

- 1.提供的题目并非一组试卷，小题（选、填）主要针对以前没有考到的知识点，或者在试题的呈现形式上没有用过的试题。
- 2.教师要根据自己学校的学生情况，有针对性地选择使用，也可以不用。
- 3.试题按照中心组教师的建议和一些教师的建议匆匆赶制而成，难免出错，希望老师们及时指出问题，以便及时改正。

1. 已知集合 $A = \{x | \ln(x+1) \leq 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{0,1\}$ B. $\{-1,0,1\}$
C. $\{-2,-1,0,1\}$ D. $\{-1,0,1,2\}$
2. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha \parallel \beta$ 的充要条件是
A. α 内有无数条直线与 β 平行 B. α 内有两条相交直线与 β 平行
C. α, β 平行于同一条直线 D. α, β 垂直于同一平面

1. 如果复数 $z = a^2 + a - 2 + (a^2 - 3a + 2)i$ 为纯虚数, 那么实数 a 的值为

2. 设 $z = -3 + 2i$, 则在复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于
- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

3. 若 $\frac{m+i}{1+i} = ni$, 则实数 $m =$ _____, 实数 $n =$ _____.

【不等式】

1. 设 $0 < a < b$, 则下列不等式中正确的是

A. $a < b < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

B. $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

C. $a < \sqrt{ab} < b < \frac{a+b}{2}$

D. $\sqrt{ab} < a < \frac{a+b}{2} < b$

2. 设 $m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq 0$, “ $m + \frac{4}{m} > 4$ ”的一个必要不充分条件是 ()

A. $m \neq 2$

B. $m > 0$ 且 $m \neq 2$

C. $m > 2$

D. $m \geq 2$

3. 已知 $m \in (0, 1)$, 令 $a = \log_m 2$, $b = m^2$, $c = 2^m$, 那么 a, b, c 之间的大小关系为 ()

A. $b < c < a$

B. $b < a < c$

C. $a < b < c$

D. $c < a < b$

4. 设 $a = \log_{0.2} 0.3$, $b = \log_2 0.3$, 则

A. $a + b < ab < 0$

B. $ab < a + b < 0$

C. $a + b < 0 < ab$

D. $ab < 0 < a + b$

【数列】

1. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, 下列结论中正确的是 ()

A. 若 $a_1 + a_2 > 0$, 则 $a_2 + a_3 > 0$

B. 若 $a_1 + a_3 < 0$, 则 $a_1 + a_2 < 0$

C. 若 $0 < a_1 < a_2$, 则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$

D. 若 $a_1 < 0$, 则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

2. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0$, $a_7 + a_{10} < 0$, 则当 $n =$ _____ 时, $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大.

3. 已知数列 $\{a_n\}$, $a_2 = 2$, $a_n + a_{n+1} = 3n, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} =$ _____

4. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，公比 $q > 1$ ，且 $a_5 = b_5$ ，则

A. $a_3 + a_7 > b_4 + b_6$

B. $a_3 + a_7 \geq b_4 + b_6$

C. $a_3 + a_7 < b_4 + b_6$

D. $a_3 + a_7 = b_4 + b_6$

【平面向量】

1. 设向量 a, b 不平行，向量 $\lambda a + b$ 与 $a + 2b$ 平行，则实数 $\lambda =$ _____.

2. 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ，向量 $a = (\sin 2\theta, \cos \theta)$, $b = (\cos \theta, 1)$ ，若 $a \parallel b$ ，则 $\tan \theta =$ _____.

3. 设向量 $a = (3, 3)$ ， $b = (1, -1)$ ，若 $(a + \lambda b) \perp (a - \lambda b)$ ，则实数 $\lambda =$ _____.

4. 设 a, b 均为单位向量，则“ $|a - 3b| = |3a + b|$ ”是“ $a \perp b$ ”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【三角函数】

1. 若角 α 的终边过点 $(1, -2)$ ，则 $\sin 2\alpha =$ _____

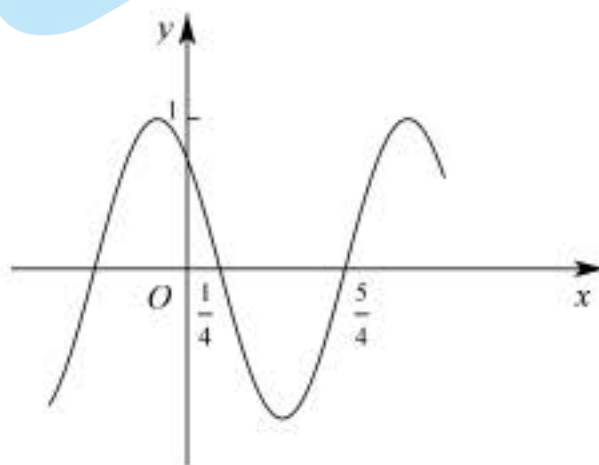
2. 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示，则 $f(x)$ 的单调递减区间为

A. $\left(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbb{Z}$

B. $\left(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbb{Z}$

C. $\left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbb{Z}$

D. $\left(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbb{Z}$



3. 函数 $f(x) = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列关于函数

$y = f(x) + g(x)$ 的结论:

① 一条对称轴方程为 $x = \frac{7\pi}{6}$; ② 点 $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 是对称中心;

③ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上为单调增函数; ④ 最大值为 $\frac{3}{2}$.

其中所有正确的结论为 _____ . (写出正确结论的序号)

4. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right)$ ($\omega > 0$), 已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点, 下述四个结论:

① $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点;

② $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点

③ $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{10}\right)$ 单调递增

④ ω 的取值范围是 $\left[\frac{12}{5}, \frac{29}{10}\right)$

其中所有正确结论的编号是

A. ①④ B. ②③ C. ①②③ D. ①③④

5. 已知函数 $f(x) = (1 - \tan x) \cdot \sin 2x$.

(I) 求 $f(x)$ 的定义域及单调递减区间;

(II) 比较 $f\left(\frac{\pi}{16}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{16}\right)$, $f\left(\frac{9\pi}{16}\right)$ 的大小, 并说明理由.

6. 已知函数 $f(x) = a \sin x - 2\sqrt{3} \cos x$ 的一条对称轴为 $x = -\frac{\pi}{6}$, $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 且函数 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上具有单调性, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

【解三角形】

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $BC = 2$, 则 $AB = 2$ 是 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 的

A. 充分而不必要条件

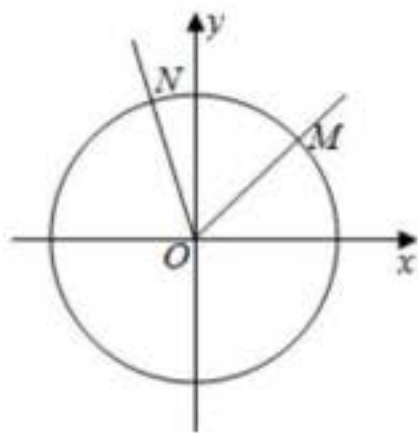
B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 锐角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边与单位圆交于 $M(x_1, y_1)$, 将 α 的终边按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 交单位圆于 $N(x_2, y_2)$,

记 $f(\alpha) = y_1 + y_2$.



(I) 求函数 $f(\alpha)$ 的值域;

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $f(C) = \sqrt{3}$, $c = 7$, $\sin A + \sin B = \frac{13\sqrt{3}}{14}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其中 $b = 2$, 从① $\cos A = \frac{1}{3}$, ② $\cos A = -\frac{1}{3}$,

③ $a = 3$, ④ $a = \frac{3}{2}$ 四个条件中选出两个条件, 使得该三角形能够唯一确定. 求边 c , $\sin B$ 及三角形面积

【二项式定理】

1. 若 $(1-2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，则 $a_3 =$ _____ (用数字作答)
2. 在二项式 $(\sqrt{2}+x)^9$ 的展开式中，常数项是 _____，系数为有理数的项的个数是 _____.

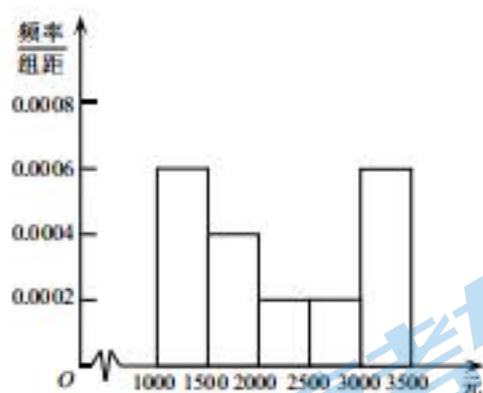
【概率统计】

1. 对某商店一个月内每天的顾客人数进行了统计，得到样本的茎叶图(如图所示)，则该样本的中位数、众数、极差分别是

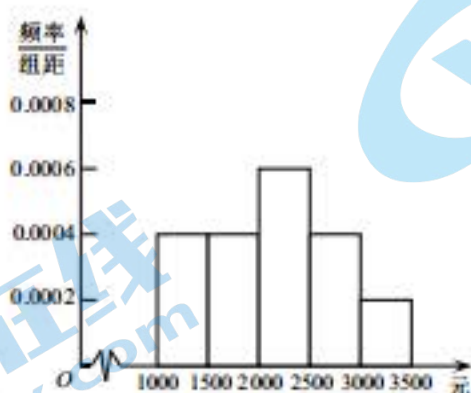
1	2	5
2	0	2 3 3
3	1	2 4 4 8 9
4	5	5 5 7 7 8 8 9
5	0	0 1 1 4 7 9
6	1	7 8

- A. 46, 45, 56 B. 46, 45, 53 C. 47, 45, 56 D. 45, 47, 53

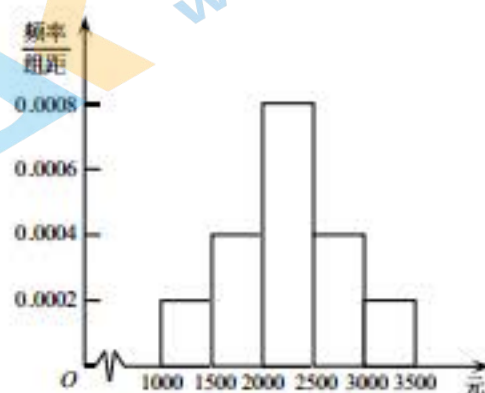
2. 为了解本市居民的生活成本，甲、乙、丙三名同学利用假期分别对三个社区进行了“家庭每月日常消费额”的调查. 他们将调查所得到的数据分别绘制成频率分布直方图(如图所示)，记甲、乙、丙所调查数据的标准差分别为 s_1, s_2, s_3 ，则它们的大小关系为 _____.
- (用“>”连接)



