

数学

本试题卷共 4 页,共 22 题。满分 150 分,考试时间 120 分钟

★ 祝考试顺利 ★

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的学校、班级、姓名、准考证号填写在答题卷指定位置,认真核对与准考证号条形码上的信息是否一致,并将准考证号条形码粘贴在答题卷上的指定位置。
2. 选择题的作答:选出答案后,用 2B 铅笔把答题卷上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。答在试题卷上无效。
3. 非选择题的作答:用黑色墨水的签字笔直接答在答题卷上的每题所对应的答题区域内。答在试题卷上或答题卷指定区域外无效。
4. 考试结束,监考人员将答题卷收回,考生自己保管好试题卷,评讲时带来。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. $\left| \frac{2-i}{1+2i} + 2 \right| =$

- A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

2. 计算机在进行数的计算处理时,使用的是二进制. 一个十进制数 $n (n \in \mathbb{N}^+)$ 可以表示成二进制数 $(a_0 a_1 a_2 \dots a_k)_2, k \in \mathbb{N}$, 即 $n = a_0 \cdot 2^k + a_1 \cdot 2^{k-1} + \dots + a_k \cdot 2^0$, 其中 $a_0 = 1$, 当 $k \geq 1$ 时, $a_k \in \{0, 1\}$. 若记 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_k$ 中 1 的个数为 $f(n)$, 则满足 $k=8$ 且 $f(n)=4$ 的 n 的个数为

- A. 35 B. 28 C. 70 D. 56

3. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{m} = 1$ 的焦距为 6, 则双曲线 C 的焦点到渐近线的距离为

- A. 2 B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{2}$

4. 已知向量 $a = (\lambda, 2), b = (3, 1)$, 若 a 与 b 的夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$, 则实数 λ 的值为

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. 3 D. $\sqrt{3}$

5. 若函数 $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 5$ 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增, 则实数 m 的取值范围为

- A. $(\ln 2, +\infty)$ B. $[\ln 2, +\infty)$ C. $(e^2, +\infty)$ D. $[e^2, +\infty)$

6. 已知曲线 $C: y = x^3 - 3x^2$ 的图象是中心对称图形, 其在点 A 处的切线 l 与直线 $x + 9y = 0$ 相互垂直, 则点 A 到曲线 C 的对称中心的距离为

- A. $4\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

7. 已知 $\left(\frac{1}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}} - \tan \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \left[1 + \tan(\alpha-\beta) \tan \frac{\alpha-\beta}{2}\right] = 6$, $\sin \alpha \cos \beta = 3 \cos \alpha \sin \beta$, 则 $\sin \alpha \cos \beta =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x}{16}, & x \leq 4, \\ x^2 - 32x + 113, & x > 4, \end{cases}$ 则对于任意正数 λ , 下列说法一定正确的是

- A. $f(\ln \lambda) \geq f(\lambda - 1)$ B. $f(\ln \lambda) \leq f(\lambda - 1)$
C. $f(2^\lambda) \geq f(\lambda^2)$ D. $f(2^\lambda) \leq f(\lambda^2)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知集合 $M = \left\{x \mid \frac{x-2}{x+3} < 0\right\}$, $N = \{x \mid -1 < x < 5\}$, 则下列说法正确的是

- A. $M \cap N = \{x \mid -1 < x < 2\}$ B. $\complement_{\mathbb{R}} M = \{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 2\}$
C. $M \cup N = \{x \mid -3 < x < 5\}$ D. $M \cap (\complement_{\mathbb{R}} N) = \{x \mid -3 < x < -1\}$

10. 已知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是线段 A_1D 的中点, 则下列说法错误的是

- A. 直线 EB 与直线 B_1C 所成的角为 60° B. 直线 EB 与直线 C_1D_1 异面
C. 点 $E \notin$ 平面 ABC_1 D. 直线 $EB \parallel$ 平面 B_1D_1C

11. 已知圆 C 过点 $(4, 2)$, $(2, 0)$, $(6, 0)$, 点 M 在线段 $y = x (0 \leq x \leq 4)$ 上, 过点 M 作圆 C 的两条切线, 切点分别为 A, B , 以 AB 为直径作圆 C' , 则下列说法正确的是

- A. 圆 C 的方程为 $(x-4)^2 + y^2 = 2$, B. 四边形 $ACBM$ 面积的最小值为 4
C. 圆 C' 的面积的最小值为 π D. 圆 C' 的面积的最大值为 3π

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , $M(x_1, y_1)$, $N(-x_1, -y_1)$ 在椭圆 C 上但不在坐标轴上, 若 $\overrightarrow{FM} = 2\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FN} = 2\overrightarrow{FB}$, 且 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 则椭圆 C 的离心率的值可以是

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{9}{10}$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 某公司定期对流水线上的产品进行质量检测, 以此来判定产品是否合格可用. 已知某批产品的质量指标 X 服从正态分布 $N(15, 9)$, 其中 $X \in [6, 18]$ 的产品为“可用产品”, 则在这批产品中任取 1 件, 抽到“可用产品”的概率约为_____.

