且仅当 $a=c=2$ 时取等号），所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=ac\cos\frac{\pi}{3}\geq 2$（当且仅当 $a=c=2$ 时取等号）.

17\. 解：(1)高一年级随机抽出 50 名学生竞赛成绩的平均值估计为
$\overline{x}_1=(55\times 3+65\times 10+75\times 12+85\times 15+95\times 10)\div 50=78.8$； ………………………… 3 分
高二年级随机抽出 50 名学生竞赛成绩的平均值估计为
$\overline{x}_2=(55\times 4+65\times 6+75\times 10+85\times 18+95\times 12)\div 50=80.6$；
故估计高一、高二年级竞赛成绩的平均值分别为 78.8 与 80.6. ………………………… 6 分
(2)

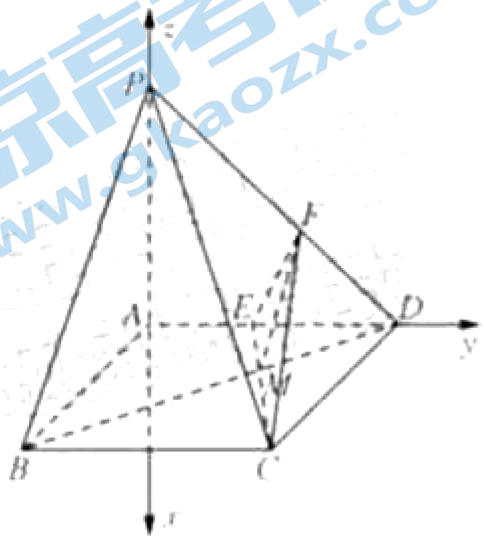
	非优秀	优秀	合计
高一年级	25	25	50
高二年级	20	30	50
合计	45	55	100

………………………………………………………………………… 8 分

$K^2=\frac{100(25\times 30-25\times 20)^2}{45\times 55\times 50\times 50}=\frac{100}{99}\approx 1.010<2.706$. ………………………… 11 分

故没有 90% 的把握认为竞赛成绩优秀与年级有关. ………………………… 12 分

18\. 解：(1)连结 BD，交 CE 于 M，连结 MF.
因为 $PB\parallel$ 平面 CEF，$PB\subset$ 平面 PBD，平面 $PBD\cap$ 平面 $CEF=MF$，
所以 $PB\parallel MF$. ………………………… 2 分



由 $\triangle BCM\backsim\triangle DEM$，得 $\frac{DM}{MB}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$.

又 $\frac{DF}{FP}=\frac{DM}{MB}$，所以 $\frac{DF}{FP}=\frac{1}{2}$，即 $PF=\frac{2}{3}PD$. ………………………… 3 分

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，

从而 $PD=\sqrt{PA^2+AD^2}=2\sqrt{2}$，故 $PF=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. ………………………… 5 分

(2)以 A 为原点，AD，AP 所在的直线分别为 y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$P(0,0,2)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$E(0,1,0)$，$F(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3})$.

$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(-\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{CF}=(-\sqrt{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. ………………………… 6 分

设平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1-y_1=0,\\ 2z_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,\sqrt{3},0)$. ………………………… 8 分

设平面 CEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x_2=0,\\ -\sqrt{3}x_2+\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}z_2=0,\end{cases}$ 取 $y_2=-2$，则 $\boldsymbol{n}=(0,-2,1)$. ………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$. ………………………… 11 分

所以 $\sin\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\sqrt{10}}{5}$，故平面 PAB 与平面 CEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. ………………………… 12 分

因为 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=3b_1-(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$,

所以当 $n\geq 2$ 时,$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{n-1}b_{n-1}=3b_1-n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. …………2分

以上两式相减,得 $a_nb_n=(2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$,解得 $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$. …………4分

当 $n=1$ 时,$b_1=3b_1-\frac{2}{3}$,解得 $b_1=\frac{1}{3}$,满足 $b_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$, …………5分

又 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$,故数列$\{b_n\}$是以$\frac{1}{3}$为首项,$\frac{1}{3}$为公比的等比数列. …………6分

(2)解:由(1)知,$c_n=\left[1-2\log_3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right](2n-1)=(2n-1)(2n+1)$, …………8分