甲

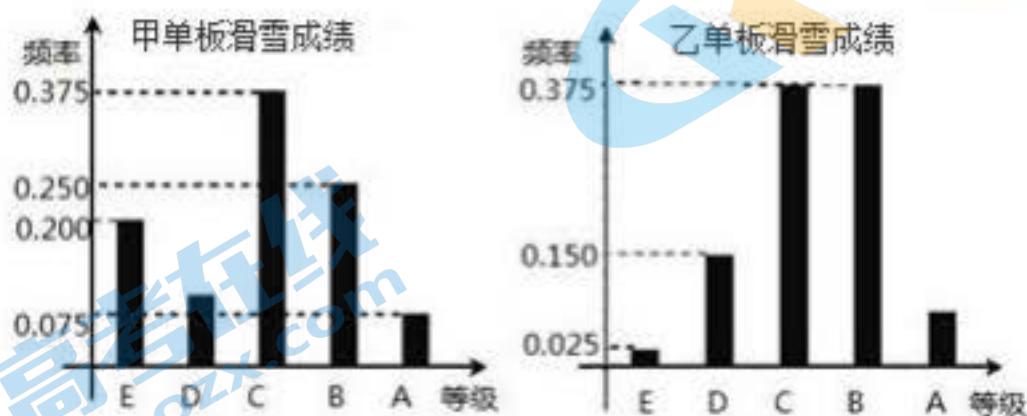


乙



丙

3. 第 24 届冬季奥林匹克运动会，将于 2022 年 2 月在北京市和张家口市联合举行. 某校寒假期间组织部分滑雪爱好者参加冬令营集训. 训练期间，冬令营的同学们都参加了“单板滑雪”这个项目相同次数的训练测试，成绩分别为 A, B, C, D, E 五个等级，分别对应的分数为 5, 4, 3, 2, 1. 甲乙两位同学在这个项目的测试成绩统计结果如图所示.



- (I) 根据上图判断，甲乙两位同学哪位同学的单板滑雪成绩更稳定？（结论不需要证明）
 (II) 求甲单板滑雪项目各次测试分数的众数和平均数；
 (III) 若甲、乙再同时参加两次测试，设甲的成绩为 4 分并且乙的成绩为 3 分或 4 分的次数为 X ，求 X 的分布列.（频率当作概率使用）

3. 某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如下表：

汽车型号	I	II	III	IV	V
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.3	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值.

假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等.

- (I) 从所有的回访客户中随机抽取 1 人，求这个客户满意的概率；
 (II) 从 I 型号和 V 型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列和期望；
 (III) 用 “ $\eta_1 = 1$ ”，“ $\eta_2 = 1$ ”，“ $\eta_3 = 1$ ”，“ $\eta_4 = 1$ ”，“ $\eta_5 = 1$ ” 分别表示 I, II, III, IV, V 型号汽车让客户满意，“ $\eta_1 = 0$ ”，“ $\eta_2 = 0$ ”，“ $\eta_3 = 0$ ”，“ $\eta_4 = 0$ ”，“ $\eta_5 = 0$ ” 分别表示 I, II, III, IV, V 型号汽车让客户不满意. 写出方差 $D\eta_1, D\eta_2, D\eta_3, D\eta_4, D\eta_5$ 的大小关系.

【立体几何】

1. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$, $PA=AD=CD=2$,

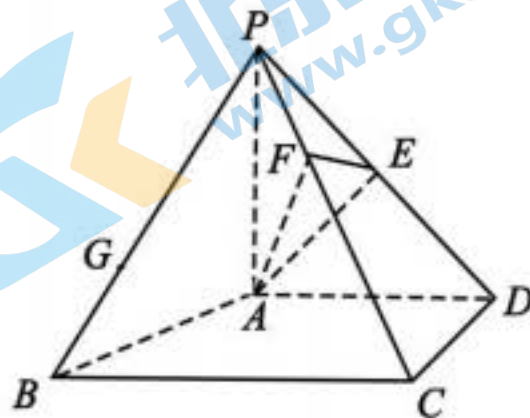
$BC=3$. E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$.

(I) 求证: $CD \perp$ 平面 PAD ;

(II) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值;

(III) 设点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$.

求证: 点 G 在平面 AEF 内.



2. 如图, $AC = 2ED$, $AC \parallel$ 平面 EDB , $AC \perp$ 平面 BCD , 平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC .

(I) 求证: $AC \parallel ED$;

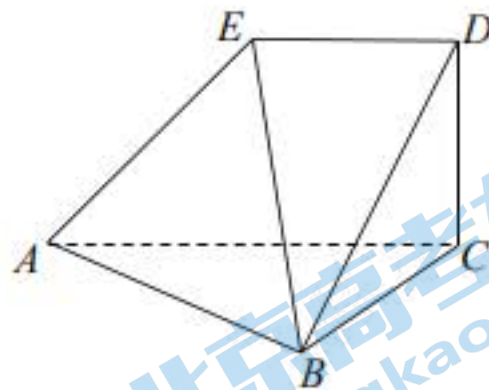
(II) 求证: $DC \perp BC$;

(III) 当 $BC = CD = DE = 1$ 时, 求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值;

(IV) 在棱 AB 上是否存在点 P 满足 $EP \parallel$ 平面 BDC ;

(V) 设 $\frac{CD}{DE} = k$, 是否存在 k 满足平面 $ABE \perp$ 平面 CBE ?

若存在求出 k 值, 若不存在说明理由.



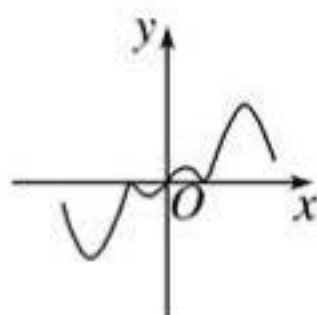
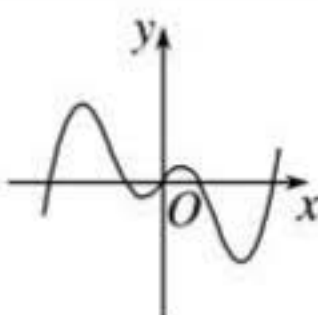
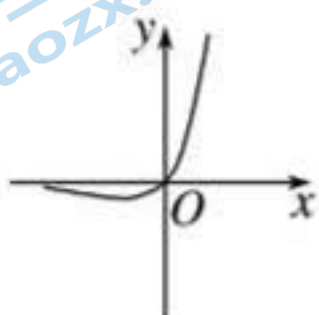
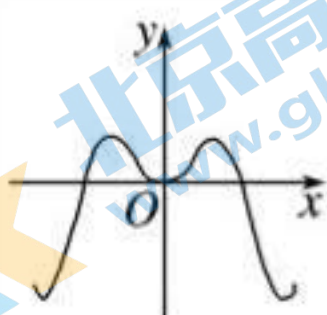
【函数与导数】

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \leq 1 \\ 1 - \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$, 则满足 $f(x) \leq 2$ 的 x 的取值范围是

- A. $[-1, 2]$ B. $[0, 2]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

2. 给出下列四个函数: ① $y = x \cdot \sin x$; ② $y = x \cdot \cos x$; ③ $y = x \cdot |\cos x|$; ④ $y = x \cdot 2^x$.

这四个函数的部分图象如下, 但顺序被打乱, 则按照从左到右的顺序将图象对应的函数序号安排正确的一组是



A. ①④②③

B. ①④③②

C. ④①②③

D. ③④②①

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x| & x > 0 \\ x^2 + 2x - 1 & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的图象与直线 $y = ax - 1$ 有且只有三个公共点, 则实数 a 的取值范围是_____.

4. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + cx$ ($a < b < c$), 其图象在点 $A(1, f(1))$, $B(m, f(m))$ 处的切线的斜率分别为 $0, -a$.

(I) 求证: $0 \leq \frac{b}{a} < 1$;

(II) 若函数 $f(x)$ 的递增区间为 $[s, t]$, 求 $|s - t|$ 的取值范围.

5. 已知函数 $f(x) = (x - a - 1)e^x$:

(I) 若函数的最小值为-1, 求实数 a 的值;

(II) 若 $x_1 > x_2$, 且有 $x_1 + x_2 = 2a$, 求证: $f(x_1) > f(x_2)$.

【解析几何】

1. 直线 $x \cos \alpha + \sqrt{3}y + 2 = 0$ 的倾斜角的取值范围是_____.

2. 已知直线 $x + a^2y + 6 = 0$ 与直线 $(a - 2)x + 3ay + 2a = 0$ 平行, 则 a 的值为 ()

A. 0 或 3 或 -1

B. 0 或 3

C. 3 或 -1

D. 0 或 -1

3. 已知直线 $mx + 4y - 2 = 0$ 与 $2x - 5y + n = 0$ 互相垂直, 垂足为 $P(1, p)$, 则 $m - n + p$ 的值是 ()

A. 24

B. 20

C. 0

D. -4

4. 已知点 $A(0, 2), B(2, 0)$. 若点 C 在函数 $y = x^2$ 的图象上, 则使得 $\triangle ABC$ 的面积为 2 的点 C 的个数为_____

5. 已知直线 $l_1: mx - y + m = 0$ 与直线 $l_2: x + my - 1 = 0$ 的交点为 Q , 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的

焦点为 F_1, F_2 , 则 $|QF_1| + |QF_2|$ 的取值范围是

- A. $[2, +\infty)$ B. $[2\sqrt{3}, +\infty)$ C. $[2, 4]$ D. $[2\sqrt{3}, 4]$

6. 直线 $x - y - 1 = 0$ 与圆 $C: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = r^2$ 相交于两点 M, N , 若 $|MN| = \sqrt{2}$, 则圆 C 的半径 $r =$ _____.

7. 已知直线 $l: ax + (a + 1)y + 2 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = 16$ 相交于 A, B 两点, 则 $|AB|$ 的取值范围是 _____.

8. 卵圆是常见的一类曲线, 已知一个卵圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{x+2} + \frac{y^2}{4} = 1$, O 为坐标原点, 点

$A(1, 0)$, 点 P 为卵圆上任意一点, 则下列说法中不正确的是

- A. 卵圆 C 关于 x 轴对称 B. 卵圆上不存在两点关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称
C. 线段 PO 长度的取值范围是 $[1, 2]$ D. $\triangle OAP$ 的面积最大值为 1

9. 已知椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 梯形 $ABCD$ 的顶点在椭圆上.

(I) 已知梯形 $ABCD$ 的两腰 $AC=BD$, 且两个底边 AB 和 DC 与坐标轴平行或在坐标轴上.

