# 高三文科数学

**考生注意：**

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。**

1. $\frac{5-i}{1+i}=$

A. $2-3i$　　B. $3-3i$　　C. $2-2i$　　D. $3+2i$

2. 已知集合 $A=\{x|x^2-10x+21\leqslant 0\}$，$B=\{x|-7\leqslant 5-2x\leqslant 4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3\right\}$　　B. $\{x|6\leqslant x\leqslant 7\}$

C. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 7\}$　　D. $\{x|3\leqslant x\leqslant 6\}$

3. $1-2\cos^2 67.5^\circ=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

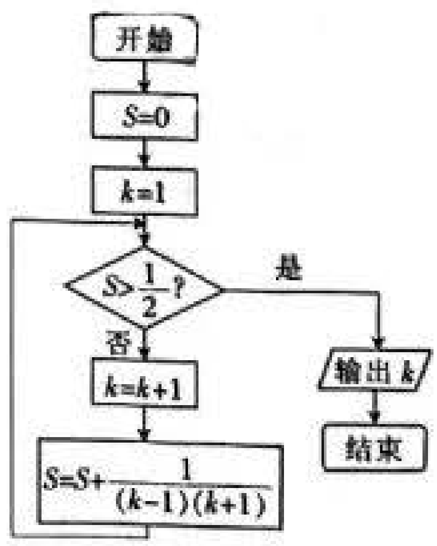
4. 执行如图所示的程序框图，则输出的 $k=$

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6




5. 函数 $f(x)=-\sin 3x$ 的单调递增区间为

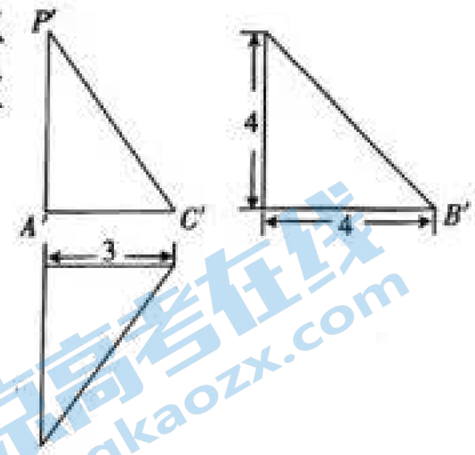
A. $\left[\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

B. $\left[\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

C. $\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

D. $\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3},\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$

6. 某三棱锥 $P-ABC$ 的三视图如图所示，$P,A,B,C$ 在三视图中所对应的点分别为 $P',A',B',C'$，$D$ 为棱 $BC$ 的中点，则直线 $PD$ 与 $AC$ 所成角的正切值为 




A. $\frac{\sqrt{73}}{3}$　　B. $2\sqrt{5}$

C. $3\sqrt{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

7. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x+5)=f(x-3)$，如果当 $x\in[0,4)$时，$f(x)=\log_2(x+2)$，则 $f(766)=$

A. 3　　B. $-3$　　C. $-2$　　D. 2

8. 在△$ABC$ 中，$AB=4$，$BC=5$，$AC=6$，现有以下四个命题

$p_1$：$\frac{2\sin C}{\sin B}<\frac{\sin A}{\sin C}$；$p_2$：△$ABC$ 的面积为$\frac{15\sqrt{7}}{8}$；

$p_3$：$\frac{2\sin C}{\sin B}>\frac{\sin A}{\sin C}$；$p_4$：△$ABC$ 中最大角的余弦值为$\frac{1}{8}$.

