2024 届高三数学试题参考答案（理科）

1.C　因为 $B=\left\{x\left|x^2-3x+2<0\right.\right\}=(1,2)$，$A\cap B\neq\varnothing$，所以 $a\in(1,2)$.

2.B　因为 $a+b=1\quad 2\sqrt{ab}$，所以 $ab\quad\dfrac{1}{4}$.若 $ab\quad\dfrac{1}{4}$，$a+b$ 不一定等于 1，故“$a+b=1$”是“$ab\quad\dfrac{1}{4}$”的充分不必要条件.

3.A　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=2^0+m=0$，解得 $m=-1$，则 $f(-3)=-f(3)=-10$.

4.C　由图可知，$10\times(0.006+0.012+0.02+0.032+0.02+m)=1$，解得 $m=0.01$，则成绩在 $[90,100)$ 的频率为 0.1，由 $0.1n=10$，得 $n=100$.

5.A　执行第一次循环，$b=2$，$a=3$，$n=2$，

$$\left|\frac{b}{a}-0.618\right|=\left|\frac{2}{3}-0.618\right|>0.01;$$

执行第二次循环，$b=5$，$a=8$，$n=3$，

$$\left|\frac{b}{a}-0.618\right|=\left|\frac{5}{8}-0.618\right|=0.007<0.01$$，此时输出 $n=3$.

6.B　设 $\{a_n\}$ 的公比为 q.因为 $\dfrac{a_5-a_1}{a_3-a_1}=3$，所以 $a_1\left(q^4-1\right)=3a_1\left(q^2-1\right)$，且 $a_1\left(q^2-1\right)\neq 0$，解得 $q^2=2$，

则 $\dfrac{a_{10}-a_2}{a_6+a_2}=\dfrac{q^8-1}{q^4+1}=q^4-1=3$.

7.C　不同的摆放方法有 6 种，其中《论语》《诗经》两本书不相邻的情况有 2 种，分别为{《论语》,《孟子》,《诗经》}，{《诗经》,《孟子》,《论语》}.故《论语》《诗经》两本书相邻的概率为 $1-\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$.

8.D　由 $y=\mathrm{e}^{f'(x)}$ 的图象知，当 $x\in(-\infty,a)$ 时，$\mathrm{e}^{f'(x)}<1$，则 $f'(x)<0$，当 $x\in(a,d)$ 时，$\mathrm{e}^{f'(x)}\quad 1$，则 $f'(x)>0$，当 $x\in(d,+\infty)$ 时，$\mathrm{e}^{f'(x)}<1$，则 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 的单调递增区间为 (a,d)，单调递减区间为 $(-\infty,a)$ 和 $(d,+\infty)$，故 $f(x)$ 的极大值点为 d.

9.D　取 BC 的中点 O（图略），

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+\left|\overrightarrow{PB}\right|^2+\left|\overrightarrow{PC}\right|^2=\overrightarrow{PA}^2+\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=3\overrightarrow{PA}^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2$$

$$=3\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$=3\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+4\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AO}+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$$=-\frac{4}{3}\left|\overrightarrow{AO}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$$

$=\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{20}{3}$.

10.B　因为经过 $10\mathrm{h}$ 过滤后减少了 20% 的污染物，所以 $P_0\mathrm{e}^{-10k}=80\%P_0$，解得 $k=-\frac{\ln0.8}{10}$.当 $P(t)=10\%P_0$ 时，$10\%P_0=P_0\mathrm{e}^{\frac{\ln0.8}{10}t}$，解得 $t=-\frac{10\ln10}{\ln0.8}=\frac{-10-10\log_2 5}{2-\log_2 5}\approx103$.故还需要大约 93h.

11.C　由题意可得 $PC=20\sin\alpha$ 米，$OC=20\cos\alpha$ 米，$PD=20\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)$ 米，$OD=20\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)$ 米，则儿童娱乐设施建筑用地面积 $S=S_{\triangle OPC}+S_{\triangle OPD}=200\sin\alpha\cos\alpha+200\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)$

$=100\sin2\alpha+100\sin\left(\frac{5\pi}{6}-2\alpha\right)=\left(100+50\sqrt{3}\right)\sin2\alpha+50\cos2\alpha=50\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)$. 因为 $0<\alpha<\frac{5\pi}{12}$，所以 $0<2\alpha<\frac{5\pi}{6}$，所以 $\frac{\pi}{12}<2\alpha+\frac{\pi}{12}<\frac{11\pi}{12}$，所以 $50<S\ \ 50\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$，则儿童娱乐设施建筑用地面积的最大值为 $50\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ 平方米.