若梯形一底边 $AB=2$, 高为 $\sqrt{3}$, 求梯形 $ABCD$ 的面积;

(II) 若梯形 $ABCD$ 的两底 AB 和 DC 与坐标轴不平行且不在坐标轴上, 判断该梯形是否可以成为等腰梯形并说明理由.

10. 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上下顶点分别为 A, B , 且点 $B(0, -1)$. F_1, F_2

分别为椭圆 W 的左、右焦点, 且 $\angle F_1BF_2 = 120^\circ$.

(I) 求椭圆 W 的标准方程;

(II) 点 M 是椭圆上异于 A, B 的任意一点, 过点 M 作 $MN \perp y$ 轴于 N , E 为线段 MN 的中点, 直线 AE 与直线 $y = -1$ 交于点 C , G 为线段 BC 的中点, O 为坐标原点, 求 $\angle OEG$ 的大小.

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点在 x 轴，且右焦点到左顶点的距离为 3.

(I) 求椭圆 C 的方程和焦点的坐标;

(II) 与 x 轴不垂直且不重合的直线 l 与椭圆 C 相交于不同的 A, B 两点，直线 l 与 x 轴的交点为 M ，点 M 关于 y 轴的对称点为 N .

(i) 求 $\triangle ABN$ 面积的最大值;

(ii) 当 $\triangle ABN$ 面积取得最大值时，求证： $\sqrt{6} < |AB| < 2\sqrt{2}$.

1.提供的题目并非一组试卷, 小题(选、填)主要针对以前没有考到的知识点, 或者在试题的呈现形式上没有用过的试题.

3.试题按照中心组教师的建议和一些教师的建议匆匆赶制而成，难免出错，希望老师们及时指出问题，以便及时改正。

1. 已知集合 $A = \{x | \ln(x+1) \leq 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{0,1\}$ B. $\{-1,0,1\}$
C. $\{-2,-1,0,1\}$ D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 设 α, β 为两个平面, 则 $\alpha // \beta$ 的充要条件是

- A. α 内有无数条直线与 β 平行
B. α 内有两条相交直线与 β 平行
C. α, β 平行于同一条直线
D. α, β 垂直于同一平面

【复数】

1. 如果复数 $z = a^2 + a - 2 + (a^2 - 3a + 2)i$ 为纯虚数, 那么实数 a 的值为

- A. 2 B. 1 C. -2 D. 1 或 -2

2. 设 $z = -3 + 2i$, 则在复平面内 $\bar{z}$ 对应的点位于

- A. 第一象限
B. 第二象限
C. 第三象限
D. 第四象限

3. 若 $\frac{m+i}{1+i} = ni$ ，则实数 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ，实数 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案: $m=-1, n=1$.

【不等式】

1. 设 $0 < a < b$, 则下列不等式中正确的是

A. $a < b < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

B. $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$

C. $a < \sqrt{ab} < b < \frac{a+b}{2}$

D. $\sqrt{ab} < a < \frac{a+b}{2} < b$

答案: B

[解答]

(方法一) 已知 $a < b$ 和 $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$, 比较 a 与 $\sqrt{ab}$,

因为 $a^2 - (\sqrt{ab})^2 = a(a-b) < 0$, 所以 $a < \sqrt{ab}$, 同理由

$b^2 - (\sqrt{ab})^2 = b(b-a) > 0$ 得 $\sqrt{ab} < b$; 作差法: $b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} > 0$,

所以 $\frac{a+b}{2} < b$, 综上可得 $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$; 故选 B.

(方法二) 取 $a=2, b=8$,

则 $\sqrt{ab}=4, \frac{a+b}{2}=5$, 所以 $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

2. 设 $m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq 0$, “ $m + \frac{4}{m} > 4$ ”的一个必要不充分条件是 ()

A. $m \neq 2$

B. $m > 0$ 且 $m \neq 2$

C. $m > 2$

D. $m \geq 2$

答案: A

3. 已知 $m \in (0,1)$, 令 $a = \log_m 2, b = m^2, c = 2^m$, 那么 a, b, c 之间的大小关系为 ()

A. $b < c < a$

B. $b < a < c$

C. $a < b < c$

D. $c < a < b$

答案: C

4. 设 $a = \log_{0.2} 0.3, b = \log_2 0.3$, 则

A. $a+b < ab < 0$

B. $ab < a+b < 0$

C. $a+b < 0 < ab$

D. $ab < 0 < a+b$

答案: B

[解答]

由 $a = \log_{0.2} 0.3$ 得 $\frac{1}{a} = \log_{0.3} 0.2$ ，由 $b = \log_2 0.3$ 得 $\frac{1}{b} = \log_{0.3} 2$ ，

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_{0.3} 0.2 + \log_{0.3} 2 = \log_{0.3} 0.4$ ，所以 $0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1$ ，得 $0 < \frac{a+b}{ab} < 1$ 。

又 $a > 0$ ， $b < 0$ ，所以 $ab < 0$ ，所以 $ab < a+b < 0$ 。故选 B。

【数列】

1. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，下列结论中正确的是（ ）。

A. 若 $a_1 + a_2 > 0$ ，则 $a_2 + a_3 > 0$

B. 若 $a_1 + a_3 < 0$ ，则 $a_1 + a_2 < 0$

C. 若 $0 < a_1 < a_2$ ，则 $a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$

D. 若 $a_1 < 0$ ，则 $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) > 0$

答案：C

2. 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0$ ， $a_7 + a_{10} < 0$ ，则当 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ 时， $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大。

答案：8

3. 已知数列 $\{a_n\}$ ， $a_2 = 2$ ， $a_n + a_{n+1} = 3n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ ，则 $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = \underline{\hspace{2cm}}$

答案：57

[解答]

法一：通过具体罗列各项

$$a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 7, a_6 = 8, a_7 = 10, a_8 = 11, a_9 = 13, a_{10} = 14, a_{11} = 16, a_{12} = 17,$$

$$\text{所以 } a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = 57$$

法二：由递推关系进一步可得相邻几项之间的关系

$$a_n + a_{n+1} = 3n, a_{n+1} + a_{n+2} = 3n + 3,$$

$$\text{两式相减可得 } a_{n+2} - a_n = 3,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 隔项成等差数列，所以 $a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, a_{12}$ 是以 2 为首项，以 3 为公差，

$$\text{共有 6 项的等差数列，用求和公式得 } a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} = 6 \times 2 + \frac{6 \times 5}{2} \times 3 = 57$$

4. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $\{b_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，公比 $q > 1$ ，且 $a_5 = b_5$ ，则

A. $a_3 + a_7 > b_4 + b_6$

B. $a_3 + a_7 \geq b_4 + b_6$

C. $a_3 + a_7 < b_4 + b_6$

D. $a_3 + a_7 = b_4 + b_6$

答案：C

【平面向量】

1. 设向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 不平行, 向量 $\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ 平行, 则实数 $\lambda =$ _____.

答案: $\frac{1}{2}$

2. 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 向量 $\mathbf{a} = (\sin 2\theta, \cos \theta), \mathbf{b} = (\cos \theta, 1)$, 若 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 则 $\tan \theta =$ _____.

答案: $\frac{1}{2}$

3. 设向量 $\mathbf{a} = (3, 3), \mathbf{b} = (1, -1)$, 若 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \lambda\mathbf{b})$, 则实数 $\lambda =$ _____.

答案: ± 3

4. 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均为单位向量, 则“ $|\mathbf{a} - 3\mathbf{b}| = |3\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ ”是“ $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ ”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案: C

[解答]

$$\because |\mathbf{a} - 3\mathbf{b}| = |3\mathbf{a} + \mathbf{b}|, \therefore (\mathbf{a} - 3\mathbf{b})^2 = (3\mathbf{a} + \mathbf{b})^2, \therefore \mathbf{a}^2 - 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 9\mathbf{b}^2 = 9\mathbf{a}^2 + 6\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b}^2,$$

又 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, \therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0, \therefore \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$; 反之也成立, 故选 C.

【三角函数】

1. 若角 α 的终边过点 $(1, -2)$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____

答案: $-\frac{4}{5}$

[解答]

$$x = 1, y = -2, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$$

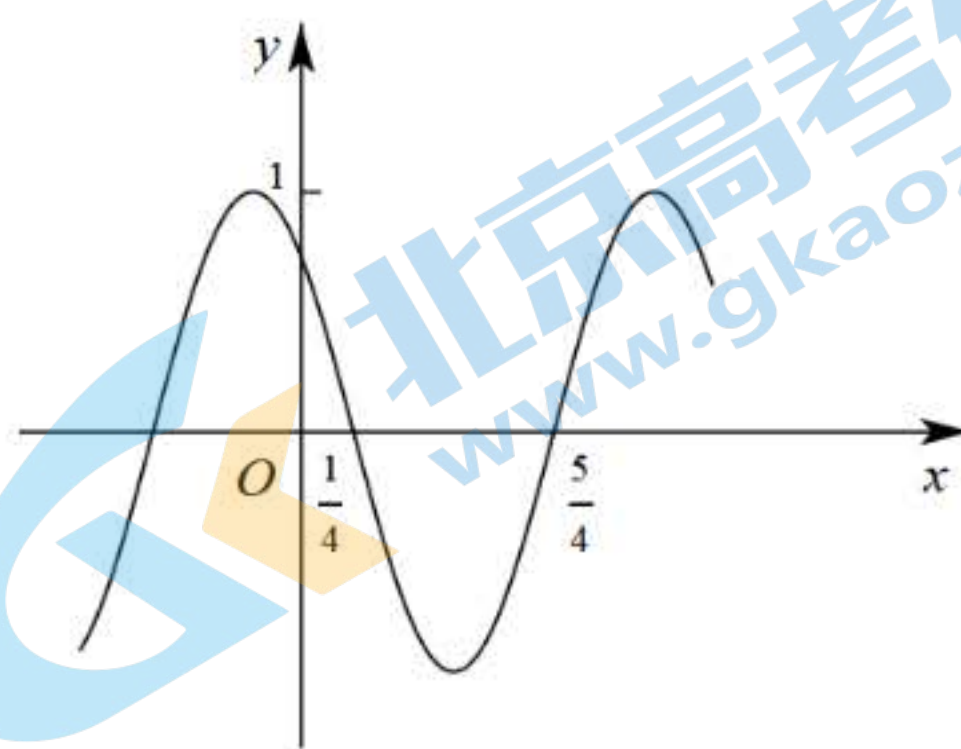
2. 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为

A. $\left(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

B. $\left(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

C. $\left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

D. $\left(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$



答案: D

3. 函数 $f(x) = \sin x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列关于函数

$y = f(x) + g(x)$ 的结论:

①一条对称轴方程为 $x = \frac{7\pi}{6}$; ②点 $\left(\frac{5\pi}{6}, 0\right)$ 是对称中心;

③在区间 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上为单调增函数; ④最大值为 $\frac{3}{2}$.