那么，下列命题中为真命题的是

A. $p_1\wedge p_4$　　B. $p_3\wedge p_4$

C. $p_1\vee p_2$　　D. $(\neg p_2)\wedge(\neg p_4)$

9. 已知函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=\cos x-xf'\left(\frac{\pi}{2}\right)$，若曲线 $y=f(x)$在 $x=0$ 处的切线为 $l$，则下列直线中与直线 $l$ 垂直的是

A. $2x+y+1=0$　　B. $2x-y-1=0$

C. $x-2y-2=0$　　D. $x+2y+1=0$

10. 设 $a,b,c$ 分别为△$ABC$ 内角 $A,B,C$ 的对边，若 $B=C\neq A$，且 $a(b^2+c^2-a^2)=b^2c$，则 $A=$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{5}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

11. 已知点 $A(-5,0)$，$B(-1,-3)$，点 $P$ 是圆 $C$：$(x-1)^2+y^2=1$ 上任意一点，则△$PAB$ 面积的最大值是

A. $\frac{18}{5}$　　B. $\frac{23}{5}$　　C. $\frac{23}{2}$　　D. 9

12. 已知抛物线 $C$：$x^2=4y$ 的焦点为 $F$，过点 $F$ 的直线 $l$ 交抛物线 $C$ 于 $A,B$ 两点，其中点 $A$ 在第一象限，若弦 $AB$ 的长为$\frac{25}{4}$，则$\frac{|AF|}{|BF|}=$

A. 2 或$\frac{1}{2}$　　B. 3 或$\frac{1}{3}$

C. 4 或$\frac{1}{4}$　　D. 5 或$\frac{1}{5}$

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。**

13. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$，则 $\theta=$________.

14. 中国古代数学名著《九章算术》中记载："圆周与其直径之比被定为 3，圆中弓形面积为$\frac{1}{2}a(a+c)$（$c$ 为弦长，$a$ 为半径长与圆心到弦的距离之差)."据此计算，已知一个圆中弓形所对应的弦长 $c=6$，$a=1$，质点 $M$ 随机投入此圆中，则质点 $M$ 落在该弓形内的概率为________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 8，直线 $x-2y=0$ 与双曲线 $C$ 交于 $A$，$B$ 两点，$M(-a,2b)$，若 $|MA|=|MB|$，则双曲线 $C$ 的方程为________.

16. 在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 与 $\triangle BDC$ 都是边长为 2 的等边三角形，且平面 $ABD\perp$ 平面 $BDC$，则该四面体外接球的体积为________.

**三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。**

**(一)必考题：共 60 分。**

17.（本小题满分 12 分）

在递增的等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_2=6$，且 $4(a_3-a_2)=a_4-6$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $b_n=a_n+2n-1$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$.

18.（本小题满分 12 分）

某市环保部门对该市市民进行了一次垃圾分类知识的网络问卷调查，每位市民仅有一次参加机会，通过随机抽样，得到参与问卷调查的 100 人的得分（满分：100 分）数据，统计结果如下表所示.

| 组别 | [40,50) | [50,60) | [60,70) | [70,80) | [80,90) | [90,100] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 男 | 2 | 3 | 5 | 15 | 18 | 12 |
| 女 | 0 | 5 | 10 | 10 | 7 | 13 |

(1)若规定问卷得分不低于 70 分的市民称为“环保关注者”，请完成下面的 2×2 列联表，并判断能否在犯错误概率不超过 0.05 的前提下，认为是否为“环保关注者”与性别有关？

| | 非“环保关注者” | 是“环保关注者” | 合计 |
|---|---|---|---|
| 男 | | | |
| 女 | | | |
| 合计 | | | |

(2)若问卷得分不低于 80 分的市民称为“环保达人”. 现在从本次调查的“环保达人”中利用分层抽样的方法随机抽取 5 名市民参与环保知识问答，再从这 5 名市民中抽取 2 人参与座谈会，求抽取的 2 名市民中，既有男“环保达人”又有女“环保达人”的概率.

附表及公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

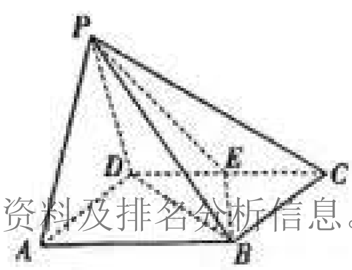
| $P(K^2\geqslant k)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，平面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PA=PD=4$，$AB=4\sqrt{3}$，$\angle BAD=30^\circ$，$E$ 为 $CD$ 的中点.