12.C　因为 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}=\frac{6a_n+t}{a_n+3}>0$ 恒成立，即 $t>-6a_n$ 恒成立.因为 $0<a_1<1$，所以 $t\ \ 0$.因为 $a_{n+1}=\frac{6a_n+t}{a_n+3}<5$ 恒成立，所以 $t<15-a_n$ 恒成立.因为 $a_n<5$，所以 $t\ \ 15-5=10$.当 $t\in[0,10]$ 时，$a_{n+1}-a_n=\frac{-a_n^2+3a_n+t}{a_n+3}>0$ 在 $(0,5)$ 上有解，故 t 的取值范围是 $[0,10]$.

13.-11　因为 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以 $3(x+3)+4\times(2+4)=0$，解得 $x=-11$.

14.-1　作出可行域（图略），当直线 $y=-x+z$ 经过点 $(-1,0)$ 时，z 取得最小值，且最小值为 -1.

15.$\left[\frac{11}{6},\frac{19}{6}\right)$　由 $f(x)=0$，得 $\sin\omega x=-\frac{1}{2}$，由 $0\ \ x\ \ \pi$，得 $0\ \ \omega x\ \ \omega\pi$.因为 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有 2 个零点，所以 $\frac{11\pi}{6}\ \ \omega\pi<\frac{19\pi}{6}$，解得 $\frac{11}{6}\ \ \omega<\frac{19}{6}$.

16.$[1,+\infty)$　解法一：由题知 $\mathrm{e}^{ax-1}\ \ \frac{1}{a}\ln x+\frac{1}{a}$ 恒成立.函数 $y=\mathrm{e}^{ax-1}$ 与函数 $y=\frac{1}{a}\ln x+\frac{1}{a}$ 互为反函数，由反函数图象的性质，可得 $y=\mathrm{e}^{ax-1}\ \ x$ 恒成立，即 $a\ \ \frac{1+\ln x}{x}$.令函数 $h(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，则 $h'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$.当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. $h(x)_{\max}=h(1)=1$，

$a \quad 1$.故 a 的取值范围是 $\left[1,+\infty\right)$.

解法二：由 $\mathrm{e}^{ax-1} \quad \frac{1}{a}\ln x+\frac{1}{a}$，可得 $a>0$，则 $\mathrm{e}^{\ln a+ax-1}+\ln a+ax-1 \quad \mathrm{e}^{\ln a+\ln x}+\ln a+\ln x$.令函数 $g\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+x$，则 $g\left(\ln a+ax-1\right) \quad g\left(\ln a+\ln x\right)$.因为 $g\left(x\right)$ 是增函数，所以 $\ln a+ax-1 \quad \ln a+\ln x$，即 $a \quad \frac{1+\ln x}{x}$.后续步骤同解法一.

17.解：（1）当 $n=1$ 时，由 $S_1+4=2a_1$，得 $a_1=4$，

当 $n \quad 2$ 时，因为 $S_n+4=2a_n$，所以 $S_{n-1}+4=2a_{n-1}$，

则 $a_n=2a_n-2a_{n-1}$，即 $a_n=2a_{n-1}$，

故 $\left\{a_n\right\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，

从而 $a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$

（2）由（1）可知 $\frac{2n+1}{a_n}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$

则 $T_n=\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots+\frac{2n+1}{2^{n+1}}$

$\frac{T_n}{2}=\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\frac{7}{2^5}+\cdots+\frac{2n+1}{2^{n+2}}$

则 $\frac{T_n}{2}=\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{2n+1}{2^{n+2}}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{2n+1}{2^{n+2}}=\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{2^{n+2}}$ 分

则 $T_n=\frac{5}{2}-\frac{2n+5}{2^{n+1}}$

18.（1）证明：因为 $PB\perp$ 平面 ABC， $AC\subset$ 平面 ABC，

所以 $PB\perp AC$

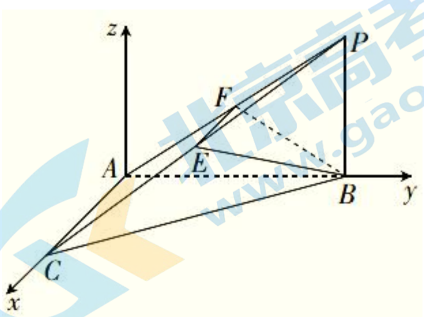
又 $AB\perp AC$， $PB\cap AB=B$，所以 $AC\perp$ 平面 PAB

因为 E， F 分别为 PC， PA 的中点，所以 $EF\,/\!/\,AC$，

则 $EF\perp$ 平面 PAB，

因为 $EF\subset$ 平面 BEF，所以平面 $BEF\perp$ 平面 PAB.