其中所有正确的结论为_____. (写出正确结论的序号)

答案: ②③

4. 设函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{5}\right)$ ($\omega > 0$), 已知 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点, 下述四个结论:

① $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 3 个极大值点;

② $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点

③ $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{10}\right)$ 单调递增

④ ω 的取值范围是 $\left[\frac{12}{5}, \frac{29}{10}\right)$

其中所有正确结论的编号是

A. ①④ B. ②③ C. ①②③ D. ①③④

答案: D

[解答]

当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{5}, 2\pi\omega + \frac{\pi}{5} \right]$,

因为 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 5 个零点, 所以 $5\pi \leq 2\pi\omega + \frac{\pi}{5} < 6\pi$,

所以 $\frac{12}{5} \leq \omega < \frac{29}{10}$, 故④正确,

因此由选项可知只需判断③是否正确即可得到答案,

下面判断③是否正确,

当 $x \in (0, \frac{\pi}{10})$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{5} \in \left[\frac{\pi}{5}, \frac{(\omega+2)\pi}{10} \right]$,

若 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{10})$ 单调递增,

则 $\frac{(\omega+2)\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$, 即 $\omega < 3$, 因为 $\frac{12}{5} \leq \omega < \frac{29}{10}$, 故③正确.

5. 已知函数 $f(x) = (1 - \tan x) \cdot \sin 2x$.

(I) 求 $f(x)$ 的定义域及单调递减区间;

(II) 比较 $f(\frac{\pi}{16})$, $f(\frac{3\pi}{16})$, $f(\frac{9\pi}{16})$ 的大小, 并说明理由.

[解答]

(I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 - \frac{\sin x}{\cos x}) \cdot 2 \sin x \cos x \\ &= 2 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x \\ &= \sin 2x + \cos 2x - 1 \\ &= \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) - 1, \end{aligned}$$

$f(x)$ 的单调递减区间为 $[k\pi + \frac{\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{2}), (k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{5\pi}{8}), k \in \mathbf{Z}$

(II) $f(\frac{\pi}{16}) = f(\frac{3\pi}{16}) > 0, f(\frac{9\pi}{16}) < 0$ 所以 $f(\frac{\pi}{16}) = f(\frac{3\pi}{16}) > f(\frac{9\pi}{16})$

5. 已知函数 $f(x) = a \sin x - 2\sqrt{3} \cos x$ 的一条对称轴为 $x = -\frac{\pi}{6}$, $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 且函数

$f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上具有单调性, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{4\pi}{3}$

答案: C

【解三角形】

1. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $BC = 2$, 则 $AB = 2$ 是 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案: C

2. 在平面直角坐标系 xOy 中, 锐角 α 的顶点与原点 O 重合, 始边与 x 轴的正半轴重合, 终边与单位圆交于 $M(x_1, y_1)$, 将 α 的终边按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$, 交单位圆于 $N(x_2, y_2)$,

记 $f(\alpha) = y_1 + y_2$.

(I) 求函数 $f(\alpha)$ 的值域;

(II) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $f(C) = \sqrt{3}$, $c = 7$, $\sin A + \sin B = \frac{13\sqrt{3}}{14}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

[解答]

$$(I) \quad y_1 = \sin \alpha, y_2 = \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\therefore f(\alpha) = y_1 + y_2 = \sin \alpha + \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \therefore \frac{\pi}{6} < \alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{3} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) \leq \sqrt{3}, \text{ 函数 } f(\alpha) \text{ 的值域是 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} \right].$$

$$(II) \quad f(C) = \sqrt{3} \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}, \sin \left(C + \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

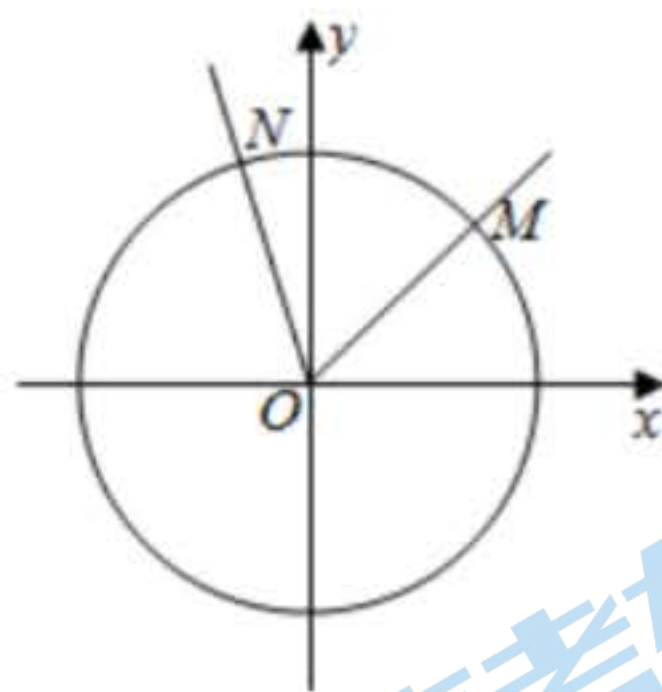
$$\because 0 < C < \pi, \therefore \frac{\pi}{6} < C + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore C + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, C = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{由 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \text{ 又 } \sin A + \sin B = \frac{13\sqrt{3}}{14}$$

$$\text{得 } a + b = 13$$

$$\text{由余弦定理 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a + b)^2 - 3ab, \text{ 得 } ab = 40,$$



$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = 10\sqrt{3}.$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 其中 $b=2$, 从① $\cos A = \frac{1}{3}$, ② $\cos A = -\frac{1}{3}$,

③ $a=3$, ④ $a=\frac{3}{2}$ 四个条件中选出两个条件, 使得该三角形能够唯一确定. 求边 c , $\sin B$ 及

三角形面积

[解答]

选①③

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 解得 $c=3$

由 $\cos A = \frac{1}{3}$ 得 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ 得 $\sin B = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = 2\sqrt{2}$

选②③

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 解得 $c = \frac{5}{3}$

由 $\cos A = -\frac{1}{3}$ 得 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ 得 $\sin B = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{10\sqrt{2}}{9}.$

【二项式定理】

1. 若 $(1-2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_3 =$ _____ (用数字作答)

答案: -80

2. 在二项式 $(\sqrt{2}+x)^9$ 的展开式中, 常数项是_____, 系数为有理数的项的个数是_____.

答案: $16\sqrt{2}$, 5

【概率统计】

1. 对某商店一个月内每天的顾客人数进行了统计, 得到样本的茎叶图 (如图所示), 则该样

本的中位数、众数、极差分别是

1	2	5
2	0	2 3 3
3	1	2 4 4 8 9
4	5	5 5 7 7 8 8 9
5	0	0 1 1 4 7 9
6	1	7 8

- A. 46, 45, 56 B. 46, 45, 53 C. 47, 45, 56 D. 45, 47, 53

答案: A

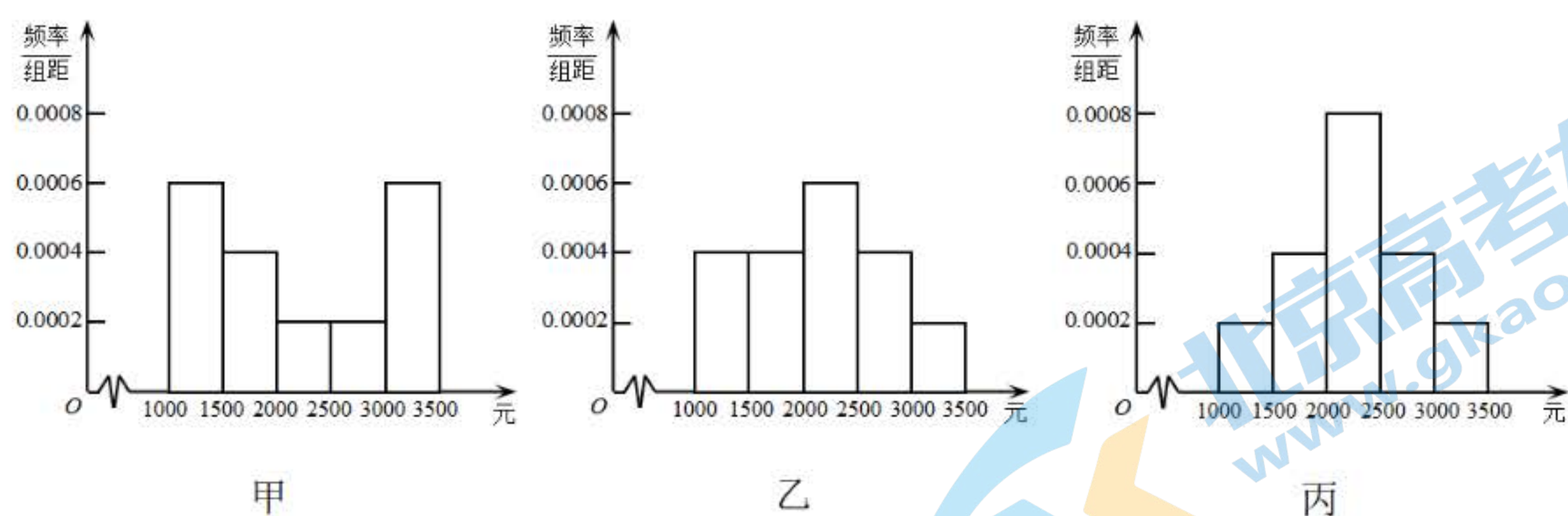
[解答]

由概念知中位数是中间两数的平均数, 即 $\frac{45+47}{2}=46$, 众数是 45, 极差为 $68-12=56$.

所以选 A.