(1)证明：$BD\perp PE$；

(2)求三棱锥 $B-PCE$ 的体积.



20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x-a\ln x-b$,

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性;

(2)若 $\forall x>0, f(x)\geq 0$,求 $ab$ 的最大值.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$,且椭圆过点$(\sqrt{2},1)$.

(1)求椭圆 $C$ 的标准方程.

(2)设直线 $l$ 与 $C$ 交于 $M,N$ 两点,点 $D$ 在 $C$ 上,$O$ 是坐标原点,若$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}$,判定四边形 $OMDN$ 的面积是否为定值?若为定值,求出该定值;如果不是,请说明理由.

**(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。**

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $C_1$ 的参数方程是$\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$($\theta$ 为参数),以坐标原点为极点,$x$ 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho=\frac{m}{2\sin(\theta-\frac{\pi}{3})}(m\neq 0)$.

(1)求曲线 $C_1,C_2$ 的直角坐标方程;

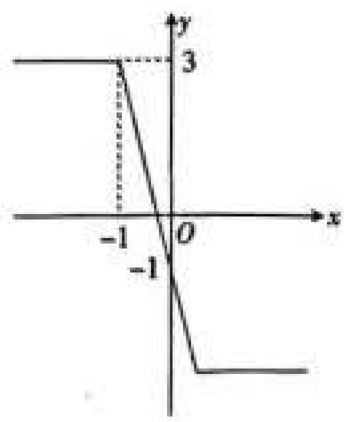
(2)设 $A,B$ 分别在曲线 $C_1,C_2$ 上运动,若$|AB|$的最小值是 1,求 $m$ 的值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|ax-1|-|2x+a|$的图象如图所示.

(1)求 $a$ 的值;

(2)设 $g(x)=f(x+\frac{1}{2})+f(x-1)$,$g(x)$的最大值为 $t$,若正数 $m,n$ 满足 $m+n=t$,证明:$\frac{4}{m}+\frac{9}{n}\geq\frac{25}{6}$.



# 高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. A　$\frac{5-i}{1+i}=\frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2-3i$. 来源微信公众号：高三答案

2. D　因为 $A=\{x|3\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 6\right\}$，所以 $A\cap B=\{x|3\leqslant x\leqslant 6\}$.

3. C　$1-2\cos^2 67.5°=-(2\cos^2 67.5°-1)=-\cos 135°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

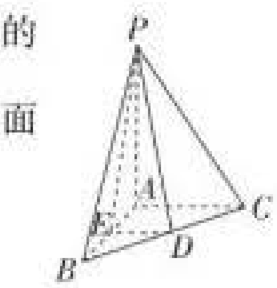
4. B　第一次循环，$S=0+\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$，$k=2$；第二次循环，$S=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\times 4}=\frac{11}{24}$，$k=3$；第三次循环，$S=\frac{11}{24}+\frac{1}{3\times 5}=\frac{21}{40}$，$k=4$.

此时$\frac{21}{40}>\frac{1}{2}$，故退出循环，输出 $k=4$.

5. A　要求 $f(x)=-\sin 3x$ 的单调递增区间，只需求 $y=\sin 3x$ 的单调递减区间. 令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 3x\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得

$\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

6. D　三棱锥 $P-ABC$ 如图所示，作 $DE\perp AB$，垂足为 $E$，连接 $PE$，易知$\angle EDP$ 就是直线 $PD$ 与 $AC$ 所成的角. 因为 $PA\perp$平面 $ABC$，$AB=4$，$AC=3$，$PA=4$，所以 $DE=\frac{3}{2}$，$PE=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 因为 $AC\perp$平面 $PAB$，所以 $DE\perp$平面 $PAB$，所以 $\tan\angle EDP=\frac{2\sqrt{5}}{\frac{3}{2}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.