（2）解：以 A 为坐标原点， AC， AB 所在直线分别为 x 轴， y 轴建立如图所示的空间直角坐标系.



由 $AB\perp AC$，$AB=3\sqrt{3}$，$BC=6$，得 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=3$，

则 $B\left(0,3\sqrt{3},0\right)$，$P\left(0,3\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$，$E\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$，$F\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$，

$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{3}{2},0,0\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$.

设平面 BEF 的法向量为 $\vec{m}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}x_1-\frac{3\sqrt{3}}{2}y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ -\frac{3}{2}x_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=2$，得 $\vec{m}=\left(0,2,3\right)$.

设平面 PBE 的法向量为 $\vec{n}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}x_2-\frac{3\sqrt{3}}{2}y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ 2\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$

令 $y_2=1$，得 $\vec{n}=\left(\sqrt{3},1,0\right)$.

$\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{2}{2\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$，

即平面 BEF 与平面 PEB 所成锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

19.解：（1）由题可知，甲、乙两人兑换同一种商品的概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{36}$

（2）由题可知，兑换 A，B，C 三种商品所需的积分分别为 800，900，1000，

则 X 的取值可能为 0，100，200，300，400，

且 $P\left(X=0\right)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$，

$P\left(X=100\right)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{36}$，

$P\left(X=200\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{36}$，

$P\left(X=300\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$P\left(X=400\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

则 X 的分布列为

X	0	100	200	300	400
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$EX=0\times\frac{1}{18}+100\times\frac{5}{36}+200\times\frac{11}{36}+300\times\frac{1}{4}+400\times\frac{1}{4}=250$.

20.解：（1）由题可知 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2,\\ \frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}=\frac{17}{4}(a>b>0),\\ 2c=2\sqrt{3},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1,\end{cases}$

故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）设 l 的方程为 $y=k(x-4)(k<0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

联立方程组 $\begin{cases}y=k(x-4),\\ x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$ 整理得 $(1+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$

则 $\Delta=(-32k^2)^2-4(1+4k^2)(64k^2-4)=16-192k^2>0$，得 $k^2<\frac{1}{12}$，

$x_1+x_2=\frac{32k^2}{1+4k^2}$.

设 $G(x_0,y_0)$，因为 $A(0,-1)$，所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{3}$，$y_0=\frac{y_1+y_2-1}{3}$

所以 $k_{OG}=\frac{y_1+y_2-1}{x_1+x_2}=\frac{k(x_1+x_2)-8k-1}{x_1+x_2}=k-\frac{8k+1}{\frac{32k^2}{1+4k^2}}=-\frac{1}{32}\left(\frac{1}{k^2}+\frac{8}{k}+4\right)$

$=-\frac{1}{32}\left(\frac{1}{k}+4\right)^2+\frac{3}{8}$，当 $\frac{1}{k}=-4$，即 $k=-\frac{1}{4}$（满足 $k^2<\frac{1}{12}$）时，k_{OG} 取得最大值，且最大值为 $\frac{3}{8}$.

21.解：（1）因为 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x+2ax$

由 $f(1)=\mathrm{e}+a$，$f'(1)=\mathrm{e}+2a$，得曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(\mathrm{e}+a)=(\mathrm{e}+2a)(x-1)$.

因为该切线经过坐标原点，所以 $0-(\mathrm{e}+a)=(\mathrm{e}+2a)\times(0-1)$，解得 $a=0$.

（2）令 $g(x)=f(x)-x-1=\mathrm{e}^x+ax^2-x-1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x+2ax-1$.

令 $h(x)=\mathrm{e}^{x}+2ax-1$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^{x}+2a$.

若 $a \geqslant 0$，则 $h'(x)>0$ 恒成立，$h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h(0)=0$，所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)=h(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)=h(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

则 $g(x)_{\min}=g(0)$，

即方程 $f(x)=x+1$ 有且仅有 1 个实数根，不符合题意.