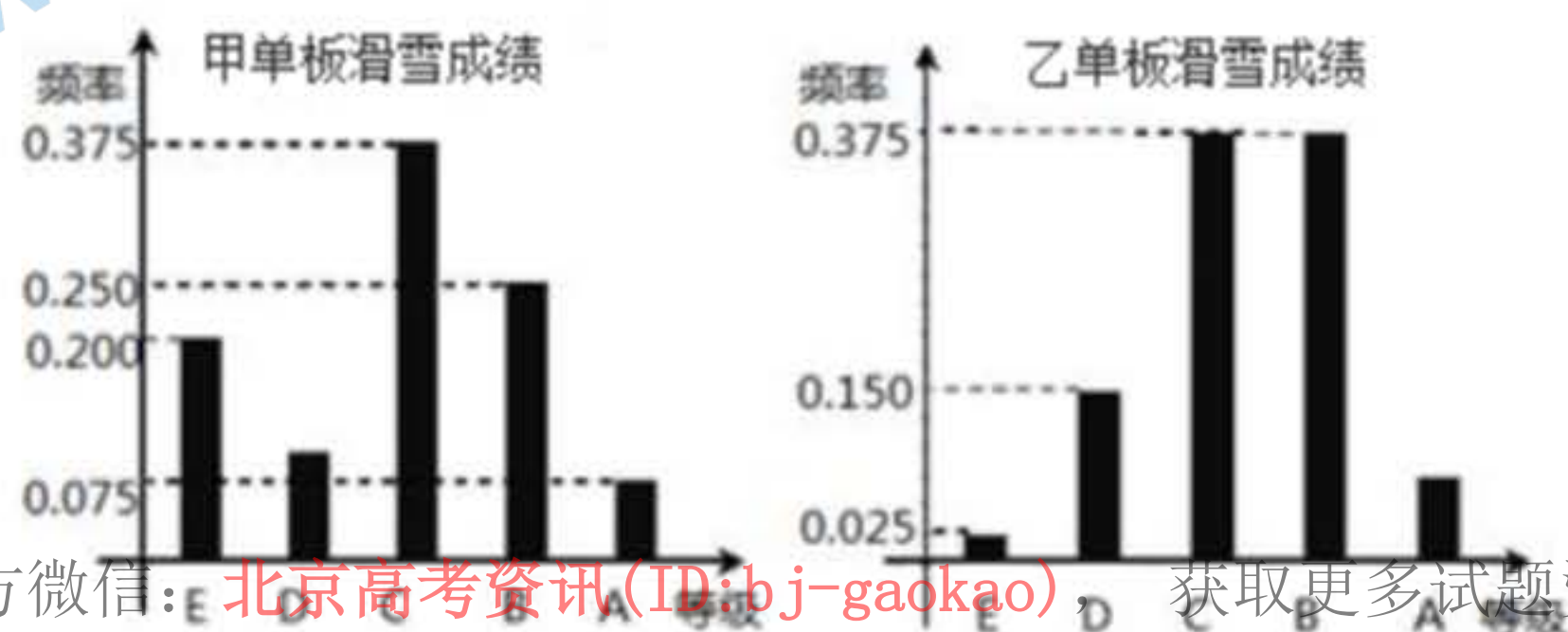
2. 为了解本市居民的生活成本, 甲、乙、丙三名同学利用假期分别对三个社区进行了“家庭每月日常消费额”的调查. 他们将调查所得到的数据分别绘制成频率分布直方图 (如图所示), 记甲、乙、丙所调查数据的标准差分别为 s_1, s_2, s_3 , 则它们的大小关系为_____.

(用“>”连接)



答案: $s_1 > s_2 > s_3$

3. 第 24 届冬季奥林匹克运动会, 将于 2022 年 2 月在北京市和张家口市联合举行. 某校寒假期间组织部分滑雪爱好者参加冬令营集训. 训练期间, 冬令营的同学们都参加了“单板滑雪”这个项目相同次数的训练测试, 成绩分别为 A, B, C, D, E 五个等级, 分别对应的分数为 5, 4, 3, 2, 1. 甲乙两位同学在这个项目的测试成绩统计结果如图所示.



- (I) 根据上图判断，甲乙两位同学哪位同学的单板滑雪成绩更稳定？（结论不需要证明）
 (II) 求甲单板滑雪项目各次测试分数的众数和平均数；
 (III) 若甲、乙再同时参加两次测试，设甲的成绩为 4 分并且乙的成绩为 3 分或 4 分的次数为 X ，求 X 的分布列。（频率当作概率使用）

[解答]

- (I) 乙比甲的单板滑雪成绩更稳定；
 (II) 因为甲单板滑雪项目测试中 4 分和 5 分成绩的频率之和为 0.325，
 3 分成绩的频率为 0.375，所以甲单板滑雪项目各次测试分数的众数为 3 分；
 测试成绩为 2 分的频率为 $1 - 0.200 - 0.375 - 0.250 - 0.075 = 0.1$ ，
 所以甲单板滑雪项目各次测试分数的平均数为

$$1 \times 0.2 + 2 \times 0.1 + 3 \times 0.375 + 4 \times 0.25 + 5 \times 0.075 = 2.9$$

- (III) 由题意可知，在每次测试中，

$$\text{甲的成绩为 4 分并且乙的成绩为 3 分或 4 分的概率为 } 0.25 \times (0.375 + 0.375) = \frac{3}{16}.$$

X 的取值可能为 0, 1, 2.

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{3}{16}\right)^2 = \frac{169}{256};$$

$$P(X=1) = C_2^1 \left(\frac{3}{16}\right) \left(1 - \frac{3}{16}\right) = \frac{78}{256};$$

$$P(X=2) = \left(\frac{3}{16}\right)^2 = \frac{9}{256}.$$

则 X 的分布列如下表所示：

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{169}{256}$	$\frac{78}{256}$	$\frac{9}{256}$

3. 某汽车品牌为了了解客户对于其旗下的五种型号汽车的满意情况，随机抽取了一些客户进行回访，调查结果如下表：

汽车型号	I	II	III	IV	V
回访客户（人数）	250	100	200	700	350
满意率	0.5	0.3	0.6	0.3	0.2

满意率是指：某种型号汽车的回访客户中，满意人数与总人数的比值。

假设客户是否满意互相独立，且每种型号汽车客户对于此型号汽车满意的概率与表格中该型号汽车的满意率相等。

- (I) 从所有的回访客户中随机抽取 1 人，求这个客户满意的概率；

(II) 从 I 型号和 V 型号汽车的所有客户中各随机抽取 1 人，设其中满意的人数为 ξ ，求 ξ 的分布列和期望；

(III) 用 “ $\eta_1=1$ ”，“ $\eta_2=1$ ”，“ $\eta_3=1$ ”，“ $\eta_4=1$ ”，“ $\eta_5=1$ ” 分别表示 I, II, III, IV, V 型号汽车让客户满意，“ $\eta_1=0$ ”，“ $\eta_2=0$ ”，“ $\eta_3=0$ ”，“ $\eta_4=0$ ”，“ $\eta_5=0$ ” 分别表示 I, II, III, IV, V 型号汽车让客户不满意. 写出方差 $D\eta_1, D\eta_2, D\eta_3, D\eta_4, D\eta_5$ 的大小关系.

[解答]

(I) 由题意知，样本中的回访客户的总数是 $250+100+200+700+350=1600$ ，

满意的客户人数 $250 \times 0.5 + 100 \times 0.3 + 200 \times 0.6 + 700 \times 0.3 + 350 \times 0.2 = 555$ ，

故所求概率为 $\frac{555}{1600} = \frac{111}{320}$.

(II) $\xi = 0, 1, 2$.

设事件 A 为“从 I 型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”，

事件 B 为“从 V 型号汽车所有客户中随机抽取的人满意”，且 A 、 B 为独立事件.

根据题意， $P(A)$ 估计为 0.5， $P(B)$ 估计为 0.2.

则 $P(\xi=0) = P(\overline{AB}) = (1-P(A))(1-P(B)) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$ ；

$$P(\xi=1) = P(\overline{AB} + \overline{AB}) = P(\overline{AB}) + P(\overline{AB}) = P(A)(1-P(B)) + (1-P(A))P(B)$$

$$= 0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.2 = 0.5$$
；

$P(\xi=2) = P(AB) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$.

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	0.4	0.5	0.1

ξ 的期望 $E(\xi) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.1 = 0.7$.

(III) $D\eta_1 > D\eta_3 > D\eta_2 = D\eta_4 > D\eta_5$.

【立体几何】

1. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp CD$, $AD \parallel BC$, $PA=AD=CD=2$,

$BC=3$. E 为 PD 的中点, 点 F 在 PC 上, 且 $\frac{PF}{PC} = \frac{1}{3}$.

(I) 求证: $CD \perp$ 平面 PAD ;

(II) 求二面角 $F-AE-P$ 的余弦值;

(III) 设点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$.

求证: 点 G 在平面 AEF 内.

[解答]

(I) 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$.

又因为 $AD \perp CD$, 且 $PA \cap AD = A$ 所以 $CD \perp$ 平面 PAD .

(II) 过 A 作 AD 的垂线交 BC 于点 M , 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp AM$, $PA \perp AD$,

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$, 则 $A(0, 0, 0)$, $B(2, -1, 0)$, $C(2, 2, 0)$,

$D(0, 2, 0)$, $P(0, 0, 2)$, 因为 E 为 PD 的中点, 所以 $E(0, 1, 1)$.

所以 $\overrightarrow{AE} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{PC} = (2, 2, -2)$, $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$.

所以 $\overrightarrow{PF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PF} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

设平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} y + z = 0 \\ \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z = 0 \end{cases}$$