7. D　由 $f(x+5)=f(x-3)$，得 $f(x+8)=f(x)$，所以 $f(x)$是周期为 8 的周期函数，$f(766)=f(96\times 8-2)=f(-2)$，$f(-2)=f(2)=\log_2 4=2$.

8. B　$\frac{2\sin C}{\sin B}=\frac{2c}{b}=\frac{4}{3}>\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{a}{c}=\frac{5}{4}$；$\triangle ABC$ 中最大角的余弦值为 $\cos B=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times 4\times 5}=\frac{1}{8}$；$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}\times 4\times 5\times\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$，故 $p_3\wedge p_4$ 为真命题.

9. A　$f'(x)=-\sin x-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$，令 $x=\frac{\pi}{2}$，则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，则 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x$. $f(0)=1$，$f'(0)=\frac{1}{2}$，所以 $l$ 的方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$，所以直线 $2x+y+1=0$ 与直线 $l$ 垂直.

10. B　因为 $a(b^2+c^2-a^2)=b^2c$，所以 $2a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b$，即 $b=2a\cos A$，所以 $\sin B=2\sin A\cos A=\sin 2A$，所以 $B=2A$ 或 $B+2A=\pi$. 若 $B+2A=\pi$，则 $C=A$，这与题设不合，故 $B=2A$，又 $B=C$，所以 $A+B+C=5A=\pi$，即 $A=\frac{\pi}{5}$.

11. C　直线 $AB$ 的方程为 $3x+4y+15=0$，$|AB|=\sqrt{(-5+1)^2+(0+3)^2}=5$，圆心$C(1,0)$到直线 $AB$ 的距离 $d=\frac{|3+15|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{18}{5}$，点 $P$ 到直线 $AB$ 的最大距离为 $d_{\max}=d+r=\frac{18}{5}+1=\frac{23}{5}$. 故$\triangle PAB$ 面积的最大值是$\frac{1}{2}\times 5\times\frac{23}{5}=\frac{23}{2}$.

12. C　设直线的倾斜角为 $\theta$，则 $|AB|=\frac{2p}{\cos^2\theta}=\frac{4}{\cos^2\theta}=\frac{25}{4}$，所以 $\cos^2\theta=\frac{16}{25}$，$\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\frac{9}{16}$，即 $\tan\theta=\pm\frac{3}{4}$，所以直线 $l$ 的方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x+1$. 当直线 $l$ 的方程为 $y=\frac{3}{4}x+1$，联立$\begin{cases}x^2=4y\\ y=\frac{3}{4}x+1\end{cases}$，解得 $x_1=-1$ 和 $x_2=4$，所以$\frac{|AF|}{|BF|}=\left|\frac{4-0}{0-(-1)}\right|=4$；同理，当直线 $l$ 的方程为 $y=-\frac{3}{4}x+1$，$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1}{4}$. 综上，$\frac{|AF|}{|BF|}=4$ 或$\frac{1}{4}$.

13. $\frac{\pi}{6}$(或 30°)　$\because\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\theta=\frac{\pi}{6}$.

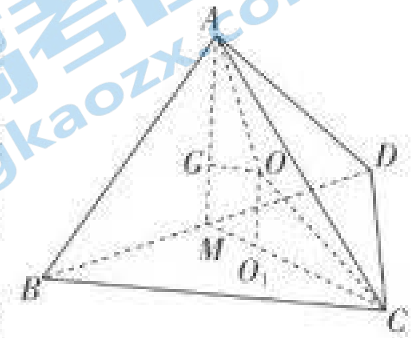


14. $\frac{7}{150}$　由题意可知，弓形的面积 $S_1=\frac{1}{2}\times 1\times(6+1)=\frac{7}{2}$. 设圆的半径为 $r$，则 $r^2=(r-1)^2+3^2$，解得 $r=5$，所以圆的

面积 $S_2=3r^2=75$，所以质点落在弓形内的概率为 $P=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{7}{2}}{75}=\frac{7}{150}$.

15. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$　根据双曲线的对称性，易知 $A,B$ 两点关于原点 $O$ 对称，因为 $|MA|=|MB|$，所以 $MO\perp AB$，则 $-\frac{2b}{a}=-2$，即 $a=b$，又 $2c=8$，$c=4$，所以 $a^2+b^2=16$，从而 $a^2=b^2=8$，故双曲线 $C$ 的方程为 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$.

