

延庆区高三模拟考试试卷

数学 2021.3

本试卷共 6 页，满分 150 分，考试时长 120 分钟

第 I 卷（选择题）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 1\}$ ，则 $(\complement_U A) \cup B =$

- (A) $\{-1\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{-1, 2, 3\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 3\}$

2. 已知 $\{a_n\}$ 为无穷等比数列，且公比 $0 < q < 1$ ，记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则下面结论正确的是

- (A) $a_3 < a_2$ (B) $a_1 \times a_2 > 0$ (C) $\{a_n\}$ 是递减数列 (D) S_n 存在最小值

3. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点，过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点，若 $|AB| = 8$ ，则线段 AB 的中点 M 的横坐标为

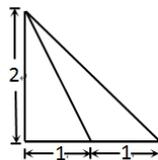
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

4. 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x^2 - 5x + 6 < 0$ ”是“ $|x - 2| < 1$ ”的

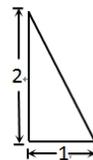
- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
(C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

5. 某四棱锥的三视图如图所示，其中正(主)视图是等腰直角三角形，侧(左)视图是直角三角形，俯视图是直角梯形，则该四棱锥的体积是

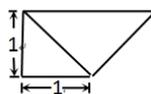
- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4



正(主)视图



侧(左)视图



俯视图

高三数学第 1 页 (共 6 页)

6. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的方程为 $y = k(x+1) + 3$, 以点 $(1,1)$ 为圆心且与直线 l 相切的所有圆中, 半径最大的圆的半径为

- (A) 2 (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4 (D) 8

7. 已知定义在 R 上的幂函数 $f(x) = x^m$ (m 为实数) 过点 $A(2,8)$, 记 $a = f(\log_{0.5} 3)$,

$b = f(\log_2 5)$, $c = f(m)$, 则 a, b, c 的大小关系为

- (A) $a < b < c$ (B) $a < c < b$ (C) $c < a < b$ (D) $c < b < a$

8. 设 D 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CD}$, 则

(A) $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ (B) $\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (D) $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1, & x \leq 0, \\ -x^2+2x+1, & x > 0, \end{cases}$ 则不等式 $f(x) - 2^x > 0$ 的解集是

- (A) $(-1,0) \cup (0,1)$ (B) $(-1,1)$ (C) $(0,1)$ (D) $(-1,+\infty)$

10. 酒驾是严重危害交通安全的违法行为. 根据规定: 驾驶员的 100mL 血液中酒精含量为 $[0, 20)\text{mg}$, 不构成饮酒驾车行为 (不违法), 达到 $[20, 80)\text{mg}$ 的即为酒后驾车, 80mg 及以上为醉酒驾车. 某驾驶员喝了一定量的酒后, 其血液中的酒精含量上升到了 1.6mg/mL , 若在停止喝酒后, 他血液中酒精含量每小时减少 20% , 要想不构成酒驾行为, 那么他至少经过

(参考数据: $0.8^4 = 0.41$, $0.8^6 = 0.26$, $0.8^8 = 0.17$, $0.8^{10} = 0.11$)

- (A) 4 小时 (B) 6 小时 (C) 8 小时 (D) 10 小时

第 II 卷（非选择题）

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 若复数 $z = (1-2i)(a+i)$ (i 为虚数单位) 是纯虚数, 则 $a =$ _____.

12. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(2, \sqrt{3})$, 则双曲线的离心率为 _____.

13. 在二项式 $(\sqrt{2} + x)^7$ 的展开式中, 系数为有理数的项的个数是 _____.

14. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, $AB = 2, \angle B = \frac{\pi}{3}$, 则 $\frac{\sin B}{\sin C} =$ _____.

15. 同学们, 你们是否注意到: 自然下垂的铁链; 空旷的田野上, 两根电线杆之间的电线; 峡谷的上空, 横跨深涧的观光索道的钢索. 这些现象中都有相似的曲线形态. 事实上, 这些曲线在数学上常常被称为悬链线. 悬链线的相关理论在工程、航海、光学等方面有广泛的应用. 在恰当的坐标系中, 这类函数的表达式可以为 $f(x) = ae^x + be^{-x}$ (其中 a, b 是非零常数, 无理数 $e = 2.71828 \dots$), 对于函数 $f(x)$ 以下结论正确的是.