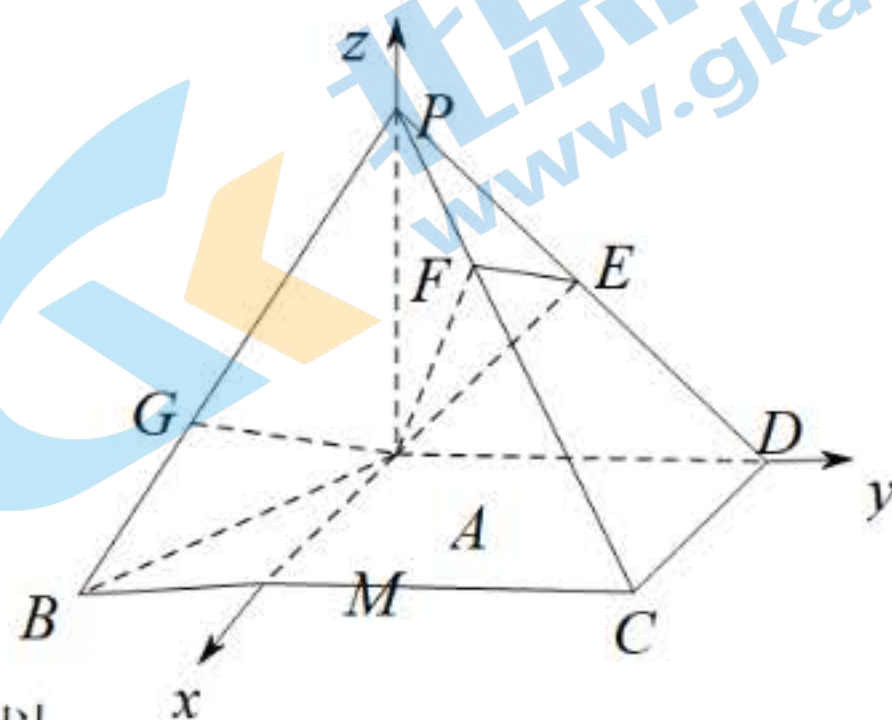
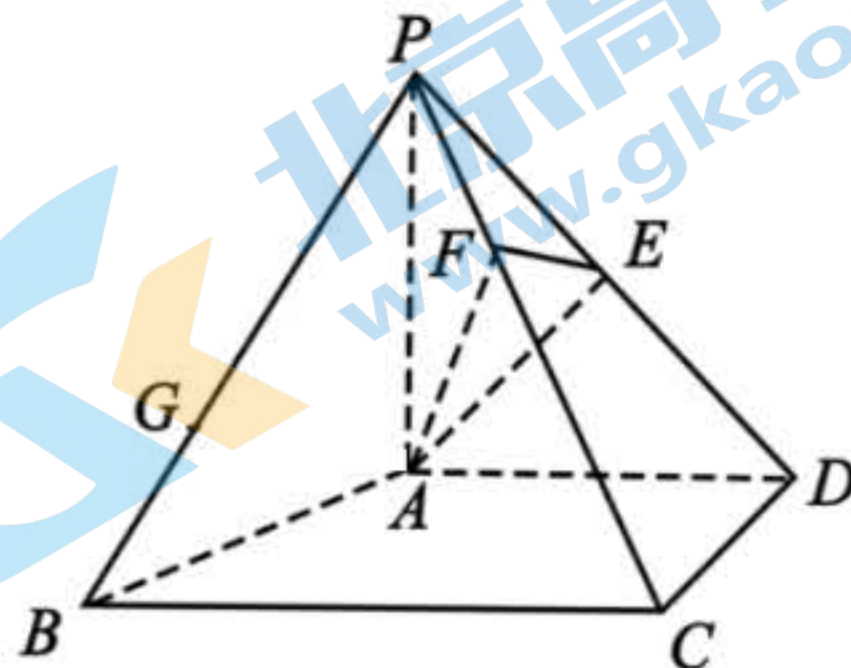
令 $z=1$, 则 $y=-1, x=-1$. 于是 $\mathbf{n} = (-1, -1, 1)$.

又因为平面 PAD 的法向量为 $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$, 所以

$$\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{p} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{p}|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因为二面角 $F-AE-P$ 为锐角, 所以其余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(III) 直线 AG 在平面 AEF 内, 因为点 G 在 PB 上, 且 $\frac{PG}{PB} = \frac{2}{3}$, $\overrightarrow{PB} = (2, -1, -2)$,



所以 $\overrightarrow{PG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PB} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PG} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

由 (II) 知, 平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{n} = (-1, -1, 1)$,

所以 $\overrightarrow{AG} \cdot \mathbf{n} = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$, 所以直线 AG 在平面 AEF 内.

所以点 G 在平面 AEF 内.

2. 如图, $AC = 2ED$, $AC \parallel$ 平面 EDB , $AC \perp$ 平面 BCD , 平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC .

(I) 求证: $AC \parallel ED$;

(II) 求证: $DC \perp BC$;

(III) 当 $BC = CD = DE = 1$ 时, 求二面角 $A-BE-D$ 的余弦值;

(IV) 在棱 AB 上是否存在点 P 满足 $EP \parallel$ 平面 BDC ;

(V) 设 $\frac{CD}{DE} = k$, 是否存在 k 满足平面 $ABE \perp$ 平面 CBE ?

若存在求出 k 值, 若不存在说明理由.

[解答]

(I) 因为 $AC \parallel$ 平面 EDB , 平面 $ACDE \cap$ 平面 $EDB = ED$, 且 $AC \subset$ 平面 $ACDE$,

所以 $AC \parallel ED$.

(II) 法 1: 因为 $AC \perp$ 平面 BCD , 所以 $AC \perp CD$,

因为平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC , 且平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABC = AC$, $CD \subset$ 平面 $ACDE$,

所以 $CD \perp$ 平面 ABC ,

所以 $CD \perp CB$.

(II) 法 2: 因为 $AC \perp$ 平面 BCD , 所以 $AC \perp CD$, $AC \perp CB$,

因为平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABC = AC$,

所以 $\angle DCB$ 为二面角 $D-AC-B$ 的平面角,

又因为平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC ,

所以 $\angle DCB = 90^\circ$, 即 $CD \perp CB$.

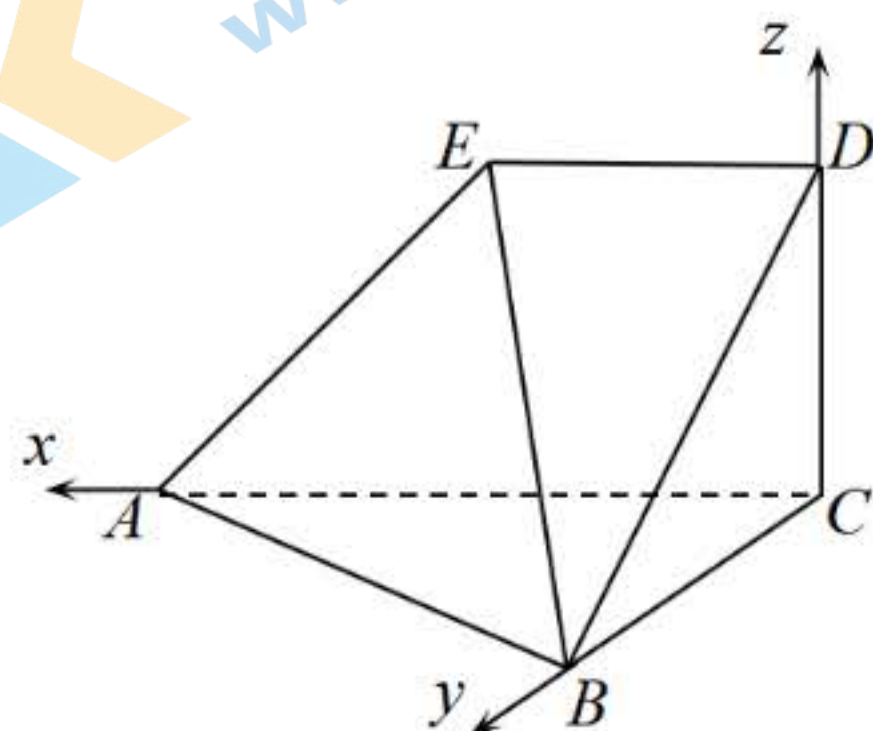
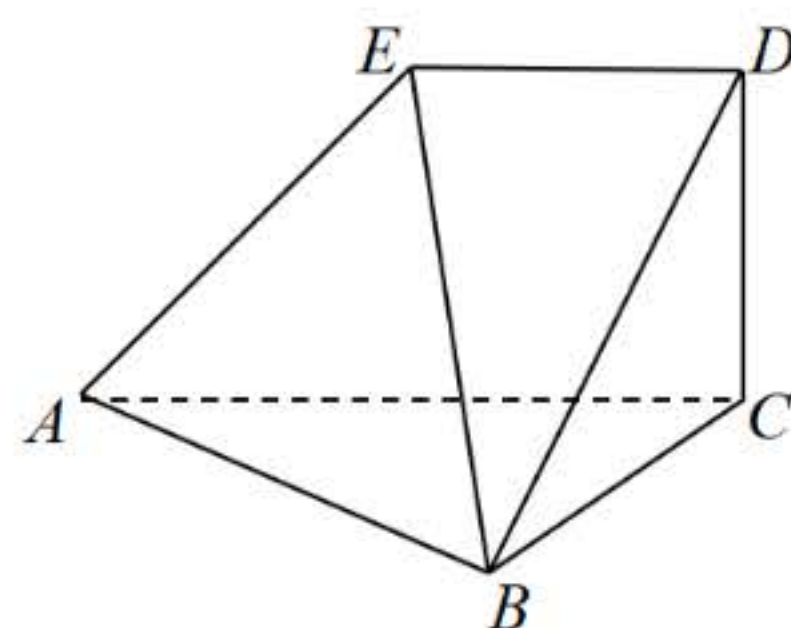
(III) 由 (II) 证明可知 $AC \perp CD$, $AC \perp CB$, $CD \perp CB$,

所以如图建立空间直角坐标系, 因为 $BC = CD = DE = 1$,

所以 $A(2, 0, 0), B(0, 1, 0), D(0, 0, 1), E(1, 0, 1)$,

所以 $\overrightarrow{DE} = (1, 0, 0), \overrightarrow{BD} = (0, -1, 1), \overrightarrow{AE} = (-1, 0, 1), \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 0)$ 设平面 BDE 的法向量为

$\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则



$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{BD} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases} \text{ 可得 } \mathbf{m} = (0, 1, 1).$$

设平面 ABE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x', y', z')$, 则

$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 可得 } \mathbf{n} = (1, 2, 1).$$

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以, 依据题意可得二面角 $A-BE-D$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(IV) 法 1: 取 AC 中点 F , 连接 EF , 过点 F 作 $FP \parallel BC$ 交 AB 于点 P ,

所以 P 为 AB 中点.

因为 $AC = 2ED, AC \parallel ED$, 所以 $ED \parallel FC$, 所以 $EF \parallel CD$.

又 $EF \cap FP = F$, 所以平面 $EFP \parallel$ 平面 BCD ,

所以 $EP \parallel$ 平面 BCD .

法 2: 设 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, 则 $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AP} = (1 - 2\lambda, \lambda, -1)$,

由 (II) 证明可知平面 BCD 的一个法向量为 $\mathbf{k} = (1, 0, 0)$,

$$\text{由 } \overrightarrow{EP} \cdot \mathbf{k} = 0 \text{ 可得 } \lambda = \frac{1}{2},$$

所以当 P 为 AB 中点时, EP 与平面 BCD 成角为 0° ,

所以当 P 为 AB 中点时, $EP \parallel$ 平面 BCD .

(V) 设 $AC = 2a$, 则 $A(2a, 0, 0), E(a, 0, ka), B(0, b, 0)$, 则

$$\overrightarrow{AE} = (-a, 0, ka), \overrightarrow{AB} = (-2a, b, 0),$$

设平面 CBE 的法向量为 $\mathbf{m}' = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{CE} \cdot \mathbf{m}' = 0, \\ \overrightarrow{CB} \cdot \mathbf{m}' = 0, \end{cases} \text{ 可得一个法向量 } \mathbf{m}' = (k, 0, -1),$$

设平面 ABE 的法向量 $\mathbf{n}' = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n}' = 0, \\ \overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}' = 0, \end{cases} \text{ 可得一个法向量 } \mathbf{n}' = (k, \frac{2ak}{b}, 1),$$

$$\text{由 } \mathbf{m}' \cdot \mathbf{n}' = 0 \text{ 可得 } k = 1.$$

所以当 $k = 1$ 时, 平面 $ABE \perp$ 平面 CBE .