16. $\frac{20\sqrt{15}}{27}\pi$　取 $\triangle BDC$ 的外心为 $O_1$，设 $O$ 为球心，连接 $OO_1$，则 $OO_1\perp$ 平面 $BDC$. 取 $BD$ 的中点 $M$，连接 $AM,O_1M$，过 $O$ 做 $OG\perp AM$ 于点 $G$，易知四边形 $OO_1MG$ 为矩形. 连接 $OA,OC$，设 $OA=R$，$OO_1=MG=h$. 连接 $MC$，则 $O_1,M,C$ 三点共线，易知 $MA=MC=\sqrt{3}$，所以 $OG=MO_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$CO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AGO$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1C$ 中，$GA^2+GO^2=OA^2$，$O_1C^2+O_1O^2=OC^2$，即



$(\sqrt{3}-h)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=R^2$，$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+h^2=R^2$，所以 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$R^2=\frac{5}{3}$，得 $R=\frac{\sqrt{15}}{3}$，所以 $V_{球O}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{20\sqrt{15}}{27}\pi$.

17. 解：(1)设公比为 $q$，由 $4(a_3-a_2)=a_4-6$，得 $4(6q-6)=6q^2-6$，………… 2 分

化简得 $q^2-4q+3=0$，解得 $q=3$ 或 $q=1$，………… 4 分

因为等比数列 $\{a_n\}$ 是递增的，所以 $q=3$，$a_1=2$，………… 5 分

所以 $a_n=2\times3^{n-1}$，………… 6 分

(2)由(1)得 $b_n=2\times3^{n-1}+2n-1$，………… 7 分

所以 $S_n=(2+6+18+\cdots+2\times3^{n-1})+(1+3+5+\cdots+2n-1)$，………… 9 分

则 $S_n=\frac{2\times(1-3^n)}{1-3}+\frac{n(1+2n-1)}{2}$，………… 11 分

所以 $S_n=3^n-1+n^2$. ………… 12 分

18. 解：(1)补全 $2\times2$ 列联表如下：

| | 非"环保关注者" | 是"环保关注者" | 合计 |
|---|---|---|---|
| 男 | 10 | 45 | 55 |
| 女 | 15 | 30 | 45 |
| 合计 | 25 | 75 | 100 |

………… 2 分

将 $2\times2$ 列联表中的数据代入公式计算得

$K^2$ 的观测值 $k=\frac{100(45\times15-30\times10)^2}{25\times75\times55\times45}\approx3.03<3.841$，………… 4 分

所以在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下，不能认为是否为是"环保关注者"与性别有关. ………… 5 分

(2)由题可知，利用分层抽样的方法可得男"环保达人"3 人，女"环保达人"2 人. ………… 7 分

设男"环保达人"3 人分别为 $A,B,C$；女"环保达人"2 人为 $D,E$.

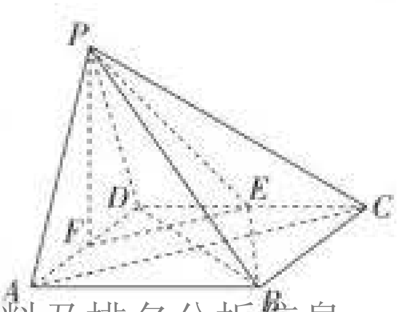
从中抽取两人的所有情况为$(AB),(AC),(AD),(AE),(BC),(BD),(BE),(CD),(CE),(DE)$，共 10 种情况，

………… 9 分

既有男"环保达人"又有女"环保达人"的情况有$(AD),(AE),(BD),(BE),(CD),(CE)$，共 6 种情况，………… 11 分

所求概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. ………… 12 分

19. (1)证明：取 $AD$ 的中点 $F$，连接 $PF,EF,AC$.