①如果 $a = b$, 那么函数 $f(x)$ 为奇函数;

②如果 $ab < 0$, 那么 $f(x)$ 为单调函数;

③如果 $ab > 0$, 那么函数 $f(x)$ 没有零点;

④如果 $ab = 1$, 那么函数 $f(x)$ 的最小值为 2.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2a \sin^2 x + a$ ($a > 0$), 再从条件①, 条件②中选择一个作为已知, 求:

(I) a 的值;

(II) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 的单调增区间.

条件①: $f(x)$ 的最大值为 2; 条件②: $f(\frac{\pi}{2}) = -1$.

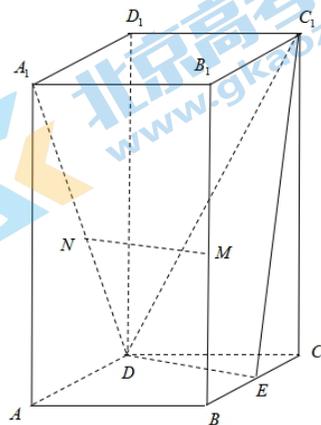
注: 如果选择条件①和条件②分别解答, 按第一个解答计分.

17. (本小题共 14 分)

如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形, 侧面 ADD_1A_1 为矩形, 且侧面 $ADD_1A_1 \perp$ 底面 $ABCD$, $AA_1 = 4$, E, M, N 分别是 BC, BB_1, A_1D 的中点.

(I) 求证: $MN \parallel$ 平面 C_1DE ;

(II) 求二面角 $D - C_1E - B_1$ 的余弦值.



18. (本小题共 14 分)

2022 年第 24 届冬季奥林匹克运动会，简称“北京张家口冬奥会”，将在 2022 年 02 月 04 日~2022 年 02 月 20 日在北京市和张家口市联合举行，这是中国历史上第一次举办冬季奥运会，北京将承办所有冰上项目，延庆和张家口将承办所有的雪上项目。下表是截取了 2 月 5 日和 2 月 6 日两天的赛程表：

2022 年北京冬奥会赛程表 (第七版, 发布自 2020 年 11 月)																
2022 年 2 月	北京赛区					延庆赛区				张家口赛区					当日 决 赛 数	
	开 闭 幕 式	冰 壶	冰 球	速 度 滑 冰	短 道 速 滑	花 样 滑 冰	高 山 滑 雪	有 舵 雪 橇	钢 架 雪 车	无 舵 雪 橇	跳 台 滑 雪	北 欧 两 项	越 野 滑 雪	单 板 滑 雪		冬 季 两 项
5(六)		*	*	1	1				*	1		1	*	1	1	6
6(日)		*	*	1		*	1		1	1		1	1		1	7

说明：“*”代表当日有不是决赛的比赛；数字代表当日有相应数量的决赛。

- (I) (i)若在这两天每天随机观看一个比赛项目，求恰好看到冰壶和冰球的概率；
(ii)若在这两天每天随机观看一场决赛，求两场决赛恰好在同一赛区的概率；
- (II) 若在 2 月 6 日 (星期日) 的所有决赛中观看三场，记 X 为赛区的个数，求 X 的分布列及期望 $E(X)$ 。

19. (本小题共 15 分)

已知函数 $f(x) = -\ln x + 2x - 2$ 。

高三数学第 5 页 (共 6 页)

(I) 求曲线 $y = f(x)$ 的斜率等于 1 的切线方程;

(II) 求函数 $f(x)$ 的极值;

(III) 设 $g(x) = x^2 f(x) - 2f(x)$, 判断函数 $g(x)$ 的零点个数, 并说明理由.

20. (本小题共 15 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 设 AB 是经过椭圆右焦点 F 的一条弦 (不经过点 P 且 A 在 B 的上方), 直线 AB 与直线 $x = 2$ 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 将 k_1, k_2, k_3 如何排列能构成一个等差数列, 证明你的结论.

21. (本小题共 14 分)

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足: $\exists m \in \mathbf{N}^*$, 对于 $\forall n \geq n_0 (n_0 \in \mathbf{N}^*)$, 都有 $\frac{a_{n+m}}{a_n} = q$ (其中 q 为常数), 则称 $\{a_n\}$ 具有性质 “ $Q(m, n_0, q)$ ”.