【函数与导数】

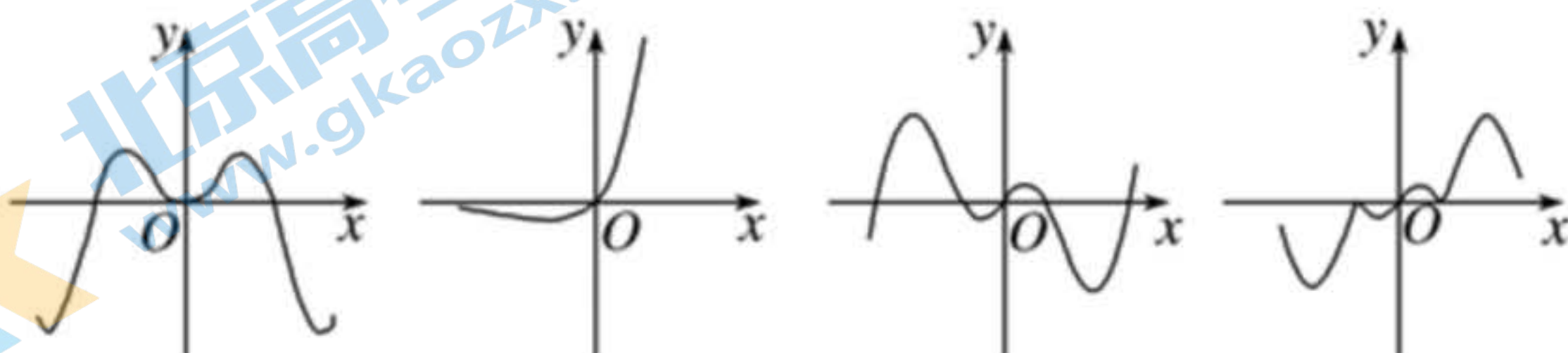
1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \leq 1 \\ 1 - \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$, 则满足 $f(x) \leq 2$ 的 x 的取值范围是

- A. $[-1, 2]$ B. $[0, 2]$ C. $[1, +\infty)$ D. $[0, +\infty)$

答案: D

2. 给出下列四个函数: ① $y = x \cdot \sin x$; ② $y = x \cdot \cos x$; ③ $y = x \cdot |\cos x|$; ④ $y = x \cdot 2^x$.

这四个函数的部分图象如下, 但顺序被打乱, 则按照从左到右的顺序将图象对应的函数序号安排正确的一组是



- A. ①④②③ B. ①④③② C. ④①②③ D. ③④②①

答案: A

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\ln x| & x > 0 \\ x^2 + 2x - 1 & x \leq 0 \end{cases}$, 若 $f(x)$ 的图象与直线 $y = ax - 1$ 有且只有三个公共点, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案 (0, 2)

4. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + bx^2 + cx$ ($a < b < c$), 其图象在点 $A(1, f(1))$, $B(m, f(m))$ 处的切线的斜率分别为 0, $-a$.

(I) 求证: $0 \leq \frac{b}{a} < 1$;

(II) 若函数 $f(x)$ 的递增区间为 $[s, t]$, 求 $|s - t|$ 的取值范围.

[解答]

(I) 证明: $f'(x) = ax^2 + 2bx + c$, 由题意及导数的几何意义得

$$f'(1) = a + 2b + c = 0, \quad (1)$$

$$f'(m) = am^2 + 2bm + c = -a, \quad (2)$$

又 $a < b < c$, 可得 $4a < a + 2b + c < 4c$, 即 $4a < 0 < 4c$, 故 $a < 0, c > 0$,

由 (1) 得 $c = -a - 2b$ ，代入 $a < b < c$ ，再由 $a < 0$ ，得

$$-\frac{1}{3} < \frac{b}{a} < 1, \quad (3)$$

将 $c = -a - 2b$ 代入 (2) 得 $am^2 + 2bm - 2b = 0$ ，即方程 $ax^2 + 2bx - 2b = 0$ 有实根.

故其判别式 $\Delta = 4b^2 + 8ab \geq 0$ 得 $\frac{b}{a} \leq -2$ ，或 $\frac{b}{a} \geq 0$ ， (4)

由 (3)，(4) 得 $0 \leq \frac{b}{a} < 1$ ；

(II) 由 $f'(x) = ax^2 + 2bx + c$ 的判别式 $\Delta' = 4b^2 - 4ac > 0$ ，

知方程 $f'(x) = ax^2 + 2bx + c = 0$ (*) 有两个不等实根，设为 x_1, x_2 ，

又由 $f'(1) = a + 2b + c = 0$ 知， $x_1 = 1$ 为方程 (*) 的一个实根，则由根与系数的关系得

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b}{a}, \quad x_2 = -\frac{2b}{a} - 1 < 0 < x_1,$$

当 $x < x_2$ 或 $x > x_1$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $x_2 < x < x_1$ 时， $f'(x) > 0$ ，

故函数 $f(x)$ 的递增区间为 $[x_2, x_1]$ ，由题设知 $[x_2, x_1] = [s, t]$ ，

因此 $|s - t| = |x_1 - x_2| = 2 + \frac{2b}{a}$ ，由 (I) 知 $0 \leq \frac{b}{a} < 1$ 得

$|s - t|$ 的取值范围为 $[2, 4)$ 。

5. 已知函数 $f(x) = (x - a - 1)e^x$ ：

(I) 若函数的最小值为 -1，求实数 a 的值；

(II) 若 $x_1 > x_2$ ，且有 $x_1 + x_2 = 2a$ ，求证： $f(x_1) > f(x_2)$ 。

[解答]

(I) 定义域为 $\mathbf{R}$ ，

因为 $f'(x) = (x - a)e^x$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得 $x = a$

当 x 变化时， $f'(x)$ ， $f(x)$ 变化如下表：

x	$(-\infty, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $x = a$ 是函数 $f(x)$ 极小值点，也是最小值点，

所以 $f(a) = -e^a = -1$, 解得 $a = 0$;

(II) 由题可知 $x_1 > a$, 并且有 $x_2 = 2a - x_1$,

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - a - 1)e^{x_1} - (a - x_1 - 1)\frac{e^{2a}}{e^{x_1}},$$

$$\text{记 } g(x) = (x - a - 1)e^x - (a - x - 1) \cdot \frac{e^{2a}}{e^x}, x > a,$$

$$g'(x) = (x - a)(e^x - \frac{e^{2a}}{e^x}),$$

当 $x > a$ 时, $e^x > \frac{e^{2a}}{e^x}$, 即 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在区间 $(a, +\infty)$ 上单调递增, $g(x) > g(a) = 0$.

所以有 $f(x_1) > f(x_2)$, 结论成立.

【解析几何】

1. 直线 $x \cos \alpha + \sqrt{3}y + 2 = 0$ 的倾斜角的取值范围是_____.

$$\text{答案: } \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}\pi, \pi\right)$$

2. 已知直线 $x + a^2y + 6 = 0$ 与直线 $(a - 2)x + 3ay + 2a = 0$ 平行, 则 a 的值为 ()

A. 0 或 3 或 -1

B. 0 或 3

C. 3 或 -1

D. 0 或 -1

答案: D

3. 已知直线 $mx + 4y - 2 = 0$ 与 $2x - 5y + n = 0$ 互相垂直, 垂足为 $P(1, p)$, 则 $m - n + p$ 的值是 ()

A. 24

B. 20

C. 0

D. -4

答案: B

4. 已知点 $A(0, 2)$, $B(2, 0)$. 若点 C 在函数 $y = x^2$ 的图象上, 则使得 $\triangle ABC$ 的面积为 2 的点 C 的个数为_____

答案: 4

5. 已知直线 $l_1: mx - y + m = 0$ 与直线 $l_2: x + my - 1 = 0$ 的交点为 Q , 椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的

焦点为 F_1, F_2 ，则 $|QF_1| + |QF_2|$ 的取值范围是

- A. $[2, +\infty)$ B. $[2\sqrt{3}, +\infty)$ C. $[2, 4]$ D. $[2\sqrt{3}, 4]$

答案：D

6. 直线 $x - y - 1 = 0$ 与圆 $C: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = r^2$ 相交于两点 M, N ，若 $|MN| = \sqrt{2}$ ，

则圆 C 的半径 $r =$ _____.

答案：1

7. 已知直线 $l: ax + (a + 1)y + 2 = 0$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = 16$ 相交于 A, B 两点，则 $|AB|$ 的取值

范围是 _____.

答案： $[4\sqrt{2}, 8)$

8. 卵圆是常见的一类曲线，已知一个卵圆 C 的方程为： $\frac{x^2}{x+2} + \frac{y^2}{4} = 1$ ， O 为坐标原点，点

$A(1, 0)$ ，点 P 为卵圆上任意一点，则下列说法中不正确的是

- A. 卵圆 C 关于 x 轴对称 B. 卵圆上不存在两点关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称
C. 线段 PO 长度的取值范围是 $[1, 2]$ D. $\triangle OAP$ 的面积最大值为 1

答案：B

[解答]

卵圆 C 与 y 轴交点为 $(0, -2)$ 、 $(0, 2)$ ，与 x 轴交点为 $(-1, 0)$ 、 $(2, 0)$ （恰好关于 $x = \frac{1}{2}$

对称）（选项 B 错误，也可通过方程求解，设点 $P(m, n)$ ($-1 \leq m \leq 2$)，则 $\frac{m^2}{m+2} + \frac{n^2}{4} = 1$ 。

若存在卵圆 C 上点 Q 与 $P(m, n)$ 关于 $x = \frac{1}{2}$ 对称，则 $Q(1-m, n)$ 在卵圆 C 上，满足方程，

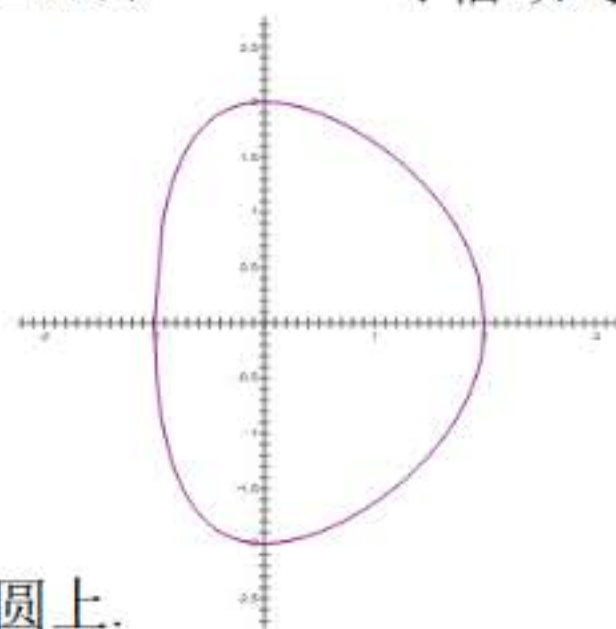
$$\frac{(1-m)^2}{1-m+2} + \frac{n^2}{4} = 1, |PO|^2 = m^2 + n^2 = m^2 + 4(1 - \frac{m^2}{m+2}) \quad (-1 \leq m \leq 2),$$

数求最值.

$$S_{\triangle OAP} = \frac{1}{2} |n| = \sqrt{1 - \frac{m^2}{m+2}} \quad (-1 \leq m \leq 2), \text{ 可求最大值.}$$

9. 已知椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ，梯形 $ABCD$ 的顶点在椭圆上.