因为 $PA=PD$，$F$ 为 $AD$ 的中点，所以 $PF\perp AD$. ………… 1 分

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$. ………… 2 分

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PF\perp BD$. ………… 3 分



因为底面 $ABCD$ 为菱形，所以 $BD\perp AC$. ………… 4 分

因为 $E$ 为 $CD$ 的中点，$F$ 为 $AD$ 的中点，所以 $EF // AC$，所以 $BD \perp EF$. ······ 5 分

因为 $PF \subset$ 平面 $PEF$，$EF \subset$ 平面 $PEF$，且 $PF \cap EF = F$，所以 $BD \perp$ 平面 $PEF$. ······ 6 分

因为 $PE \subset$ 平面 $PEF$，所以 $BD \perp PE$. ······ 7 分

(2)解：由(1)可知四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 $PF$. 来源微信公众号：高三答案

因为 $PA = PD = 4$，$AD = AB = 4\sqrt{3}$，$PF \perp AD$，所以 $PF = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$. ······ 8 分

因为底面 $ABCD$ 为菱形，$AB = 4\sqrt{3}$，$\angle BAD = 30°$，

$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times (4\sqrt{3} \times \frac{1}{2}) = 6$ ······ 10 分

所以 $V_{\text{三棱锥}B-PCE} = V_{\text{三棱锥}P-BCE} = \frac{1}{3} \times 6 \times 2 = 4$. ······ 12 分

20. 解：(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，由 $f(x) = x - a\ln x - b$，得 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x} = \frac{x-a}{x}$，······ 2 分

当 $a \leqslant 0$ 时，$f'(x) > 0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. ······ 3 分

当 $a > 0$ 时，则 $x \in (0, a)$ 时，$f'(x) < 0$，函数 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减；

$x \in (a, +\infty)$ 时，$f'(x) > 0$，函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增. ······ 5 分

(2)由(1)可知，当 $a < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，当 $x \to 0$ 时，$f(x) \to -\infty$ 与 $f(x) \geqslant 0$ 相矛盾；

当 $a = 0$ 时，$\forall x > 0$，$f(x) \geqslant 0$，所以 $b \leqslant 0$，此时 $ab = 0$. ······ 7 分

当 $a > 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递减，函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增.

$f(x)_{\min} = f(a) = a - a\ln a - b \geqslant 0$，即 $a - a\ln a \geqslant b$. ······ 9 分

则 $ab \leqslant a^2 - a^2\ln a\,(a > 0)$. ······ 10 分

令 $F(x) = x^2 - x^2\ln x\,(x > 0)$，则 $F'(x) = x(1 - 2\ln x)$.

令 $F'(x) > 0$，则 $0 < x < \sqrt{e}$，令 $F'(x) < 0$，则 $x > \sqrt{e}$，

当 $x = \sqrt{e}$ 时，$F(x)_{\max} = \frac{e}{2}$，······ 11 分

即当 $a = \sqrt{e}$，$b = \frac{\sqrt{e}}{2}$ 时，$ab$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$.

综上，$ab$ 的最大值为 $\frac{e}{2}$. ······ 12 分

21. 解：(1)因为椭圆 $C$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $a^2 = 2b^2$. ······ 2 分

因为点 $(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆 $C$ 上，所以 $\frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$，

由 $\begin{cases} a^2 = 2b^2, \\ \frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 2, \end{cases}$ ······ 3 分

所以椭圆 $C$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. ······ 4 分

(2)当直线 $l$ 的斜率不存在时，直线 $MN$ 的方程为 $x = -1$ 或 $x = 1$，此时四边形 $OMDN$ 的面积为 $\sqrt{6}$. ······ 5 分

当直线 $l$ 的斜率存在时，设直线 $l$ 的方程是 $y = kx + m$，

联立方程组 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$，消去 $y$，得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 4 = 0$，

$\Delta = 8(4k^2 + 2 - m^2) > 0$，$x_1 + x_2 = \frac{-4km}{1 + 2k^2}$，$x_1x_2 = \frac{2m^2 - 4}{1 + 2k^2}$，

$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{1 + 2k^2}$. ······ 7 分

$|MN| = \sqrt{1 + k^2} \times \frac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2 + 2 - m^2}}{1 + 2k^2}$，······ 8 分



点 $O$ 到直线 $MN$ 的距离是 $d = \frac{|m|}{\sqrt{1 + k^2}}$. ······ 9 分

由$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OD}$，得$x_D=\dfrac{-4km}{1+2k^2}$，$y_D=\dfrac{2m}{1+2k^2}$.