(I) 若 $\{a_n\}$ 具有性质 “ $Q(3, 2, 2)$ ”, 且 $a_2 = a_4 = 2, a_6 + a_7 + a_8 = 18$, 求 a_3 ;

(II) 若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, $b_3 = c_3 = 4$, $b_1 + c_1 = c_2, a_n = b_n + c_n$, 判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质 “ $Q(2, 1, 2)$ ”, 并说明理由;

(III) 设 $\{a_n\}$ 既具有性质 “ $Q(i, 1, q_1)$ ”, 又具有性质 “ $Q(j, 1, q_2)$ ”, 其中 $i, j \in \mathbf{N}^*, i < j$,

求证: $\{a_n\}$ 具有性质 “ $Q(j-i, i+1, q_2^{\frac{j-i}{i}})$ ”.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

延庆区 2020—2021 学年度高三数学模拟试卷参考答案

阅卷须知:

1.评分参考中所注分数，表示考生正确做到此步应得的累加分数。

2.其它正确解法可以参照评分标准按相应步骤给分。

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	B	A	A	B	A	B	A	D

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

题号	11	12	13	14	15
答案	-2	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	4	$\sqrt{3}$	②③

注：第 15 题全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。

16 解：（I）选择①：因为 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + a \cdot \cos 2x$ ……………2 分

所以 $f(x) = \sqrt{3+a^2} \sin(2x + \varphi)$ ，其中 $\tan \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ，……………3 分

所以 $\sqrt{3+a^2} = 2$ ，又因为 $a > 0$ ，所以 $a = 1$ 。……………5 分

选择②： $f(\frac{\pi}{2}) = 2\sqrt{3} \times 1 \times 0 + a - a \times 2 \times 1 = -a = -1$ ，所以 $a = 1$ 。……………5 分

（① $\tan \varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}$ 不写不扣分，②每个值计算正确各给一分）

(II) 因为 $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 7分

所以 $g(x) = 2 \sin[2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6})$ 9分

则 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z$ 11分

$k\pi - \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in Z$ 12分

所以函数 $g(x)$ 的单调增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{3}](k \in Z)$ 13分

(一个 $k \in Z$ 都没写的扣一分)

17. (I) 证明: 连结 B_1C, ME . 因为 M, E 分别为 BB_1, BC 的中点, 所以 $ME \parallel B_1C$,

且 $ME = \frac{1}{2} B_1C$. 又因为 N 为 A_1D 的中点, 所以 $ND = \frac{1}{2} A_1D$ 2分

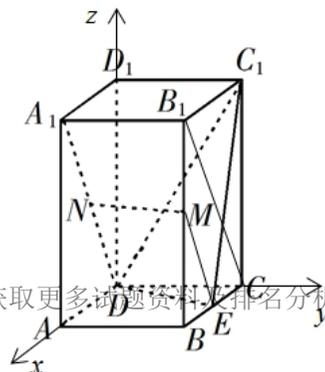
由题设知 $A_1B_1 \parallel DC$, 可得 $B_1C \parallel A_1D$, 故 $ME \parallel ND$, 因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形, $MN \parallel ED$. 又 $MN \notin$ 平面 C_1DE , 所以 $MN \parallel$ 平面 C_1DE 5分

(II) 因为底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $CD \perp AD$, 又因为侧面 $ADD_1A_1 \perp$ 底面 $ABCD$,

且侧面 $ADD_1A_1 \cap$ 底面 $ABCD = AD$, 所以 $CD \perp$ 平面 ADD_1A_1 , 所以 $CD \perp DD_1$,

$AD \perp DD_1$, 又因为侧面 ADD_1A_1 为矩形, 所以

$AD \perp DD_1$, 如图建立空间直角坐标系



$D - xyz$,7分

其中 $D(0,0,0)$, $C_1(0,2,4)$, $E(1,2,0)$, $C(0,2,0)$, 且 $\overline{DC_1} = (0,2,4)$,

$\overline{DE} = (1,2,0)$,8分

因为 $CD \perp$ 平面 ADD_1A_1 , 所以 $DC \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

故 $\overline{DC} = (0,2,0)$ 为平面 C_1EB_1 的一个法向量, ...10分

设 $\vec{n}(x,y,z)$ 为平面 DC_1E 的法向量, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{DC_1} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overline{DE} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2y + 4z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$, 不妨设 $y = -2$, 可得 $\vec{n} = (4, -2, 1)$12分

所以 $\cos \langle \overline{DC}, \vec{n} \rangle = \frac{\overline{DC} \cdot \vec{n}}{|\overline{DC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{-4}{2 \times \sqrt{21}} = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$,13分

因为二面角 $A-DE-B_1$ 的平面角是钝角, 所以二面角 $A-DE-B_1$ 的余弦值 $-\frac{2\sqrt{21}}{21}$.