则 $\frac{1}{c_n}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$. …………10分

$T_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$. …………12分

20.(1)解:由题意可知,$F\left(0,\frac{p}{2}\right)$,准线方程为 $y=-\frac{p}{2}$. …………1分

当 $AB/\!/x$ 轴时,根据抛物线的定义可知,$|AB|=2p=2$,解得 $p=1$. …………3分

故 C 的方程为 $x^2=2y$. …………4分

(2)证法一:设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}x_1^2\right)$,$B\left(x_2,\frac{1}{2}x_2^2\right)$,由 $y=\frac{1}{2}x^2$,得 $y'=x$, …………5分

所以 PA 的斜率 $k_1=y'\big|_{x=x_1}=x_1$,

从而切线 PA 的方程为 $y-\frac{1}{2}x_1^2=x_1(x-x_1)$,即 $y=x_1x-\frac{1}{2}x_1^2$, …………6分

同理可知,PB 的斜率 $k_2=x_2$,PB 的方程为 $y=x_2x-\frac{1}{2}x_2^2$, …………7分

两式联立,解得 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$,$y=\frac{x_1x_2}{2}$,所以 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{2}\right)$. …………8分

设 AB 的方程为 $y=kx+\frac{1}{2}$,

由 $\begin{cases}y=kx+\frac{1}{2},\\x^2=2y,\end{cases}$ 得 $x^2-2kx-1=0$,则 $x_1+x_2=2k$,$x_1x_2=-1$, …………9分

即 $k_1k_2=x_1x_2=-1$,所以 $PA\perp PB$,即 $P\left(k,-\frac{1}{2}\right)$. …………10分

则 $\overrightarrow{PF}=(-k,1)$,$\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_1^2\right)$,

因为 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{AB}=(-k,1)\cdot\left(x_2-x_1,\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_1^2\right)=-k(x_2-x_1)+\left(\frac{1}{2}x_2^2-\frac{1}{2}x_1^2\right)$

$=(x_2-x_1)\left(\frac{x_1+x_2}{2}-k\right)=(x_2-x_1)(k-k)=0$,

所以 $PF\perp AB$. …………11分

由 $\triangle AFP\backsim\triangle PBF$,得 $\frac{|PF|}{|AF|}=\frac{|FB|}{|PF|}$,故 $|PF|^2=|AF|\cdot|FB|$. …………12分

证法二:设 $A\left(x_1,\frac{1}{2}x_1^2\right)$,$B\left(x_2,\frac{1}{2}x_2^2\right)$,由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 得,$y'=x$, …………5分

所以 PA 的斜率 $k_1=y'\big|_{x=x_1}=x_1$,

所以切线 PA 的方程为 $y-\frac{1}{2}x_1^2=x_1(x-x_1)$,即 $y=x_1x-\frac{1}{2}x_1^2=x_1x-y_1$, …………6分

同理可知,PB 的斜率 $k_2=x_2$,PB 的方程为 $y=x_2x-\frac{1}{2}x_2^2=x_2x-y_2$, …………7分

设 $P(m,n)$,则 $n=x_1m-y_1$,$n=x_2m-y_2$,

所以 A,B 两点的坐标是方程 $n=xm-y$ 的两个解,

即直线 AB 的方程为 $n=xm-y$,亦即 $y=mx-n$. …………9分

又直线 AB 恒过定点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$,所以 $n=-\frac{1}{2}$,即 $P\left(m,-\frac{1}{2}\right)$ 且直线 AB 的方程为 $y=mx+\frac{1}{2}$. …………10分

由 $\begin{cases}x^2=2y,\\y=mx+\frac{1}{2}\end{cases}$ 得 $y^2-(2m^2+1)y+\frac{1}{4}=0$,

所以 $y_1+y_2=2m^2+1$,$y_1y_2=\frac{1}{4}$. …………11分

由抛物线定义知 $|AF|\cdot|BF|=(y_1+\frac{1}{2})(y_2+\frac{1}{2})=y_1y_2+\frac{1}{2}(y_1+y_2)+\frac{1}{4}$

所以 $|AF|\cdot|BF|=m^2+1$，$|PF|=\sqrt{(0-m)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{m^2+1}$

所以 $|PF|^2=|AF|\cdot|FB|$. …………………… 12 分

21. 解：(1) $f'(x)=e^x+2x-1$，显然 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，又 $f'(0)=0$， …………………… 1 分

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$， …………………… 3 分

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$. …………………… 4 分

(2) 由(1)可知，$f(x)$ 的极小值为 $f(0)=2>0$，于是 $f(x)>0$. …………………… 5 分

$\frac{(f(x)-x^2-1)a+2x}{f(x)}\geq -1$ 等价于 $(f(x)-x^2-1)a+2x\geq -f(x)$，

法一：可转化为 $(e^x-x)a\geq -e^x-x^2-x-1$ 对于 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立， …………………… 6 分