若 $a<0$，则由 $h'(x)=0$，解得 $x=\ln(-2a)$，

当 $x\in(-\infty,\ln(-2a))$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

则 $h(x)_{\min}=h(\ln(-2a))=-2a+2a\ln(-2a)-1$.

令 $\varphi(x)=-2x+2x\ln(-2x)-1$，$x<0$，则 $\varphi'(x)=-2+2\ln(-2x)+2=2\ln(-2x)$，

当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减，

则 $\varphi(x)_{\max}=\varphi\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$.

若 $a=-\dfrac{1}{2}$，则 $g'(x)=h(x) \geqslant 0$ 恒成立，

则 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，$g(x)$ 不可能有两个零点，

即方程 $f(x)=x+1$ 不可能有 2 个不同的实数根，不符合题意.

若 $a<-\dfrac{1}{2}$，则 $\ln(-2a)>0$，$h(\ln(-2a))<0$，显然当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，故 $\exists x_0\in(\ln(-2a),+\infty)$，$h(x_0)=0$.

又 $h(0)=0$，所以当 $x\in(-\infty,0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)=h(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)=h(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

因为 $g(0)=0$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，所以 $\exists x_1\in(x_0,+\infty)$，$g(x_1)=0$

则 $g(x)$ 恰有 2 个零点，即方程 $f(x)=x+1$ 恰有 2 个不同的实数根，符合题意.

若 $-\dfrac{1}{2}<a<0$，则 $\ln(-2a)<0$，$h(\ln(-2a))<0$，显然当 $x\to-\infty$ 时，$h(x)\to+\infty$，故 $\exists x_2\in(-\infty,\ln(-2a))$，

$h(x_2)=0$.

又 $h(0)=0$，所以当 $x\in(-\infty,x_2)$ 和 $(0,+\infty)$ 时，$g'(x)=h(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(x_2,0)$ 时，$g'(x)=h(x)<0$，$g(x)$ 单调递减.

因为 $g(0)=0$，当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，所以 $\exists x_3\in(-\infty,x_2)$，$g(x_3)=0$，

则 $g(x)$ 恰有 2 个零点，即方程 $f(x)=x+1$ 恰有 2 个不同的实数根，符合题意.

综上所述，a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

22.解：（1）由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，

可得圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-6\rho\cos\theta-7=0$

（2）在（1）中建立的极坐标系中，直线 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$

设 A，B 所对应的极径分别为 ρ_1，ρ_2

将 l 的极坐标方程代入 C 的极坐标方程得 $\rho^2-6\rho\cos\alpha-7=0$，

所以 $\rho_1+\rho_2=6\cos\alpha$，$\rho_1\rho_2=-7$

$|AB|=|\rho_1-\rho_2|=\sqrt{(\rho_1+\rho_2)^2-4\rho_1\rho_2}=\sqrt{36\cos^2\alpha+28}=6$，

解得 $\cos^2\alpha=\dfrac{2}{9}$，$\tan\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

所以 l 的斜率为 $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

23.解：（1）若 $a=4$，则 $f(x)=|x-1|-|2x-4|$.

当 $x\ \ 1$ 时，由 $-x+1+2x-4\ \ 0$，解得 $x\ \ 3$，所以 $x\ \ 1$.

当 $1<x<2$ 时，$x-1+2x-4\ \ 0$，解得 $x\ \ \dfrac{5}{3}$，所以 $1<x\ \ \dfrac{5}{3}$.

当 $x\ \ 2$ 时，由 $x-1-2x+4\ \ 0$，解得 $x\ \ 3$，所以 $x\ \ 3$.

综上，不等式 $f(x)\quad 0$ 的解集为 $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]\cup[3,+\infty)$.

（2）因为 $f(x)=|x-1|-|2x-a|=\begin{cases}x+1-a, x\quad 1,\\3x-1-a, 1<x<\frac{a}{2},\\-x-1+a, x\quad \frac{a}{2},\end{cases}$

所以 $f(x)$ 的图象与 x 轴围成的三角形的三个顶点分别为 $A\left(\frac{1+a}{3},0\right)$，$B(a-1,0)$，$C\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}-1\right)$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\left(a-1-\frac{1+a}{3}\right)\times\left(\frac{a}{2}-1\right)=\frac{1}{6}$，

解得 $a=3$ 或 $a=1$（舍去）.故 $a=3$.