.....14分

18. 解：（I）（i）记“在这两天每天随机观看一个项目，恰好看到冰壶冰球”为事件 A 。由表可知，在这两天每天随机观看一个项目，共有 $10 \times 10 = 100$ 种不同方法，其中恰好看到冰壶冰球，共有 2 种不同方法。所以， $P(A) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ 。...3 分

（ii）记“在这两天每天随机观看一场决赛，两场决赛恰好在同一赛区”为事件 B 。由表可知，在这两天每天随机观看一场决赛共有 $6 \times 7 = 42$ 种不同方法，其中两场决赛恰好在北京赛区共有 2 种不同方法，在张家口赛区共有 $4 \times 4 = 16$ 。所以 $P(B) = \frac{2+16}{42} = \frac{3}{7}$ 。6

分

（II）随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3。...7 分

根据题意， $P(X=1) = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}$ ，...9 分

$$P(X=2) = \frac{C_1^1 \cdot C_2^2 + C_1^1 \cdot C_4^2 + C_2^1 C_4^2 + C_2^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{1+6+12+4}{35} = \frac{23}{35}$$
，...11 分

$$P(X=3) = \frac{C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_4^1}{C_7^3} = \frac{8}{35}$$
。...13 分

随机变量 X 的分布列是：

X	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{23}{35}$	$\frac{8}{35}$

数学期望 $E(X) = 1 \times \frac{4}{35} + 2 \times \frac{23}{35} + 3 \times \frac{8}{35} = \frac{74}{35}$14分



19.解: (I) 设切点为 (x_0, y_0) , 因为 $f'(x) = -\frac{1}{x} + 2$,1分

所以 $-\frac{1}{x_0} + 2 = 1, x_0 = 1, y_0 = -\ln 1 + 2 - 2 = 0$,3分

所以切线方程 l 为 $y - 0 = 1 \times (x - 1)$, 即 $y = x - 1$ 4 分

(II) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ 5 分

令 $f'(x) = 0$ 即 $-\frac{1}{x} + 2 = 0$, $x = \frac{1}{2}$,6 分

令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{2}$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{2}$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减,

在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上 单 调 递 增,8 分

所以 $f(x)$ 存在极小值 $f(\frac{1}{2}) = \ln 2 + 1 - 2 = \ln 2 - 1$, 无极大值10 分

(III) 函数 $g(x) = x^2 f(x) - 2f(x) = (x^2 - 2)f(x)$ 有三个零点, 理由如下:11 分

由 (II) 知 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,12 分

由且 $f(\frac{1}{e^2}) = 2 + \frac{2}{e^2} - 2 = \frac{2}{e^2} > 0$, $f(\frac{1}{2}) = \ln 2 + 1 - 2 = \ln 2 - 1 < 0$,

所 以 存 在 唯 一 $x_0 \in (\frac{1}{e^2}, \frac{1}{2})$, 使 得 $f(x_0) = 0$,13 分

又 $f(1) = 0 + 2 - 2 = 0$,14 分

$g(\sqrt{2}) = (2 - 2)f(x) = 0$,

15 分

且三个零点互不相同, 所以函数 $g(x)$ 有三个零点.