参考数据: 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

14. 已知某圆台的上、下底面积分别为 $4\pi, 36\pi$, 母线长为 5, 则该圆台的体积为_____.

15. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \cos \omega x (\omega > 0)$ 的图象在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上有且仅有 3 条对称轴, 则实数 ω 的取值范围为_____.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: 当 n 为奇数时, $a_n = \frac{(\sqrt{\lambda})^{n-1}}{n}$, 其中 $(5\lambda-7)(3\lambda-5) < 0$, 且 $\sum_{i=1}^n \frac{4i}{a_{2i}} = 3n^2 + n$, 则当 a_n 取得最小值时, $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

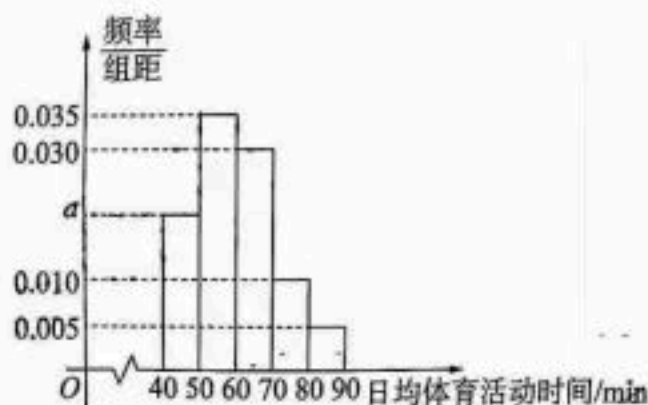
已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $C = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{c}{2\cos B + 1}$.

(1) 求 B 的值;

(2) 已知点 M 在线段 AB 上, 且 $\frac{AB}{AM} = 3$, 求 $\cos 2\angle BCM$ 的值.

18. (12 分)

近年来, 中学生的体质健康情况成了网络上的一个热门话题, 各地教育部门也采取了相关的措施, 旨在提升中学生的体质健康, 其中一项便是增加中学生一天中的体育活动时间. 某地区中学生的日均体育活动时间均落在区间 $[40, 90]$ 内, 为了了解该地区中学生的日均体育活动时间, 研究人员随机抽取了若干名中学生进行调查, 所得数据统计如下图所示.



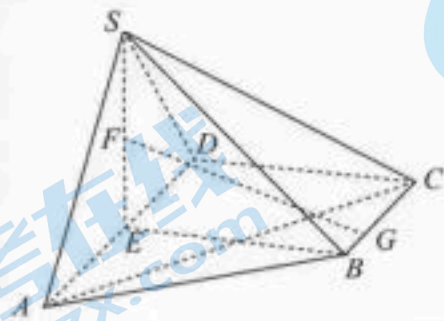
(1) 求 a 的值以及该地区中学生日均体育活动时间的平均数;

(2) 现按比例进行分层抽样, 从日均体育活动时间在 $[70, 80]$ 和 $[80, 90]$ 的中学生中抽取 12 人, 再从这 12 人中随机抽取 3 人, 求至多有 1 人体育活动时间超过 80 min 的概率;

(3) 以频率估计概率, 若在该地区所有中学生中随机抽取 4 人, 记日均体育活动时间在 $[60, 80]$ 的人数为 X , 求 X 的分布列以及数学期望.

19. (12 分)

如图所示, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle ADC = \angle BCD = 90^\circ$, $SA = SD = SB$, 点 E 为线段 AD 的中点, 且 $AD = SE = 2BC = 2CD$.



(1) 求证: $SE \perp AC$;

(2) 已知点 F 为线段 SE 的中点, 点 G 在线段 BC 上 (不含端点位置), 若直线 FG 与平面 SAB 所成的角的正切值为 $\frac{\sqrt{26}}{26}$, 求 $\frac{BG}{BC}$ 的值.

20. (12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 其中 $S_n = 2a_n + \lambda$, $S_3 = 14$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = (3n-10) \cdot a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

21. (12分)

已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 直线 l_1 过点 F 且与抛物线 C 交于 M, N 两点, 直线 l_2 过点 F 且与抛物线 C 交于 P, Q 两点.

(1) 若点 $A(3, 0)$, 且 $\triangle AMN$ 的面积为 $4\sqrt{5}$, 求直线 l_1 的斜率;

(2) 若点 M, Q 在第 r 象限, 直线 MP 过点 $(\lambda, 0)$, 比较 $\frac{S_{\triangle MPF}}{S_{\triangle NQF}} + \frac{1}{4}$ 与 λ 的大小关系, 并说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln x + mx + \frac{m}{x}$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 已知 $k \in \mathbb{N}^*$, 若 $\forall a, b \in (0, +\infty)$, 当 $a > b$ 时, $\frac{2k(a-b)}{2\sqrt{ab}+a+b} + ma + f(b) + \frac{m}{a} < f(a) + \frac{m}{b} + mb$ 恒成立, 求 k 的最大值.