令 $g(x)=e^x-x$，则 $g'(x)=e^x-1$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)=e^x-1<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，从而 $g(x)>g(0)=1$. …………………… 7 分

所以 $a\geq\frac{-x^2-x-e^x-1}{e^x-x}$ 在 $(-\infty,0)$ 上恒成立. …………………… 8 分

令 $h(x)=\frac{-x^2-x-e^x-1}{e^x-x}$，则 $h'(x)=\frac{(x^2-1)(e^x+1)}{(e^x-x)^2}=\frac{(x-1)(x+1)(e^x+1)}{(e^x-x)^2}$， …………………… 9 分

因为 $e^x+1>0$，所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，

所以 $h(x)_{max}=h(-1)=-1$. …………………… 11 分

所以 $a\geq -1$，故 a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$. …………………… 12 分

法二：可转化为 $-(a+1)e^x\leq x^2+(1-a)x+1$ 对于 $x\in(-\infty,0)$ 恒成立， …………………… 6 分

即 $-(a+1)\leq\frac{x^2+(1-a)x+1}{e^x}$， …………………… 7 分

令 $g(x)=\frac{x^2+(1-a)x+1}{e^x}(x<0)$，则 $g'(x)=-\frac{x^2-(a+1)x+a}{e^x}=-\frac{(x-a)(x-1)}{e^x}$.

若 $a\geq 0$，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，从而 $g(x)_{min}=g(0)=1$.

只需 $-(a+1)\leq 1$，解得 $a\geq 0$.

此时 $a\geq 0$ 适合题意. …………………… 9 分

若 $a<0$，当 $x<a$ 时，$g'(x)<0$；当 $a<x<0$ 时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上为减函数，在 $(a,0)$ 上为增函数，

所以 $x=a$ 是 $g(x)$ 的极小值点，也是 $g(x)$ 的最小值点，且 $g(x)_{min}=g(a)=\frac{a+1}{e^a}$， …………………… 11 分

只需 $-(a+1)\leq\frac{a+1}{e^a}$，即 $(a+1)(1+\frac{1}{e^a})\geq 0$，解得 $a\geq -1$，

此时 $-1\leq a<0$ 适合题意.

综上，a 的取值范围为 $[-1,+\infty)$. …………………… 12 分

22. 解：(1) 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）； …………………… 2 分

曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=4$. …………………… 4 分

(2) 将 $\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 代入 $x^2+y^2=4$，并整理得 $t^2+2(\cos\alpha+\sin\alpha)t-2=0$，

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=-2(\cos\alpha+\sin\alpha)$， …………………… 6 分

因为 M 在圆 O 的内部，所以 t_1 与 t_2 异号. …………………… 7 分

于是 $||AM|-|MB||=|t_1+t_2|=2\sqrt{2}|\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})|$.

考虑到 $0<\alpha<\pi$，则当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，$||AM|-|MB||_{max}=2\sqrt{2}$. …………………… 10 分

23. 解：(1) 当 $a=2$ 时，$|2x-2|+2|x+1|\leq 5$， …………………… 1 分

当 $x\leq -1$ 时，$2-2x-2(x+1)\leq 5$，解得 $x\geq -\frac{5}{4}$，此时 $-\frac{5}{4}\leq x\leq -1$； …………………… 2 分

当 $-1<x<1$ 时，$2-2x+2(x+1)\leq 5$，整理得 $4\leq 5$，该式恒成立，此时 $-1<x<1$； …………………… 3 分

当 $x\geq 1$ 时，$2x-2+2(x+1)\leq 5$，解得 $x\leq\frac{5}{4}$，此时 $1\leq x\leq\frac{5}{4}$. …………………… 4 分

综上可知，不等式 $f(x)\leq 5$ 的解集为 $[-\frac{5}{4},\frac{5}{4}]$. …………………… 5 分

(2) $|2x-a|+|2x+2|=|a-2x|+|2x+2|\geq|(a-2x)+(2x+2)|=|a+2|$， …………………… 7 分

若满足题意，必须 $|a+2|\leq 2a+1$，等价转化为 $\begin{cases}2a+1\geq 0,\\ (a+2)^2\leq(2a+1)^2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a\geq -\frac{1}{2},\\ 3\leq 3a^2,\end{cases}$ …………………… 9 分

解得 $a\geq 1$，故 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$. …………………… 10 分