(I) 已知梯形 $ABCD$ 的两腰 $AC=BD$ ，且两个底边 AB 和 DC 与坐标轴平行或在坐标轴上.



若梯形一底边 $AB=2$ ，高为 $\sqrt{3}$ ，求梯形 $ABCD$ 的面积；

(II)若梯形 $ABCD$ 的两底 AB 和 DC 与坐标轴不平行且不在坐标轴上，判断该梯形是否可以成为等腰梯形并说明理由.

[解答]

(I) 若两底 AB 和 DC 与 y 轴平行，由椭圆方程得 A, B 为该椭圆的上下顶点，不妨设 DC 在 y 轴右侧，设 $C(\sqrt{3}, y)$ ， $D(\sqrt{3}, -y)$ ，代入椭圆方程解得 $C(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ ， $D(\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ ，

所以梯形另外一底 $CD=1$ ，因此面积 $S = \frac{2+1}{2} \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ；

若两底 AB 和 DC 与 x 轴平行，因为 $AB=2$ ，不妨设 AB 在 x 轴上方，且 $A(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $B(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，

由高为 $\sqrt{3}$ 可得 $C(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $D(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ，但此时四边形 $ABCD$ 为矩形，故舍去.

(II)该梯形不可能为等腰梯形，理由如下：

由题意可知梯形两底所在直线的斜率存在且不为零，设直线 AB 方程为 $y = kx + m_1$ ，直

线 CD 方程为 $y = kx + m_2$ ，其中 $k \neq 0, m_1 \neq m_2$ ，

$$\text{联立方程} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx + m_1, \end{cases} \text{整理得 } (1 + 4k^2)x^2 + 8km_1x + 4m_1^2 - 4 = 0,$$

$$\Delta = (8km_1)^2 - 4(1 + 4k^2)(4m_1^2 - 4) > 0 \quad \text{整理得 } 4k^2 - m_2^2 + 1 > 0 \text{ ①}$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{8km_1}{1 + 4k^2}, y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m_1 = \frac{2m_1}{1 + 4k^2},$$

$$\text{故 } AB \text{ 中点 } M \text{ 坐标为 } M(-\frac{4km_1}{1 + 4k^2}, \frac{m_1}{1 + 4k^2});$$

$$\text{同理可得 } CD \text{ 中点 } N \text{ 坐标为 } N(-\frac{4km_2}{1 + 4k^2}, \frac{m_2}{1 + 4k^2});$$

若梯形 $ABCD$ 为等腰梯形，则有 $AB \perp MN$ ，即 $k \cdot k_{MN} = -1$ ，

$$\text{但 } k_{MN} = \frac{\frac{m_2}{1 + 4k^2} - \frac{m_1}{1 + 4k^2}}{-\frac{4km_2}{1 + 4k^2} + \frac{4km_1}{1 + 4k^2}} = -\frac{1}{4k} \neq -\frac{1}{k}, \text{ 所以梯形 } ABCD \text{ 不可能为等腰梯形.}$$

10. 已知椭圆 $W: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上下顶点分别为 A, B , 且点 $B(0, -1), F_1, F_2$

分别为椭圆 W 的左、右焦点, 且 $\angle F_1BF_2 = 120^\circ$.

(I) 求椭圆 W 的标准方程;

(II) 点 M 是椭圆上异于 A, B 的任意一点, 过点 M 作 $MN \perp y$ 轴于 N , E 为线段 MN 的中点. 直线 AE 与直线 $y = -1$ 交于点 C , G 为线段 BC 的中点, O 为坐标原点. 求 $\angle OEG$ 的大小.

[解答]

(I) 依题意, 得 $b = 1$. 又 $\angle F_1BF_2 = 120^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BF_1O$ 中, $\angle F_1BO = 60^\circ$, 所以 $a = 2$.

所以椭圆 W 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(II) 设 $M(x_0, y_0)$, $x_0 \neq 0$, 则 $N(0, y_0)$, $E(\frac{x_0}{2}, y_0)$.

因为点 M 在椭圆 W 上, 所以 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$. 即 $x_0^2 = 4 - 4y_0^2$.

又 $A(0, 1)$, 所以直线 AE 的方程为 $y - 1 = \frac{2(y_0 - 1)}{x_0}x$.

令 $y = -1$, 得 $C(\frac{x_0}{1 - y_0}, -1)$.

又 $B(0, -1)$, G 为线段 BC 的中点, 所以 $G(\frac{x_0}{2(1 - y_0)}, -1)$.

所以 $\overrightarrow{OE} = (\frac{x_0}{2}, y_0)$, $\overrightarrow{GE} = (\frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{2(1 - y_0)}, y_0 + 1)$.

因为 $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{GE} = \frac{x_0}{2}(\frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{2(1 - y_0)}) + y_0(y_0 + 1)$

$$= \frac{x_0^2}{4} - \frac{x_0^2}{4(1 - y_0)} + y_0^2 + y_0$$

$$= 1 - \frac{4 - 4y_0^2}{4(1 - y_0)} + y_0$$

$$= 1 - y_0 - 1 + y_0 = 0,$$

所以 $\overrightarrow{OE} \perp \overrightarrow{GE}$. $\angle OEG = 90^\circ$.

11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦点在 x 轴，且右焦点到左顶点的距离为 3.

(I) 求椭圆 C 的方程和焦点的坐标；

(II) 与 x 轴不垂直且不重合的直线 l 与椭圆 C 相交于不同的 A, B 两点，直线 l 与 x 轴的交点为 M ，点 M 关于 y 轴的对称点为 N .

(i) 求 $\triangle ABN$ 面积的最大值；

(ii) 当 $\triangle ABN$ 面积取得最大值时，求证： $\sqrt{6} < |AB| < 2\sqrt{2}$.

[解答]

(I) 因为 $\begin{cases} a+c=3 \\ a^2=4 \end{cases}$ ，所以 $a=2, c=1$.

又 $a^2 = b^2 + c^2$ ，所以 $b^2 = 3$.

所以椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，焦点坐标分别为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$.

(II) (i) 方法一：

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), l_{AB}: y = kx + t$,

所以 $M(-\frac{t}{k}, 0), N(\frac{t}{k}, 0)$.

联立 $\begin{cases} y = kx + t, \\ 3x^2 + 4y^2 = 12. \end{cases}$

得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0$.

$x_1 + x_2 = -\frac{8kt}{4k^2 + 3}, x_1x_2 = \frac{4t^2 - 12}{4k^2 + 3}, \Delta = 48(4k^2 - t^2 + 3) > 0$,

即 $t^2 < 4k^2 + 3$.

$|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2-t^2+3}}{4k^2+3}$,

点 N 到直线 AB 的距离为 $d = \frac{|2t|}{\sqrt{1+k^2}}$.

所以 $S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|2t|}{\sqrt{1+k^2}} \cdot \frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}\sqrt{4k^2-t^2+3}}{4k^2+3}$

$= \frac{4\sqrt{3}\sqrt{(4k^2-t^2+3) \cdot t^2}}{4k^2+3}$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{4\sqrt{3} \frac{(4k^2 - t^2 + 3) + t^2}{2}}{4k^2 + 3} \\ &\leq \frac{2\sqrt{3}(4k^2 + 3)}{4k^2 + 3} \\ &= 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

当且仅当 $4k^2 - t^2 + 3 = t^2$ 即 $2t^2 = 4k^2 + 3$ 时等号成立.

$$\begin{aligned} \text{(ii) 因为 } |AB| &= \frac{4\sqrt{3}\sqrt{1+k^2}}{4k^2+3} \cdot \sqrt{\frac{4k^2+3}{2}} \\ &= 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1+k^2}{4k^2+3}} = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4(4k^2+3)}}. \end{aligned}$$

而 $4k^2 + 3 > 3$,

$$\text{所以 } 0 < \frac{1}{4(4k^2+3)} < \frac{1}{12}, \text{ 所以 } \sqrt{6} < |AB| < 2\sqrt{2}.$$

法二:

(i) 设直线 $x = my + t (m \neq 0)$,

所以 $M(t, 0), N(-t, 0)$.

$$\text{联立方程 } \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12, \\ x = my + t. \end{cases}$$

化简得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6mt y + 3t^2 - 12 = 0$.

所以 $\Delta = 48(3m^2 - t^2 + 4) > 0$.

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{-6mt}{3m^2 + 4}, \\ y_1 y_2 = \frac{3t^2 - 12}{3m^2 + 4}. \end{cases}$$

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{1+m^2} \frac{\sqrt{48(3m^2 - t^2 + 4)}}{3m^2 + 4}.$$

$$\text{点 } N \text{ 到 } AB \text{ 的距离为: } d = \frac{|2t|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

$$S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} |AB| d = \frac{4\sqrt{3} |t| \sqrt{3m^2 - t^2 + 4}}{3m^2 + 4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4\sqrt{3}|t|\sqrt{3m^2-t^2+4}}{(|t|^2+(\sqrt{3m^2-t^2+4})^2)} \\
 &\leq \frac{4\sqrt{3}|t|\sqrt{3m^2-t^2+4}}{2|t|(\sqrt{3m^2-t^2+4})} \\
 &= 2\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

当且仅当 $|t|=\sqrt{3m^2-t^2+4}$ ，即 $2t^2=3m^2+4$ 等号成立.

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad |AB| &= \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{\sqrt{48(3m^2-\frac{3m^2+4}{2}+4)}}{3m^2+4} \\
 &= 2\sqrt{6} \sqrt{\frac{1+m^2}{3m^2+4}} \\
 &= 2\sqrt{6} \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3(3m^2+4)}}.
 \end{aligned}$$

因为 $3m^2+4>4$,

所以 $|AB| \in (\sqrt{6}, 2\sqrt{2})$.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID: bj-gaokao）
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯](https://www.gaokzx.com) (ID:bj-gaokao)，获取更多试题资料及排名分析信息。