20.解: (I) 由点 $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆上得, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1$ ①,1

分

又 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ②2

分

由 ①②得 $c^2 = 1, a^2 = 2, b^2 = 1$,4 分

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 5 分

(II) k_1, k_3, k_2 或 k_2, k_3, k_1 能构成一个等差数列6

分

椭圆右焦点坐标 $F(1,0)$ ，显然直线 AB 斜率存在，

设 AB 的斜率为 k ，则直线 AB 的方程为 $y = k(x-1)$ ③7 分

代入椭圆方程 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，整理得 $(2k^2+1)x^2 - 4k^2x + 2(k^2-1) = 0$ ，易知 $\Delta > 0$...8

分

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则有 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2+1}, x_1x_2 = \frac{2(k^2-1)}{2k^2+1}$ ④10 分

在方程③中，令 $x = 2$ ，得 $M(2, k)$ ，从而 $k_1 = \frac{y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_1 - 1}, k_2 = \frac{y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_2 - 1}$ ，

$k_3 = \frac{k - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 - 1} = k - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，11

分

因为 $k_1 + k_2 = \frac{y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_1 - 1} + \frac{y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x_2 - 1} = \frac{(kx_1 - k - \frac{\sqrt{2}}{2})(x_2 - 1) + (kx_2 - k - \frac{\sqrt{2}}{2})(x_1 - 1)}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}$

$= \frac{2kx_1x_2 - (2k + \frac{\sqrt{2}}{2})(x_1 + x_2) + 2k + \sqrt{2}}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1}$ ⑤，将④代入⑤得

$$k_1 + k_2 = \frac{2k(2k^2 - 2) - (2k + \frac{\sqrt{2}}{2})4k^2 + (2k + \sqrt{2})(2k^2 + 1)}{2k^2 - 2 - 4k^2 + 2k^2 + 1} = 2k - \sqrt{2} \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

而 $2k_3 = 2(k - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2k - \sqrt{2}$ ，所以 $k_1 + k_2 = 2k_3$ ，即 k_3 为 k_1 、 k_2 的等差中项， 14 分

所以 k_1 、 k_3 、 k_2 或 k_2 、 k_3 、 k_1 为等差数列。15 分

21 解：(I) 因为 $\{a_n\}$ 具有性质 “ $Q(3,2,2)$ ”，所以 $\frac{a_{n+3}}{a_n} = 2$ ， $n \geq 2$1 分

由 $a_2 = 2$ ，得 $a_5 = 4, a_8 = 8$ ，由 $a_4 = 2$ ，得 $a_7 = 4$3 分

因为 $a_6 + a_7 + a_8 = 18$ ，所以 $a_6 = 6$ ，即 $a_3 = 3$4 分

(II) $\{a_n\}$ 不具有性质 “ $Q(2,1,2)$ ”.5 分

由等比数列 $\{c_n\}$ 的公比为 $\frac{1}{2}$ ，由 $c_3 = 4$ ，得 $c_1 = 16$ ，故 $c_n = 2^{5-n}$ 6 分

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，由 $c_2 = 8$ ， $b_1 + c_1 = c_2$ ，

得 $b_1 = -8$ ，由 $b_3 = 4$ ，所以 $d = 6$ ，故 $b_n = 6n - 14$7 分

所以 $a_n = 6n - 14 + 2^{5-n}$. 若 $\{a_n\}$ 具有性质 “ $Q(2,1,2)$ ”，则 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 2$ ， $n \geq 1$.

因为 $a_4 = 12$ ， $a_6 = 22\frac{1}{2}$ ，所以 $\frac{a_6}{a_4} \neq 2$ ，故 $\{a_n\}$ 不具有性质 “ $Q(2,1,2)$ ” ...9 分

(III) 因为 $\{a_n\}$ 具有性质 “ $Q(i,1,q_1)$ ”，所以 $\frac{a_{n+i}}{a_n} = q_1$ ， $n \geq 1$. ①

因为 $\{a_n\}$ 具有性质 “ $Q(j, 1, q_2)$ ”，所以 $\frac{a_{n+j}}{a_n} = q_2, n \geq 1$. ②

因为 $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i < j$, 所以由①得 $\frac{a_{n+j}}{a_n} = q_1^j$; 由②, 得 $\frac{a_{n+j}}{a_n} = q_2^j$,10 分

所以 $q_1^j = q_2^j$, 即 $q_1 = q_2^{\frac{j}{j}}$11 分

由①②, 得 $\frac{a_{n+j}}{a_{n+i}} = \frac{q_2}{q_1} = q_2^{1-\frac{i}{j}} = q_2^{\frac{j-i}{j}}, n \geq 1$,12 分

所以 $\frac{a_{n+j-i}}{a_n} = q_2^{\frac{j-i}{j}}, n \geq i+1$,13 分

所以 $\{a_n\}$ 具有性质 “ $Q(j-i, i+1, q_2^{\frac{j-i}{j}})$ ”14 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