因为点 $D$ 在曲线 $C$ 上，所以有$\dfrac{\left(\dfrac{-4km}{1+2k^2}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(\dfrac{2m}{1+2k^2}\right)^2}{2}=1$，整理得 $1+2k^2=2m^2$. ………………………… 10 分

由题意，四边形 $OMDN$ 为平行四边形，所以四边形 $OMDN$ 的面积为

$S_{OMDN}=|MN|d=\sqrt{1+k^2}\dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{4k^2+2-m^2}}{1+2k^2}\times\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}|m|\sqrt{4k^2+2-m^2}}{1+2k^2}$. ………………………… 11 分

由 $1+2k^2=2m^2$，得 $S_{OMDN}=\sqrt{6}$，故四边形 $OMDN$ 的面积是定值，其定值为$\sqrt{6}$. ………………………… 12 分

22. 解：(1)由$\begin{cases}x=\sqrt{3}+2\cos\theta,\\ y=1+2\sin\theta\end{cases}$消去参数，得$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$，

所以曲线 $C_1$ 的直角坐标方程为$(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2=4$. ………………………… 2 分

由$\rho=\dfrac{m}{2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)}$，整理得 $\rho\sin\theta-\sqrt{3}\rho\cos\theta=m$， ………………………… 3 分

而 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$， ………………………… 4 分

所以 $y-\sqrt{3}x=m$，即 $C_2$ 的直角坐标方程为$\sqrt{3}x-y+m=0$. ………………………… 5 分

(2)由(1)知曲线 $C_1$ 是圆心为$(\sqrt{3},1)$，半径 $r=2$ 的圆， ………………………… 6 分

则圆心$(\sqrt{3},1)$到直线$\sqrt{3}x-y+m=0$ 的距离为$\dfrac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1+m|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}$. ………………………… 7 分

所以$|AB|_{\min}=\dfrac{|\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1+m|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}-2=1$， ………………………… 9 分

解得 $m=4$ 或 $m=-8$. ………………………… 10 分

23. (1)解：由 $f(0)=-1$，得 $1-|a|=-1$，即 $a=\pm2$. ………………………… 2 分

由 $f(-1)=3$，得$|a+1|-|a-2|=3$，所以 $a=2$. ………………………… 4 分

(2)证明：由(1)知 $f(x)=|2x-1|-|2x+2|$， ………………………… 5 分

所以 $g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+f(x-1)=|2x-3|-|2x+3|=\begin{cases}6, & x\leqslant-\dfrac{3}{2},\\ -4x, & -\dfrac{3}{2}<x\leqslant\dfrac{3}{2},\\ -6, & x>\dfrac{3}{2}.\end{cases}$ ………………………… 7 分

显然 $g(x)$的最大值为 6，即 $t=6$. ………………………… 8 分

因为 $m+n=6(m>0,n>0)$，

所以$\dfrac{4}{m}+\dfrac{9}{n}=\dfrac{1}{6}(m+n)\left(\dfrac{4}{m}+\dfrac{9}{n}\right)=\dfrac{1}{6}\left(13+\dfrac{4n}{m}+\dfrac{9m}{n}\right)$. ………………………… 9 分

因为$\dfrac{4n}{m}+\dfrac{9m}{n}\geqslant2\sqrt{\dfrac{4n}{m}\cdot\dfrac{9m}{n}}=12$（当且仅当 $m=\dfrac{12}{5}$，$n=\dfrac{18}{5}$时取等号），

所以$\dfrac{4}{m}+\dfrac{9}{n}\geqslant\dfrac{1}{6}\times(13+12)=\dfrac{25}{6}$. ………………………… 10 分

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。